Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2021 - 2022

Topologie algébrique des variétés I

Examen

Mercredi 5 janvier 2022

Durée : 3 heures

L'usage des notes du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Exercice 1 Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux (les réponses doivent être justifiées).

(a) Considérons un revêtement $p : M_1 \to M_2$ tel que M_2 soit une variété topologique ; alors M_1 est aussi une variété topologique.

(b) Le bord d'une variété topologique (à bord) connexe est connexe.

(c) Le bord d'une variété topologique (à bord) compacte est compact.

(d) Une variété topologique (à bord) dont le bord est connexe est aussi connexe.

(e) Une variété topologique (à bord) dont le bord est compact est aussi compacte.

(f) Soit N une variété topologique (sans bord) de dimension n, où $n \geq 1$ est un entier, telle que $H_n(N;\mathbb{Z}) = 0$; alors la variété N n'est pas compacte.

(g) Soit N' une variété topologique (sans bord) de dimension n, où $n \geq 1$ est un entier, telle que $H_n(N';\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$; alors la variété N' n'est pas compacte.

Exercice 2 Soit $n \geq 1$ un entier, et soit M une variété topologique de dimension n telle que M admette un *bon recouvrement fini*, c'est-à-dire, un recouvrement fini d'ouverts dont toute intersection est soit vide soit homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que tous les groupes d'homologie $H_k(M;\mathbb{Z})$, $k \geq 0$, sont de type fini.

(b) Donner un exemple d'un bon recouvrement fini du tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, où $\mathbb{S}^1$ est le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$.

(c) Donner un exemple d'une variété topologique (sans bord) connexe qui n'admet pas de bon recouvrement fini.

Exercice 3 Soit $n \geq 1$ un entier. On dit qu'une variété topologique M de dimension n est une *sphère d'homologie entière* (respectivement, *sphère d'homologie rationnelle*) si $H_k(M;\mathbb{Z}) \simeq H_k(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z})$ (respectivement, $H_k(M;\mathbb{Q}) \simeq H_k(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q})$) pour tout entier $k \geq 0$, où $\mathbb{S}^n$ est la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

(a) Montrer que toute sphère d'homologie entière est connexe, compacte et orientable.

(b) Montrer que toute sphère d'homologie entière est une sphère d'homologie rationnelle.

(c) Donner un exemple d'une sphère d'homologie rationnelle qui n'est pas une sphère d'homologie entière.

(d) Soit N une variété topologique (sans bord), connexe, compacte et orientable de dimension n. Supposons qu'il existe une application continue $f : \mathbb{S}^n \to N$ qui induit un morphisme non nul $f_* : H_n(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \to H_n(N;\mathbb{Z})$. Montrer que N est une sphère d'homologie rationnelle.

(e) Supposons, en plus, que $f_* : H_n(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \to H_n(N;\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Montrer que N est une sphère d'homologie entière.

Exercice 4 Soit $k \geq 0$ un entier, et soit M une variété topologique compacte orientable (sans bord) de dimension $4k+2$. On admet que M a une structure de CW-complexe fini. Montrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ de M est paire.

TSVP

Exercice 5 Soit $p \geq 2$ un entier, et soit $q \geq 1$ un entier premier avec p. On pose $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{p})$. On identifie la sphère $\mathbb{S}^3$ avec l'ensemble

$$\{(u,v) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |u|^2 + |v|^2 = 1\},$$

et on considère l'application $F_q : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ définie par $F_q(u,v) = (\omega u, \omega^q v)$. L'application F_q engendre une action ρ_q du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}^3$. L'espace $L = L(p,q)$ des orbites de l'action ρ_q s'appelle *espace lenticulaire* (de type (p,q)).

(a) Montrer que L est une variété topologique (sans bord) de dimension 3, connexe, compacte et orientable.

(b) Calculer les groupes d'homologie

$$H_0(L;\mathbb{Z}), \quad H_1(L;\mathbb{Z}), \quad H_2(L;\mathbb{Z}), \quad H_3(L;\mathbb{Z}).$$

(c) Calculer les groupes de cohomologie

$$H^0(L;\mathbb{Z}), \quad H^1(L;\mathbb{Z}), \quad H^2(L;\mathbb{Z}), \quad H^3(L;\mathbb{Z}).$$

(d) Montrer que, pour tout entier $0 \leq k \leq 3$, les groupes $H_k(L;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $H^k(L;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(e) Justifier le fait que la suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$$

produit une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{C}^\bullet(L;\mathbb{Z}) \to \mathcal{C}^\bullet(L;\mathbb{Z}) \to \mathcal{C}^\bullet(L;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to 0$$

de complexes de cochaînes singulières (de L à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$), et, par conséquent, une suite exacte longue

$$(*) \quad ... \to H^1(L;\mathbb{Z}) \to H^1(L;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^2(L;\mathbb{Z}) \to H^2(L;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H^2(L;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to ... \quad .$$

(f) Montrer que les morphismes α et β de la suite exacte (*) sont des isomorphismes.

(g) On pose $\gamma = \beta \circ \alpha$. Soit $a \in H^1(L,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ un générateur. Montrer que $a \smile \gamma(a) \in H^3(L;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un générateur.

(h) Soit $\ell \in H_3(L,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ l'image d'une classe fondamentale $[L] \in H_3(L;\mathbb{Z})$ de L par le morphisme $H_3(L,\mathbb{Z}) \to H_3(L,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de l'analogue homologique de la suite exacte (*). Montrer que l'élément $(a \smile \gamma(a))(\ell) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un générateur.

(i) Introduisons une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: deux éléments $i, j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont déclarés équivalents s'il existe un entier n, premier avec p, tel que $i = \pm n^2 j$. On note τ_q la classe d'équivalence de $(a \smile \gamma(a))(\ell) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par rapport à la relation d'équivalence $\sim$. Montrer que τ_q ne dépend ni du choix d'un générateur $a \in H^1(L,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, ni du choix d'une classe fondamentale $[L] \in H_3(L;\mathbb{Z})$. De façon similaire, pour tout entier $q' \geq 1$ premier avec p, on définit l'invariant $\tau_{q'}$ de l'espace lenticulaire $L(p,q')$.

(j) Montrer que τ_q coïncide avec $q\tau_1$, c'est-à-dire, avec l'ensemble formé des éléments de τ_1 multipliés par q.

(k) Soit $q' \geq 1$ un entier premier avec p tel que les espaces lenticulaires $L(p,q)$ et $L(p,q')$ soient homotopiquement équivalents. Montrer qu'il existe un entier n tel que $qq' \equiv \pm n^2 \pmod{p}$.

(l) Trouver deux variétés topologiques (sans bord) connexes, compactes et orientables M et M' de dimension 3 telles que

— les groupes fondamentaux de M et M' soient isomorphes ;

— pour tout entier $k \geq 0$, les groupes $H_k(M;\mathbb{Z})$ et $H_k(M',\mathbb{Z})$ soient isomorphes ;

— et les variétés M et M' ne soient pas homotopiquement équivalentes.