Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2018 - 2019

Introduction à la géométrie algébrique

Exercices, feuille 2

Exercice 1 Dans cet exercice, on fixe un entier $n \geq 1$ et on considére les idéaux de $\mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$. Pour tout entier $d \geq 0$, on considère le sous-groupe $R_d \subset \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ formé par les polynômes homogènes de degré d.

(a) Montrer qu'un idéal $I \subset \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ est homogène si et seulement si

$$I = \oplus_{d \geq 0}(I \cap R_d).$$

(b) Montrer que la somme, le produit et l'intersection de deux idéaux homogènes sont des idéaux homogènes.

(c) Montrer que le radical d'un idéal homogène est un idéal homogène.

(d) Soit $J \subset \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ un idéal homogène qui vérifie la propriété suivante : pour deux polynômes homogènes quelconques $F, G \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n] \setminus J$, on a $FG \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n] \setminus J$. Montrer que l'idéal J est premier.

Exercice 2 Topologie de Zariski de $\mathbb{P}^n$.

(a) Montrer que $\varnothing$ et $\mathbb{P}^n$ sont des ensembles algébriques dans $\mathbb{P}^n$.

(b) Montrer que toute réunion finie d'ensembles algébriques dans $\mathbb{P}^n$ est un ensemble algébrique.

(c) Montrer que toute intersection d'ensembles algébriques dans $\mathbb{P}^n$ est un ensemble algébrique.

Exercice 3 Soit $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq n$ des entiers. On note A_i la carte affine de $\mathbb{P}^n$ définie par $x_i \neq 0$. On considère la bijection $\psi_i : A_i \to \mathbb{A}^n$ définie par

$$\psi_i : (x_0 : \ldots : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \ldots : x_n) \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}).$$

Montrer que ψ_i est un homéomorphisme (A_i et $\mathbb{A}^n$ sont munis de la topologie de Zariski).

Exercice 4 Soient $n \geq 2$ et $d \geq 1$ des nombres entiers. Une *hypersurface de degré d* dans $\mathbb{P}^n$ est un sous-ensemble $X \subset \mathbb{P}^n$ qui peut être défini par un polynôme homogène $F \in \mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]$ de degré d.

(a) Montrer que tout ensemble de d points dans $\mathbb{P}^n$ est intersection d'hypersurfaces de degré d.

(b) Montrer que d points alignés dans $\mathbb{P}^n$ ne peuvent pas être décrits comme intersection d'hypersurfaces de degré strictement inférieur à d.

(c) Montrer que tout ensemble de d points dans $\mathbb{P}^n$, non tous alignés, est intersection d'hypersurfaces de degré $d - 1$.

Exercice 5 On considère l'application $\nu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ définie par

$$(x_0 : x_1) \mapsto (x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3) = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3),$$

en on note C la *cubique tordue* (on l'appelle aussi *cubique gauche*) qui est l'image $\nu(\mathbb{P}^1)$ de $\mathbb{P}^1$ par l'application ν. On pose

$$F_0(z_0, z_1, z_2, z_3) = z_0 z_2 - z_1^2,\ F_1(z_0, z_1, z_2, z_3) = z_0 z_3 - z_1 z_2,\ F_2(z_0, z_1, z_2, z_3) = z_1 z_3 - z_2^2,$$

et on considère les quadriques $Q_0 = \mathcal{Z}(F_0)$, $Q_1 = \mathcal{Z}(F_1)$ et $Q_2 = \mathcal{Z}(F_2)$ dans $\mathbb{P}^3$ (pour tout entier $n \geq 1$, une *quadrique* dans $\mathbb{P}^n$ est un sous-ensemble $X \subset \mathbb{P}^n$ qui peut être défini par un polynôme homogène $F \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ de degré 2).

(a) Montrer que C est l'intersection de Q_0, Q_1 et Q_2.

(b) Montrer que l'intersection de deux quadriques quelconques parmi Q_0, Q_1 et Q_2 peut être représentée comme réunion de C et d'une droite.

(c) Plus généralement, pour tout point $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2) \in \mathbb{P}^2$, on pose $F_\lambda = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$, et on considère la quadrique $Q_\lambda = \mathcal{Z}(F_\lambda)$. Montrer que, pour deux points distincts quelconques λ et μ de $\mathbb{P}^2$, l'intersection des quadriques Q_λ et Q_μ peut être représentée comme réunion de C et d'une droite.

(d) Montrer que, inversement, pour toute droite $L \subset \mathbb{P}^3$ qui coupe C en deux points, il existe deux points distincts λ et μ de $\mathbb{P}^2$ tels que l'intersection des quadriques Q_λ et Q_μ soit la réunion $C \cup L$.

(e) Soit m un entier strictement positif. On dit que les points d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{P}^m$ sont *linéairement indépendants* si les droites de $\mathbb{K}^{m+1}$ qu'ils représentent sont en somme directe. On dit que les points d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{P}^m$ sont *en position générale* si k quelconques d'entre eux sont linéairement indépendants pour tout entier strictement positif $k \leq m+1$. Montrer que tout ensemble d'au plus $2m$ points en position générale dans $\mathbb{P}^m$ peut être représenté comme intersection de quadriques.

(f) Montrer que les points d'un sous-ensemble fini quelconque de C sont en position générale dans $\mathbb{P}^3$.

(g) Considérons 7 points deux à deux distincts de C. Montrer que C est l'intersection de toutes les quadriques dans $\mathbb{P}^3$ qui contiennent ces 7 points. En particulier, l'ensemble formé par ces 7 points ne peut pas être représenté comme intersection de quadriques dans $\mathbb{P}^3$.

(h) Une *cubique tordue généralisée* est l'image $\tilde{\nu}(\mathbb{P}^1)$ de $\mathbb{P}^1$ par l'application $\tilde{\nu} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ définie par

$$(x_0 : x_1) \mapsto (P_0(x_0, x_1) : P_1(x_0, x_1) : P_2(x_0, x_1) : P_3(x_0, x_1)),$$

où P_0, P_1, P_2 et P_3 forment une base de l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré 3 à deux variables. Montrer que toute cubique tordue généralisée est l'image de la cubique tordue C par une transformation projective de $\mathbb{P}^3$ (c'est-à-dire, par une application $\mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ induite par un automorphisme linéaire de $\mathbb{K}^4$).

(i) Considérons 6 points en position générale dans $\mathbb{P}^3$. Montrer qu'il existe une unique cubique tordue généralisée qui contient ces 6 points.