Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2025 - 2026
Cours UM4MA201

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

Examen

Jeudi 8 janvier 2026

Durée 2 heures

Téléphones portables sont interdits.
L'usage du polycopié du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Dans tous les exercices, les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux.

(a) Pour trois points deux à deux distincts d'un espace projectif de dimension 3, il existe toujours un plan qui contient ces points.
(b) Pour trois points deux à deux distincts d'un espace projectif de dimension 3, il existe toujours un unique plan qui contient ces points.
(c) Pour deux points distincts A et B d'une droite projective $\mathbf{D}$, il existe toujours un point $C \in \mathbf{D}$ tel que les points A, B et C forment un repère projectif de $\mathbf{D}$.
(d) Soit $\mathbf{P}$ un plan projectif, et soient A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4 des points de $\mathbf{P}$ deux à deux distincts ; alors, il existe une transformation projective $\Phi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ telle que $\Phi(A_i) = B_i$ pour tout entier $1 \leq i \leq 4$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Considérons une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, et notons $\overrightarrow{\varphi}$ son application linéaire associée.

(a) Supposons que $\overrightarrow{\varphi} : E \to E$ soit surjective. Montrer que φ est bijective.
(b) Supposons en plus que l'application $\overrightarrow{\varphi}$ soit différente de l'identité de E et que $\overrightarrow{\varphi} \circ \overrightarrow{\varphi}$ soit l'identité de E. Peut-on affirmer que $\varphi \circ \varphi$ est l'identité de $\mathcal{E}$?

Exercice 3

Soit $\mathbb{K}$ un corps, et soit $\mathbf{P} = \mathbb{P}(E)$ un espace projectif de dimension 3 sur $\mathbb{K}$ (ici E est un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{K}$). Soient $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ deux droites disjointes de $\mathbf{P}$. Considérons l'espace dual $\mathbb{P}(E^*)$ de $\mathbf{P}$ et notons $\mathbf{D}^* \subset \mathbb{P}(E^*)$ le sous-ensemble formé des points correspondant aux plans $\mathbf{H}$ de $\mathbf{P}$ tels que $\mathbf{D} \subset \mathbf{H}$.

(a) Justifier le fait que $\mathbf{D}^* \subset \mathbb{P}(E^*)$ est une droite projective.
(b) Montrer que, pour tout plan $\mathbf{H}$ de $\mathbf{P}$ tel que $\mathbf{D} \subset \mathbf{H}$, l'intersection $\mathbf{H} \cap \mathbf{D}'$ est formée d'un point.
(c) On définit l'application $\varphi : \mathbf{D}^* \to \mathbf{D}'$ en associant, à tout plan $\mathbf{H}$ de $\mathbf{P}$ tel que $\mathbf{D} \subset \mathbf{H}$, le point d'intersection de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{D}'$. Montrer que φ est une homographie.

Exercice 4

On considère un plan projectif $\mathbb{P}(E)$, où E est un espace vectoriel réel de dimension 3. On dispose d'une règle qui permet de tracer, pour deux points distincts donnés de $\mathbb{P}(E)$, la droite qui passe par ces deux points. Soient A, B, C et D quatre points qui forment un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$.

(a) Montrer qu'il existe une unique homographie $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ telle que

$$\varphi(A) = A, \quad \varphi(B) = B, \quad \varphi(C) = D, \quad \varphi(D) = C.$$

(b) Construire à la règle un point E de la droite (AB), distinct de A et B, tel que $\varphi(E) = E$.

(c) En déduire que tout point de la droite (AB) est un point fixe de φ.

(d) On note M le point d'intersection des droites (AD) et (BC), et on note N le point d'intersection des droites (AC) et (BD). Justifier le fait que les points M et N sont distincts.

(e) On note Δ la droite passant par les points M et N. Justifier le fait que la droite Δ ne coïncide pas avec la droite (CD).

(f) On note O le point d'intersection des droites Δ et (CD). Montrer que O est un point fixe de φ.

(g) On note π_A la perspective projective de centre A de la droite (CD) sur la droite Δ (c'est-à-dire, la restriction sur la droite (CD) de la projection de centre A sur Δ), et on note π_B la perspective projective de centre B de la droite (CD) sur la droite Δ. Montrer que $\pi_B^{-1} \circ \pi_A$ coïncide avec l'application $\varphi' : (CD) \to (CD)$ induite par φ sur la droite (CD).

(h) Soit P un point de $\mathbb{P}(E)$ hors de la droite (AB). Construire à la règle le point $\varphi(P)$. (On pourra traiter d'abord le cas $P \in (CD)$, puis le cas général.)

(i) On identifie $P(E)$ à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ à l'aide du repère projectif (A, B, C, D) : le point A est identifié à $(1 : 0 : 0)$, le point B est identifié à $(0 : 1 : 0)$, le point C est identifié à $(0 : 0 : 1)$, et le point D est identifié à $(1 : 1 : 1)$. Écrire la matrice d'un automorphisme linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi = \mathbb{P}(f)$.

(j) Déterminer l'ensemble $\mathrm{Fix}(\varphi)$ des points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ fixés par φ.

(k) Soit Q un point de $\mathbb{P}^2(K)$ hors $\mathrm{Fix}(\varphi) \cup (CD)$. On note Q' l'image $\varphi(Q)$ de Q par φ. Justifier le fait que la droite (QQ') ne coïncide ni avec la droite (CD), ni avec la droite (AB).

(l) Montrer que le point d'intersection des droites (QQ') et (CD) coïncide avec O.

(m) On note R le point d'intersection des droites (QQ') et (AB). Calculer la birapport $[Q, Q', R, O]$ des points Q, Q', R et O de la droite (QQ').