Topologie algébrique

Examen

Vendredi 10 juin 2016

Durée 3 heures

L'usage des notes du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Exercice 1

Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux.

(a) Tout revêtement est un homéomorphisme local.
(b) Tout homéomorphisme local est un revêtement.
(c) Toute application continue $\mathbb{R}P^2 \to S^1$ est homotope à une application constante.
(d) Toute application continue $S^1 \times S^1 \to S^1$ est homotope à une application constante.
(e) Le groupe $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}; \mathbb{Z})$ est abélien libre.
(f) Soit X un espace topologique connexe par arcs ; si X est simplement connexe, alors $H_1(X) = 0$.
(g) Soit Y un espace topologique connexe par arcs ; si $H_1(Y) = 0$, alors Y est simplement connexe.
(h) Si $p : E \to B$ est un revêtement, alors le morphisme induit $p_* : H_1(E) \to H_1(B)$ est injectif.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et soit $A \subset \mathbb{R}^2$ le sous-ensemble formé des points $(1, 0)$, …, $(n, 0)$.

(a) Utiliser la suite exacte longue homologique associée à la paire $(\mathbb{R}^2, A)$ pour montrer que le groupe d'homologie relative $H_1(\mathbb{R}^2, A)$ est canoniquement isomorphe au noyau de l'application $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ qui envoie tout n-uplet d'entiers sur leur somme.
(b) En déduire que $H_1(\mathbb{R}^2, A)$ est un groupe abélien libre de rang $n - 1$ et en exhiber une base.
(c) Montrer que l'espace quotient $\mathbb{R}^2/A$ a le type d'homotopie d'un bouquet de $n - 1$ cercles.
(d) Montrer que les chemins $\gamma_k : t \mapsto k + t$, où $t \in [0, 1]$ et k parcourt les entiers de 1 à $n - 1$, fournissent un ensemble générateur dans le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2/A$ basé en A/A.
(e) En déduire que ces chemins fournissent une base de $H_1(\mathbb{R}^2, A)$.

Exercice 3

Soit $n \geq 1$ un entier. On note S^n la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un hyperplan vectoriel, et soit $s_H : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ la symétrie orthogonale par rapport à H.

(a) Montrer que la symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ induit $-\mathrm{Id}$ sur $H_1(S^1)$.
(b) Montrer que la symétrie orthogonale s_H induit $-\mathrm{Id}$ sur $H_n(S^n)$ (on pourra raisonner par récurrence).
(c) Soit $f : S^n \to S^n$ une application continue sans point fixe. Montrer qu'elle induit $(-\mathrm{Id})^{n+1}$ sur $H_n(S^n)$.

TSVP

(d) Considérons une application continue $g : S^{2n} \to S^{2n}$ qui n'admet pas de point fixe. Montrer qu'il existe un point $x \in S^{2n}$ tel que $g(x) = -x$.
(e) En déduire que toute application continue $h : \mathbb{R}P^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ admet un point fixe.
(f) Construire une application continue $\mathbb{R}P^{2n-1} \to \mathbb{R}P^{2n-1}$ sans point fixe (on pourra utiliser une application linéaire $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ choisie de façon appropriée.)

Exercice 4

Soit $g \geq 0$ un nombre entier. Une surface topologique s'appelle *sphère avec g anses* (respectivement, *sphère avec g rubans de Möbius*) si elle est homéomorphe à la somme connexe de g copies du tore $S^1 \times S^1$ (respectivement, à la somme connexe de g copies du plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$).

(a) Munir une sphère avec g anses d'une structure d'espace cellulaire.
(b) Munir une sphère avec g rubans de Möbius d'une structure d'espace cellulaire.
(c) Munir une sphère avec g anses d'une structure de complexe simplicial.
(d) Munir une sphère avec g rubans de Möbius d'une structure de complexe simplical.
(e) Calculer les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'une sphère avec g anses.
(f) Calculer les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'une sphère avec g rubans de Möbius.
(g) Soit $p : E \to B$ un revêtement à deux feuillets tel que E soit homéomorphe à une sphère avec n anses et B soit homéomorphe à une sphère avec k rubans de Möbius. Trouver le nombre k comme fonction de n.

Exercice 5

Pour deux espaces topologiques quelconques X et Z, on note $\mathcal{C}(Z, X)$ l'ensemble des applications continues $Z \to X$, et on note $\pi(Z, X)$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications appartenant à $\mathcal{C}(Z, X)$.

(a) Soit $g : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques X et Y, et soit Z un espace topologique. Montrer que l'application $\mathcal{C}(Z, X) \to \mathcal{C}(Z, Y)$ définie par $f \mapsto g \circ f$ induit une application $\pi(Z, X) \to \pi(Z, Y)$; on note $g_\bullet$ cette application.
(b) Soit $h : Z \to Z'$ une application continue entre deux espaces topologiques Z et Z', et soit X un espace topologique. Montrer que l'application $C(Z', X) \to C(Z, X)$ définie par $f \mapsto f \circ h$ induit une application $\pi(Z', X) \to \pi(Z, X)$; on note $h^\bullet$ cette application.
(c) Deux espaces topologiques X et Y sont dits *faiblement homotopiquement équivalents* si, pour tous les espaces cellulaires Z, on peut définir des bijections $\varphi_Z : \pi(Z, X) \to \pi(Z, Y)$ vérifiant la condition suivante : pour toute application continue $h : Z \to Z'$ entre deux espaces cellulaires Z et Z', on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi(Z', X) & \xrightarrow{\varphi_{Z'}} & \pi(Z', Y) \\ \downarrow{\scriptstyle h^\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle h^\bullet} \\ \pi(Z, X) & \xrightarrow{\varphi_Z} & \pi(Z, Y) \end{array}$$

Montrer que deux espaces topologiques homotopiquement équivalents sont toujours faiblement homotopiquement équivalents.
(d) Soient X' et Y' deux espaces cellulaires. Montrer que X' et Y' sont homotopiquement équivalents si et seulement si X' et Y' sont faiblement homotopiquement équivalents.
(e) Une application continue $g : X \to Y$ entre deux espaces topologiques X et Y est une *équivalence faible d'homotopie* si, pour tout espace cellulaire Z, l'application $g_\bullet : \pi(Z, X) \to \pi(Z, Y)$ est une bijection. Montrer que l'existence d'une équivalence

faible d'homotopie entre deux espaces topologiques X et Y implique que X et Y sont faiblement homotopiquement équivalents.

(f) Trouver deux espaces topologiques faiblement homotopiquement équivalents X et Y tels qu'il n'existe pas d'équivalence faible d'homotopie $g : X \to Y$.

(g)* Soit $g : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques X et Y. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
- g est une équivalence faible d'homotopie ;
- l'application induite $g_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est une bijection et, pour tout nombre entier $k \geq 1$ et pour tout point $x_0 \in X$, le morphisme induit $g_* : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, f(x_0))$ est un isomorphisme ;
- pour toute paire cellulaire (W, A) et toutes applications continues $h_1 : A \to X$ et $h_2 : W \to Y$ telles que $g \circ h_1$ soit homotope à $h_2|_A$, il existe une application continue $h : W \to X$ telle que $h|_A = h_1$ et $g \circ h$ soit homotope à h_2.

(h) Montrer le **théorème de Whitehead** : soient X' et Y' des espaces cellulaires ; si une application continue $g : X' \to Y'$ est telle que l'application induite $g_* : \pi_0(X') \to \pi_0(Y')$ soit une bijection et, pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout point $x_0 \in X'$, le morphisme induit $g_* : \pi_k(X', x_0) \to \pi_k(Y', f(x_0))$ soit un isomorphisme, alors g est une équivalence d'homotopie.

(i) Montrer que les espaces topologiques $S^3 \times \mathbb{R}P^2$ et $S^2 \times \mathbb{R}P^3$ ont les mêmes groupes d'homotopie respectifs. Peut-on affirmer que ces deux espaces topologiques ont le même type d'homotopie ?

(j) Soit X un espace topologique, et soit $\alpha \in H_k(X)$ une classe d'homologie. Montrer qu'il existe un espace cellulaire Y, une classe d'homologie $\beta \in H_k(Y)$ et une application continue $f : Y \to X$ tels que $f_*(\beta) = \alpha$.

(k) Soit (X, A) une paire topologique, et soit $\alpha \in H_k(X, A)$ une classe d'homologie relative. Montrer qu'il existe une paire cellulaire (Y, B), une classe $\beta \in H_k(Y, B)$ et une application continue $f : (Y, B) \to (X, A)$ telles que $f_*(\beta) = \alpha$.

(l) Soit $g : X_1 \to X_2$ une équivalence faible d'homotopie entre deux espaces topologiques X_1 et X_2. Montrer que le morphisme $H_k(X_1) \to H_k(X_2)$ induit par g est un isomorphisme pour tout entier $k \geq 0$.

(m) En déduire l'énoncé suivant : soit $g : X_1' \to X_2'$ une application continue entre deux espaces topologiques X_1' et X_2' telle que l'application induite $g_* : \pi_0(X_1') \to \pi_0(X_2')$ soit une bijection et, pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout point $x_0 \in X_1'$, le morphisme induit $g_* : \pi_k(X_1', x_0) \to \pi_k(X_2', f(x_0))$ soit un isomorphisme ; alors, pour tout entier $k \geq 0$, le morphisme $H_k(X_1') \to H_k(X_2')$ induit par g est un isomorphisme.