Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2017 - 2018
Cours 4M059

TOPOLOGIE ALGEBRIQUE

Examen

Jeudi 1 mars 2018

Durée 3 heures

Téléphones portables et calculatrices sont interdits.
L'usage du polycopié du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Pour tout entier $n \geq 1$, on munit l'espace $\mathbb{R}^n$ de la topologie euclidienne, et on pose

$$D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\},$$
$$S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}.$$

Exercice 1

(a) Soit X un espace topologique non vide, et soit Y un espace topologique non vide et contractile. Montrer que toute application continue $f : X \to Y$ est homotope à une application constante.
(b) Montrer que toute application continue $g : Y \to X$ est homotope à une application constante.
(c) Soit $n \geq 1$ un entier, et soit $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ l'application définie par $t \mapsto \exp(2\pi i t)$. Montrer que, pour toute application continue $h : D^n \to S^1$, il existe une application continue $\widetilde{h} : D^n \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{Exp} \circ \widetilde{h} = h$.
(d) L'énoncé (c) reste-t-il vrai si on remplace D^n par la sphère S^n et si on suppose que l'entier n est supérieur ou égal à 2 ?
(e) L'énoncé (c) reste-t-il vrai si on remplace D^n par le cercle S^1 ?

Exercice 2

(a) Soit $f : S^1 \to S^1$ une application continue, et soit $x \in S^1$ un point. Justifier l'existence et l'unicité d'un nombre entier n_x tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, x) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(S^1, f(x)) \\ \downarrow{\scriptstyle d_x} & & \downarrow{\scriptstyle d_{f(x)}} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times n_x} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Ici, $\times n_x : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est la multiplication par n_x et $d_x : \pi_1(S^1, x) \to \mathbb{Z}$ (respectivement, $d_{f(x)} : \pi_1(S^1, f(x)) \to \mathbb{Z}$) est l'application qui à tout élément du groupe $\pi_1(S^1, x)$ (respectivement, $\pi_1(S^1, f(x))$) associe le degré de cet élément.

TSVP

(b) Soit $y \in S^1$ un point. Montrer que, pour tout chemin $\gamma : [0;1] \to S^1$ tel que $\gamma(0) = y$ et $\gamma(1) = x$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, x) & \xrightarrow{\varphi_\gamma} & \pi_1(S^1, y) \\ & {\scriptstyle d_x}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle d_y} & \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

où $\varphi_\gamma : \pi_1(S^1, x) \to \pi_1(S^1, y)$ est l'isomorphisme de changement de point de base le long du chemin γ.

(c) Montrer que le nombre n_x ne dépend pas du choix de point $x \in S^1$. Le nombre n_x s'appelle le *degré* de l'application f, et on le note $deg(f)$.

(d) Soit $f' : S^1 \to S^1$ une application continue. Montrer que $deg(f \circ f') = deg(f) \cdot deg(f')$.

(e) Soient $g_1 : S^1 \to S^1$ et $g_2 : S^1 \to S^1$ des applications continues. Montrer que les applications g_1 et g_2 sont homotopes si et seulement si elles ont le même degré.

(f) Montrer l'énoncé suivant : si $deg(f) \neq 0$, alors f est surjective. L'affirmation réciproque est-elle vraie ?

(g) Montrer l'énoncé suivant : si f est injective, alors $|deg(f)| = 1$. L'affirmation réciproque est-elle vraie ?

(h) Donner un exemple d'une application continue $D^2 \to S^1$. Une telle application peut-elle être surjective ? Peut-elle être une rétraction ?

(i) Soit $h : D^2 \to S^1$ une application continue. Considérons la restriction $h|_{S^1} : S^1 \to S^1$ de h à S^1. Quelles sont les valeurs possibles de $deg(h|_{S^1})$?

Exercice 3

Soit $\mathcal{A}$ une collection finie de copies de l'intervalle $[0;1]$. On appelle *graphe fini* un espace topologique Γ obtenu comme quotient de la réunion disjointe des intervalles de $\mathcal{A}$ en identifiant certaines extrémités. On appelle *arête* de Γ chaque élément de la collection $\mathcal{A}$. Toute arête a deux extrémités dont les images par la projection canonique peuvent être confondues dans Γ. Les éléments de l'ensemble $\mathcal{S} \subset \Gamma$ formé par les images des extrémités des intervalles de $\mathcal{A}$ sont appelés les *sommets* de Γ.

(a) Soit Γ un graphe fini, et soit a une arête de Γ. On suppose que les images des extrémités de a sont distinctes dans Γ. Soit Γ' l'espace quotient obtenu à partir de Γ en identifiant tous les points de l'image de a. Montrer que Γ et Γ' sont homotopiquement équivalents.

(b) Montrer que tout graphe fini connexe Γ contient un sous-ensemble contractile M tel que tout sommet de Γ appartienne à M.

(c) Soit Γ un graphe fini connexe. La *caractéristique d'Euler-Poincaré* $\chi(\Gamma)$ de Γ est l'entier $\chi(\Gamma) = \#S - \#A$, où $\#S$ est le nombre de sommets de Γ et $\#A$ est le nombre d'arêtes de Γ. Montrer que Γ est homotopiquement équivalent au bouquet de $1 - \chi(\Gamma)$ cercles.

(d) Montrer que tout revêtement à fibres finies d'un graphe fini admet une structure d'un graphe fini.

(e) Soit $n, k \geq 1$ des entiers, L un groupe libre à n générateurs, et H un sous-groupe d'indice k de L. Montrer que H est un groupe libre, dont on donnera le nombre de générateurs.

(f) Soit $m \geq 3$ un entier. Montrer qu'un groupe libre à 2 générateurs admet un sous-groupe isomorphe à un groupe libre à m générateurs.