Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2025 - 2026

Aspects tropicaux de la géométrie énumérative

Exercices, feuille 1

Exercice 1 Espace des courbes
Soit $d \geq 1$ un entier. On note $\mathcal{C}_d$ l'espace des courbes de degré d dans $\mathbb{C}P^2$, et on note $\Delta_d \subset \mathcal{C}_d$ le sous-ensemble constitué des points qui correspondent aux courbes singulières. Rappelons que $\mathcal{C}_d$ peut être identifié avec un certain espace projectif $\mathbb{C}P^N$. Le but principal de cet exercice est de montrer que Δ_d est une hypersurface algébrique dans $\mathcal{C}_d$, et de caractériser les points non singuliers de Δ_d. Pour cela nous utiliserons l'ensemble intermédiaire

$$\tilde{\Delta}_d = \{(C, p) \in \mathcal{C}_d \times \mathbb{C}P^2 \mid p \text{ est un point singulier de } C\} \subset \mathcal{C}_d \times \mathbb{C}P^2.$$

On a clairement $\Delta_d = \pi(\tilde{\Delta}_d)$, où $\pi_{\mathcal{C}_d} : \tilde{\Delta}_d \to \mathcal{C}_d$ est la projection naturelle.

(a) Quelle est la dimension de l'espace $\mathcal{C}_d$? Montrer que, par $d(d+3)/2$ points arbitraires dans $\mathbb{C}P^2$, on peut toujours tracer une courbe de degré d. De plus, si les points sont choisis génériquement, une telle courbe est unique et non singulière.

(b) Montrer que $\tilde{\Delta}_d$ est une sous-variété algébrique de $\mathcal{C}_d \times \mathbb{C}P^2$.

(c) Montrer que la sous-variété $\tilde{\Delta}_d$ est non singulière, et que π est un biholomorphisme local sur son image en (C, p) si et seulement si p est un point double non dégénéré de C.
Indication : on pourra se ramener au cas où $p = [0 : 0 : 1]$, et faire un calcul explicite.

(d) En déduire qu'une courbe C de degré d dans $\mathbb{C}P^2$ correspond à un point non singulier de Δ_d si et seulement si C admet un unique point singulier et ce dernier est un point double non dégénéré. Déterminer dans ce cas l'espace tangent à Δ_d en C.

(e) Faire l'étude analogue de l'espace $\mathbb{R}\mathcal{C}_d$ des courbes de degré d dans $\mathbb{R}P^2$.

(f) Montrer que, par $d(d+3)/2-1$ points arbitraires dans $\mathbb{C}P^2$, on peut toujours tracer un pinceau de courbes de degré d. De plus, si les points sont choisis génériquement, un tel pinceau est unique et la droite correspondante L dans $\mathcal{C}_d$ vérifie la propriété suivante : L coupe Δ_d seulement en points lisses de Δ_d et tous les points d'intersection sont transverses.

(g) Montrer qu'il existe une collection de $d(d+3)/2 - 1$ points dans $\mathbb{R}P^2$ telle que
— par les points de la collection, on peut tracer un unique pinceau de courbes de degré d ;
— la droite correspondante L dans $\mathcal{C}_d$ coupe Δ_d seulement en points lisses et transversalement ;
— deux courbes arbitraires distinctes du pinceau se coupent en d^2 points réels.

Exercice 2 Soit a et b deux nombres entiers positifs ou nuls. Une *courbe algébrique de bidegré* (a, b) dans $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ est un polynôme complexe $P(x_0, x_1, y_0, y_1)$ considéré à multiplication par une constante complexe non nulle près et tel que $P(x_0, x_1, y_0, y_1)$ soit homogène de degré a en x_0 et x_1, et $P(x_0, x_1, y_0, y_1)$ soit homogène de degré b en y_0 et y_1.

(a) Identifier l'espace des courbes de bidegré (a, b) dans $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ avec un espace projectif complexe, et montrer que la dimension de cet espace est égale à $ab + a + b$.

(b) Montrer que, par $ab + a + b$ points arbitraires dans $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, on peut toujours tracer une courbe de bidegré (a, b). De plus, si les points sont choisis génériquement, une telle courbe est unique et non singulière.

(c) Supposons que a et b soient strictement positifs. Soit C une courbe non singulière de bidegré (a, b) dans $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Trouver le genre de la surface de Riemann $\mathbb{C}C$.

Exercice 3 Soit d un entier strictement positif, et soit A une courbe non singulière de degré d dans $\mathbb{R}P^2$. On note ℓ le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}A$. Montrer que, pour tout entier $1 \leq m \leq \ell$, il existe une courbe non singulière B de degré d dans $\mathbb{R}P^2$ telle que le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}B$ soit égal à m.

Exercice 4

(a) Classifier (à homéomorphisme près) les paires topologiques $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}A)$, où A est une courbe non singulière de degré 4 dans $\mathbb{R}P^2$.

(b) Classifier (à homéomorphisme près) les paires topologiques $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}A)$, où A est une courbe non singulière de degré 5 dans $\mathbb{R}P^2$.

Exercice 5 Soit A une courbe non singulière de degré d dans $\mathbb{R}P^2$. On dit qu'une collection d'ovales de $\mathbb{R}A$ forme un *nid* si, pour deux ovales quelconques de cette collection, un de ces ovales entoure l'autre ovale. La *profondeur* d'un nid est le nombre d'ovales dans ce nid. Montrer les affirmations suivantes :

(a) la profondeur de tout nid de $\mathbb{R}A$ est inférieure ou égale à la partie entière $[d/2]$ de $d/2$;

(b) la somme des profondeurs de deux nids disjoints quelconques de $\mathbb{R}A$ est inférieure ou égale à $[d/2]$;

(c) la somme des profondeurs de cinq nids disjoints quelconques de $\mathbb{R}A$ est inférieure ou égale à d, à condition qu'aucun ovale de ces cinq nids n'entoure tous les autres ovales des nids.