Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2024 - 2025

Topologie algébrique des variétés I

Examen

Jeudi 19 décembre 2024

Durée : 3 heures

L'usage des notes du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Exercice 1 Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux (les réponses doivent être justifiées).

(a) Soit
$$0 \to G_1 \xrightarrow{h_1} G_2 \xrightarrow{h_2} G_3 \to 0$$
une suite exacte courte de groupes abéliens ; alors, G_2 est isomorphe à $G_1 \times G_3$.

(b) Soit
$$\ldots \to C_{k+1} \to C_k \to \ldots \to C_1 \to C_0$$
un complexe de chaînes de groupes abéliens ; alors, il existe un espace topologique Z tel que ce complexe de chaînes soit isomorphe au complexe des chaînes singulières de Z.

(c) Soit M une variété topologique (sans bord) de dimension n, où $n \geq 1$ est un entier, telle que $H_n(M; \mathbb{Z})$ soit isomorphe à $\mathbb{Z}$; alors, la variété M est connexe.

(d) Soit N une variété topologique (sans bord) de dimension n, où $n \geq 1$ est un entier, telle que $H_n(N; \mathbb{Z})$ soit isomorphe à $\mathbb{Z}$; alors, la variété N est orientable.

(e) Soit $n \geq 1$ un entier ; alors, la variété topologique $\mathbb{R}P^n$ est orientable si et seulement si n est impair.

Exercice 2 Soient S_1 et S_2 deux surfaces topologiques connexes compactes (sans bord). La *somme connexe* $S_1 \sharp S_2$ de S_1 et S_2 est définie de la façon suivante. Soient $D_1 \subset S_1$ et $D_2 \subset S_2$ deux disques fermés de dimension 2, et soient $h_1 : D_1 \to D^2$ et $h_2 : D_2 \to D^2$ des homéomorphismes de D_1 et D_2, respectivement, avec le disque $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. On pose $\mathrm{Int}(D_1) = h_1^{-1}(\mathrm{Int}(D^2))$ et $\mathrm{Int}(D_2) = h_2^{-1}(\mathrm{Int}(D^2))$, où $\mathrm{Int}(D^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. On considère la réunion disjointe $(S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)) \coprod (S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2))$, et on identifie $S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)$ et $S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2)$ avec leurs images par les inclusions
$$S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1) \hookrightarrow (S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)) \coprod (S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2))$$
$$S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2) \hookrightarrow (S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)) \coprod (S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2)).$$
L'espace topologique $S_1 \sharp S_2$ est obtenu comme quotient de
$$(S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)) \coprod (S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2))$$
par la relation d'équivalence $\sim_{h_1,h_2}$ engendrée par $z \sim_{h_1,h_2} (h_2^{-1} \circ h_1)(z)$ pour tout $z \in D_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)$. On admet que le type topologique du résultat de la construction décrite ci-dessus ne dépend pas du choix de D_1, D_2, h_1 et h_2.
Soit $g \geq 0$ un entier. Une surface topologique s'appelle *sphère avec g anses* (respectivement, *sphère avec g rubans de Möbius*) si elle est homéomorphe à la somme connexe de g copies du tore $S^1 \times S^1$ (respectivement, à la somme connexe de g copies du plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$).

TSVP

(a) Montrer qu'une sphère avec g anses n'est pas homéomorphe à une sphère avec g_1 anses, où $g_1 \geq 0$ est un entier différent de g.

(b) Montrer qu'une sphère avec g rubans de Möbius n'est pas homéomorphe à une sphère avec g_2 rubans de Möbius, où $g_2 \geq 0$ est un entier différent de g.

(c) Soit $g_3 \geq 1$ un entier. Montrer qu'une sphère avec g anses n'est pas homéomorphe à une sphère avec g_3 rubans de Möbius.

Exercice 3 Soit $n \geq 2$ un entier pair.

(a) Justifier le fait que la variété topologique $\mathbb{C}P^n$ est orientable. On choisit une orientation de $\mathbb{C}P^n$.

(b) Existe-il une variété topologique compacte M (à bord) telle que le bord ∂M de M soit homéomorphe à $\mathbb{C}P^n$?

(c) Montrer que $|\sigma(\mathbb{C}P^n)| = 1$, où $\sigma(\mathbb{C}P^n)$ est la signature de la variété topologique $\mathbb{C}P^n$ munie de l'orientation choisie.

(d) Existe-il un homéomorphisme $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ tel que f renverse l'orientation de $\mathbb{C}P^n$?

Exercice 4 (a) Soit X un espace topologique non vide, et soient U et V deux sous-ensembles ouverts de X. Soient k et ℓ deux entiers positifs ou nuls. Justifier le fait que le cup produit standard

$$\smile : C^k(X;\mathbb{Z}) \times C^\ell(X;\mathbb{Z}) \to C^{k+\ell}(X;\mathbb{Z})$$

se restreint à un cup produit relatif

$$C^k(X,U;\mathbb{Z}) \times C^\ell(X,V;\mathbb{Z}) \to C^{k+\ell}(X,U+V;\mathbb{Z}),$$

où le sous-groupe $C^{k+\ell}(X,U+V;\mathbb{Z}) \subset C^{k+\ell}(X;\mathbb{Z})$ est formé des cochaînes singulières qui s'annulent sur toutes les chaînes singulières dans U et sur toutes les chaînes singulières dans V.

(b) Justifier le fait que le cup produit relatif ci-dessus donne un cup produit relatif

$$H^k(X,U;\mathbb{Z}) \times H^\ell(X,V;\mathbb{Z}) \to H^{k+\ell}(X,U \cup V;\mathbb{Z}).$$

(c) Supposons maintenant que $X = U \cup V$ et que U et V soient *acycliques*, c'est-à-dire, que, pour tout entier m positif ou nul , on a $\widetilde{H}^m(U;\mathbb{Z}) = 0$ et $\widetilde{H}^m(V;\mathbb{Z}) = 0$. Montrer que X *a les cup produits triviaux en degrés strictements positifs*, c'est-à-dire, pour toutes classes de cohomologie $\alpha \in H^a(X;\mathbb{Z})$ et $\beta \in H^b(X;\mathbb{Z})$ telles que a et b soient des entiers strictement positifs, on a $\alpha \smile \beta = 0$.

(d) Soit Y un espace topologique non vide. On note ΣY la suspension de Y. Montrer que ΣY a les cup produits triviaux en degrés strictements positifs.

(e) Montrer que le tore $T = S^1 \times S^1$ n'admet pas de recouvrement ouvert $T = U' \cup V'$ tel que U' et V' soient acycliques.

(f) Montrer que le plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$ n'admet pas de recouvrement ouvert $\mathbb{R}P^2 = U'' \cup V''$ tel que U'' et V'' soient acycliques.

Exercice 5 Soient n et m deux entiers strictement positifs tels que $n > m$, et soit $g : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^m$ une application continue. Montrer que le morphisme $g_* : H_1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z})$ induit par g est nul.