Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2025 - 2026

Aspects tropicaux de la géométrie énumérative

Exercices, feuille 2

Exercice 1 Soit $d \geq 1$ un entier, et soit A une courbe non singulière de degré d dans $\mathbb{R}P^2$. Montrer que le nombre de composantes connexes de $\mathbb{C}A \setminus \mathbb{R}A$ est égal à 1 ou 2.

Exercice 2 Pour un carré $ABCD$, trouver une triangulation convexe τ_1 du triangle ABD et une triangulation convexe τ_2 du triangle BCD telles que τ_1 et τ_2 ensemble forment une triangulation non convexe de $ABCD$.

Exercice 3 En utilisant le patchwork combinatoire, construire pour tout entier strictement positif k

(a) une courbe non singulière de degré $2k$ dans $\mathbb{R}P^2$ telle que l'ensemble des points réels de la courbe soit vide ;

(b) une courbe non singulière de degré $2k - 1$ dans $\mathbb{R}P^2$ telle que l'ensemble des points réels de la courbe soit connexe.

Exercice 4 Soit d un nombre entier strictement positif, et soit $T_d \subset \mathbb{R}^2$ le triangle à sommets $(0, 0)$, $(d, 0)$ et $(0, d)$. Tout point entier de T_d est équipé de signe "+". Trouver une triangulation primitive convexe de T_d telle que le patchwork combinatoire produise, à partir de cette triangulation et la distribution de signes fixée, une courbe maximale de degré d dans $\mathbb{R}P^2$.

Exercice 5 À l'aide du patchwork combinatoire, construire des courbes de Hilbert et Gudkov de degré 6 dans $\mathbb{R}P^2$.

Exercice 6 En utilisant le patchwork combinatoire, construire

(a) une surface non singulière de degré 2 dans $\mathbb{R}P^3$ telle que la partie réelle de la surface soit homéomorphe à $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$;

(b) une surface non singulière de degré 2 dans $\mathbb{R}P^3$ telle que la partie réelle de la surface soit homéomorphe à la sphère S^2 ;

(c) une surface non singulière de degré 3 dans $\mathbb{R}P^3$ telle que la partie réelle de la surface soit homéomorphe à la réunion disjointe de $\mathbb{R}P^2$ et S^2 ;

(d) une surface non singulière de degré 3 dans $\mathbb{R}P^3$ telle que la partie réelle de la surface ait la caractéristique d'Euler-Poincaré égale à -5.

Exercice 7 Soit $d \geq 1$ un entier. Montrer que tout polynôme tropical en une variable de degré d a exactement d racines (comptées avec multiplicités, la multiplicité de chaque racine étant égale à son ordre).

Exercice 8 Soit $P(x)$ est un polynôme tropical en une variable. Montrer que $x_0 \in \mathbb{T}$ est une racine d'ordre k de $P(x)$ si et seulement si il existe un polynôme tropical $Q(x)$ en une variable tel que $P(x) = $ "$(x + x_0)^k Q(x)$" et x_0 n'est pas une racine de $Q(x)$.