Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2025 - 2026

Topologie algébrique des variétés I

Examen

Jeudi 18 décembre 2025

Durée : 3 heures

L'usage des notes du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Exercice 1 Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux (les réponses doivent être justifiées).

(a) Soit $n \geq 1$ un entier, et soit M une variété topologique (sans bord) connexe non compacte de dimension n. Alors, $H_k(M;\mathbb{Z}) = 0$ pour tout entier k supérieur ou égal à n.

(b) Soit $n \geq 1$ un entier, et soit M' une variété topologique (sans bord) non compacte de dimension n. Alors, $H_k(M';\mathbb{Z}) = 0$ pour tout entier k supérieur ou égal à n.

(c) Toute variété topologique (sans bord) compacte de dimension strictement positive est non contractile.

(d) Soit E un groupe abélien libre de type fini. Alors, toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée impaire (c'est-à-dire, non paire) $b : E \times E \to \mathbb{Z}$ est unimodulaire.

(e) Soit $n \geq 1$ un entier, et soit N une variété topologique (sans bord) compacte de dimension n. Alors, le sous-groupe de torsion du groupe $H_{n-1}(N;\mathbb{Z})$ est trivial.

(f) Soit $n \geq 1$ un entier, et soit W une variété topologique (sans bord) connexe de dimension n. Alors, pour tout point $x_0 \in W$, le groupe fondamental $\pi_1(W, x_0)$ de W est isomorphe à $H_1(W;\mathbb{Z})$.

Exercice 2 (a) Soit $m \geq 2$ un entier, et soit M une variété topologique (sans bord) orientable de dimension m. Montrer que, pour tout point $x \in M$, l'espace topologique $M \setminus \{x\}$ est une variété topologique de dimension m et cette variété topologique est orientable.

(b) Soit $n \geq 1$ un entier, et soit N une variété topologique (sans bord) compacte orientable, de dimension n, munie d'une orientation $\{x \mapsto \mu_x\}_{x \in N}$ (ici, μ_x est un générateur du groupe $H_n(N, N \setminus \{x\};\mathbb{Z})$). Justifier le fait qu'il existe une unique classe $[N] \in H_n(N;\mathbb{Z})$ telle que, pour tout point $x \in N$, l'image de $[N]$ par le morphisme $H_n(N;\mathbb{Z}) \to H_n(N, N \setminus \{x\};\mathbb{Z})$, provenant de la suite exacte homologique de la paire topologique $(N, N \setminus \{x\})$, soit μ_x.

(c) Soit $f : N \to N$ un homéomorphisme. Montrer que la famille $\{f(x) \mapsto (f_x)_*(\mu_x)\}_{x \in N}$ est aussi une orientation de N (ici, le morphisme $(f_x)_* : H_n(N, N \setminus \{x\};\mathbb{Z}) \to H_n(N, N \setminus \{f(x)\};\mathbb{Z})$ est induit par l'application $f_x : (N, N \setminus \{x\}) \to (N, N \setminus \{f(x)\})$ fournie par f).

(d) On dit que f *préserve l'orientation* si les ensembles $\{\mu_x\}_{x \in N}$ et $\{(f_x)_*(\mu_x)\}_{x \in N}$ coïncident. Montrer que f préserve l'orientation si et seulement si $f_*([N]) = [N]$, où $f_* : H_n(N;\mathbb{Z}) \to H_n(N;\mathbb{Z})$ est le morphisme induit par f.

(e) Supposons que N soit connexe et que f ne préserve pas l'orientation. Montrer que les ensembles $\{-\mu_x\}_{x \in N}$ et $\{(f_x)_*(\mu_x)\}_{x \in N}$ coïncident.

(f) Supposons en plus que N soit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et que f soit un difféomorphisme tel que $f \circ f$ coïncide avec l'identité de N (on voit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ maintenant comme variété lisse). Déterminer les valeurs possibles du nombre de composantes connexes de l'ensemble des points fixes $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in N \mid f(x) = x\}$ de f. (On peut admettre que $\mathrm{Fix}(f)$ est homéomorphe à une réunion disjointe d'un certain nombre de cercles.)

TSVP

Exercice 3 (a) Soit W une variété topologique (sans bord) compacte et simplement connexe de dimension 3. Déterminer les groupes d'homologie à coefficients entiers de W et les groupes de cohomologie à coefficients entiers de W.

(b) Soit M une variété topologique (sans bord) connexe compacte orientable de dimension 3. On admet que les groupes d'homologie à coefficients entiers de M sont de type fini, et on écrit

$$H_1(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^r \oplus G,$$

où $r \geq 0$ est un entier et G est un groupe fini. Déterminer les groupes d'homologie à coefficients entiers et les groupes de cohomologie à coefficients entiers de M en fonction de r et G.

(c) Soit N une variété topologique (sans bord) connexe compacte non orientable de dimension 3. On admet que les groupes d'homologie à coefficients entiers de N sont de type fini, et on écrit

$$H_1(N, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^s \oplus H,$$

où $s \geq 0$ est un entier et H est un groupe fini. Déterminer les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et les groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de N en fonction de s et H.

(d) Montrer que le groupe $H_2(N; \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{s-1} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Exercice 4 Soient n et m deux entiers strictement positifs. Montrer que le bouquet $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m$ de la sphère de dimension n et de la sphère de dimension m n'est pas homotopiquement équivalent à une variété topologique (sans bord) compacte.

Exercice 5 Trouver tous les entiers strictement positifs n vérifiant la propriété suivante : il existe une variété topologique (sans bord) M telle qu'elle soit connexe compacte orientable de dimension $2n$ et le groupe $H_n(M; \mathbb{Z})$ soit isomorphe à $\mathbb{Z}$.