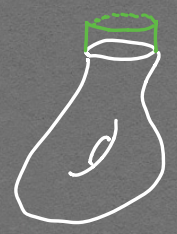
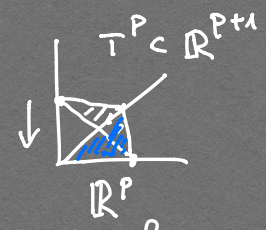
Variétes lisses à bord.

Intégration de formes sur une variété lisse à bord.



Soit M une variété lisse de dimension n.
On se restreint aux simplexes singuliers lisses $\sigma : T^p \to M$, et on considère T^p (et toutes ses faces) comme simplexe orienté.



Soit $\omega \in \Omega^p(M)$ et $\sigma : T^p \to M$ un simplexe singulier lisse (défini sur un voisinage ouvert de $T^p \subset \mathbb{R}^p$). Alors, $\sigma^* \omega$ est une p-forme sur (un voisinage ouvert de) T^p.

On pose $\displaystyle\int_\sigma \omega = \int_{T^p} \sigma^* \omega$ (on omet des détails techniques concernant le $(p-2)$-squelette de T^p).

Pour une p-chaîne $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma \in C_p^{\text{lisse}}(M)$, on pose

$$\int_c \omega = \sum_\sigma n_\sigma \int_\sigma \omega .$$

On obtient un morphisme

$$\psi^p : \Omega^p(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_p^{lisse}(M), \mathbb{R}) = C^p_{lisse}(M; \mathbb{R})$$

donné par $\psi^p(\omega)(c) = \int_c \omega$,

et un morphisme de complexes de (co)chaînes.

C'est un corollaire du théorème de Stokes :

si M est une variété lisse orientée avec le bord ∂M et $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ est une $(n-1)$-forme à support compact, alors

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

On note $H^p_{lisse}(M)$ les groupes d'homologie de $C^\bullet_{lisse}(M; \mathbb{R})$.

<u>Théorème de de Rham</u> Le morphisme induit

$$\psi^* : H^p_\Omega(M) \longrightarrow H^p_{lisse}(M)$$

est un isomorphisme pour tout entier $p \geq 0$.

Deux séries de résultats.

- Dans le cadre de simplexes singuliers lisses : suites exactes longues, suite de Mayer-Vietoris (pour sous-ensembles ouverts), calcul pour les espaces contractiles.
- Résultats similaires pour la cohomologie de de Rham.

- **Lemme de Poincaré** Le théorème de de Rham est vrai pour tout sous-ensemble ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$.

- **Analogue de la suite de Mayer-Vietoris**

$U, V \subset M$ deux ouverts.

Suite exacte courte

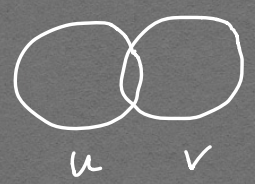
$$0 \to \Omega^p(U \cup V) \xrightarrow{-} \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \xrightarrow{+} \Omega^p(U \cap V) \to 0$$

Pour montrer la surjectivité de la deuxième application, considérons une p-forme ω sur $U \cap V$.

On peut utiliser une partition de l'unité pour trouver une fonction lisse

$$f : U \cup V \to \mathbb{R}$$

qui est 0 sur un voisinage de $U \setminus V$ et 1 sur un voisinage de $V \setminus U$.



On a une décomposition

$$\omega = f\omega + (1-f)\omega.$$

Les formes $f\omega$ et $(1-f)\omega$ peuvent être prolongées (par 0) sur U et V, respectivement.

Le diagramme suivant est commutatif (ici $\mathcal{U} = \{U, V\}$):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^p(U \cup V) \arrow[r] \arrow[d, "i^\# \circ \psi"] & \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \arrow[r] \arrow[d, "\psi \oplus \psi"] & \Omega^p(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^p_{\mathcal{U},\text{lisse}}(U \cup V; \mathbb{R}) \arrow[r] & C^p_{\text{lisse}}(U; \mathbb{R}) \oplus C^p_{\text{lisse}}(V; \mathbb{R}) \arrow[r] & C^p_{\text{lisse}}(U \cap V; \mathbb{R}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On obtient la suite de Mayer-Vietoris et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^p_\Omega(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d] & H^p_\Omega(U)\oplus H^p_\Omega(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^p_\Omega(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+1}_\Omega(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^p_{\text{lisse}}(U\cup V;\mathbb{R}) \arrow[r] & H^p_{\text{lisse}}(U;\mathbb{R})\oplus H^p_{\text{lisse}}(V;\mathbb{R}) \arrow[r] & H^p_{\text{lisse}}(U\cap V;\mathbb{R}) \arrow[r] & H^{p+1}_{\text{lisse}}(U\cup V;\mathbb{R}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

<u>Corollaire</u> Si ψ^* est un isomorphisme pour U, V et $U\cap V$ (pour tout p), il est aussi pour $U\cup V$.

- <u>Lemme</u> Soit $\{U_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ une collection d'ouverts deux à deux disjoints telle que ψ^* soit un isomorphisme pour tout U_i. Alors, ψ^* est un isomorphisme pour $\bigcup_{i\in\mathcal{J}} U_i$.

C'est un corollaire du calcul des groupes de cohomologie (dans le cas singulier et dans le cas de de Rham) et la naturalite de ψ^*.

Lemme (local-global pour les ouverts)

Soit $P(A)$ une affirmation à propos de sous-ensembles ouverts $A \subset M$ d'une variété topologique (lisse) M de dimension n. Supposons que

(i) si A est homéomorphe (difféomorphe) à un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, alors $P(A)$ est vraie;

(ii) si $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$ sont vraies pour certains ouverts A et B de M, alors $P(A \cup B)$ est aussi vraie;

(iii) si $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ est une collection d'ouverts de M deux à deux disjoints et $P(A_i)$ est vraie pour tout $i \in \mathcal{I}$, alors $P(\bigcup_i A_i)$ est aussi vraie.

Alors, $P(U)$ est vraie pour tout ouvert $U \subset M$.

Démonstration Par (i) et (ii), l'affirmation $P(U)$ est vraie pour toute réunion finie U d'ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$ (pour l'instant, on considère le cas $M \subset \mathbb{R}^n$).

Soit $f : M \to [0, +\infty)$ une fonction propre.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$K_n = f^{-1}([n, n+1]).$$

On peut recouvrire le compact K_n par une réunion finie $U_n \subset f^{-1}(n - \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2})$ d'ouverts convexes.

Toutes les affirmations $P(U_n)$ sont vraies.

On pose $U = \bigcup_{n \text{ pair}} U_n$ et $V = \bigcup_{n \text{ impair}} U_n$.

On déduit de (iii) que $P(U)$ et $P(V)$ sont vraies. De plus,

$$U \cap V = \bigcup_{i,j} (U_{2i} \cap U_{2j+1}).$$

Les ouverts de cette réunion sont deux à deux disjoints, et chacun de ces ouverts est une réunion finie d'ouverts convexes.

Donc, $P(U \cap V)$ est vraie.

Par conséquent, $P(M) = P(U \cup V)$ est aussi vraie.

L'énoncé est, donc, démontré pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

En remplaçant les expressions ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ dans le raisonnement présenté par ouvert de $\mathbb{R}^n$, on obtient l'énoncé demandé. $\square$

Ceci termine la demonstration du théorème de de Rham.

L'isomorphisme obtenu $\psi^* : H^p_{\Omega}(M) \to H^p_{lisse}(M;\mathbb{R})$ peut être composé avec un isomorphisme $H^p_{lisse}(M;\mathbb{R}) \to H^p(M;\mathbb{R})$.

L'inclusion $C^{lisse}_{\bullet}(M) \hookrightarrow C_{\bullet}(M)$ induit un morphisme de complexes de (co)chaînes $C^{\bullet}(M;G) \longrightarrow C^{\bullet}_{lisse}(M;G)$ pour tout groupe abélien G.

On peut utiliser le lemme local-global pour les ouverts pour démontrer que le morphisme induit $H^p(M;G) \longrightarrow H^p_{lisse}(M;G)$ est un isomorphisme pour tout entier $p \geq 0$ (isomorphisme de G-modules si G est un anneau commutatif).

Dualité de Poincaré pour la cohomologie de de Rham

Soit M une variété lisse compacte de dimension n.
Dans cette situation, tous les groupes de cohomologie de de Rham de M sont de dimension finie.
Supposons, en plus, que M est orientée.

On considère l'application bilinéaire (pour tout entier $0 \leq k \leq n$)

$$H^k_\Omega(M) \times H^{n-k}_\Omega(M) \longrightarrow H^n_\Omega(M) \qquad \text{(cup produit)}$$

et la forme bilinéaire

$$\int : H^k_\Omega(M) \times H^{n-k}_\Omega(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par $([\omega],[\eta]) \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta$.

Théorème (dualité de Poincaré)

La forme bilinéaire $\int$ est non dégénérée.

Démonstration

On peut vérifier les hypothèses du lemme local-global pour les ouverts dans le cas de notre affirmation.

Corollaire Le morphisme

$$H^k_\Omega(M) \longrightarrow (H^{n-k}_\Omega(M))^*,$$

fournit par la forme bilinéaire $\int$, est un isomorphisme pour tout entier $0 \leq k \leq n$.

Si la variété M n'est pas compacte, on note $\Omega^k_c(M)$ l'espace de k-formes différentielles à support compact sur M.

Complexe

$$\Omega^0_c(M) \xrightarrow{d} \Omega^1_c(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Groupes $H^k_{\Omega,c}(M)$ de cohomologie de de Rham de M à support compact.

Si M est une variété lisse orientée (de dim. n), on a la forme bilinéaire (pour tout entier $0 \leq k \leq n$)

$$\int : H^k_{\Omega}(M) \times H^{n-k}_{\Omega,c}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par $([\omega],[\eta]) \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta$

(remarquons que la forme $\omega \wedge \eta$ est à support compact).

Le morphisme

$$H^k_{\Omega}(M) \longrightarrow (H^{n-k}_{\Omega,c}(M))^*,$$

fournit par la forme bilinéaire $\int$,
est un isomorphisme pour tout entier $0 \leq k \leq n$
(on ne démontre pas cet énoncé ici).