Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2025 - 2026

Aspects tropicaux de la géométrie énumérative

Exercices, feuille 3

Exercice 1 Soit P un polynôme tropical en deux variables. On note
- Ξ_P le polygone de Newton de P ;
- Φ la subdivision de Ξ_P définie par P ;
- T la courbe tropicale définie par P dans $\mathbb{R}^2$;
- Ψ la subdivision de $\mathbb{R}^2$ définie par T.

Montrer qu'il existe une bijection Λ entre l'ensemble des éléments de la subdivision Φ et l'ensemble des éléments de la subdivision Ψ telle que

(i) à tout polygone de Φ, la bijection Λ associe un sommet de Ψ ;
(ii) à toute arête A de Φ, la bijection Λ associe une arête de Ψ, cette dernière arête étant bornée si et seulement si l'arête A n'est pas contenue dans le bord du polygone Ξ_P ;
(iii) à tout sommet S de Φ, la bijection Λ associe une région de Ψ, cette région étant bornée si et seulement si le sommet S appartient à l'intérieur du polygone Ξ_P ;
(iv) la bijection Λ préserve les relations d'incidence.

Exercice 2 (a) Soit d un entier strictement positif, et soit P un polynôme tropical de degré d en deux variables. Montrer que la courbe tropicale définie par P dans $\mathbb{R}^2$ a au plus d^2 sommets.

(b) Soit T une courbe tropicale non singulière dans $\mathbb{R}^2$ définie par un polynôme tropical Q, et soit Ξ_Q le polygon de Newton de Q. Montrer que
- le nombre de sommets du graphe sous-jacent de T est égal à l'aire euclidienne de Ξ_Q multipliée par 2 ;
- le premier nombre de Betti du graphe sous-jacent de T est égal au nombre de points entiers appartenant à l'intérieur de Ξ_Q.

Exercice 3 Version tropicale du théorème de Bézout
Soient P_1 et P_2 des polynômes tropicaux en deux variables. On suppose que le polygone de Newton de P_i, $i = 1, 2$, soit le triangle aux sommets $(0, 0)$, $(d_i, 0)$ et $(0, d_i)$, où d_1 et d_2 sont deux entiers strictement positifs. On note T_1 et T_2 les courbes tropicales dans $\mathbb{R}^2$ définies par P_1 et P_2, respectivement, et on suppose que l'intersection des graphes sous-jacents ne contienne aucun sommet de T_1 ou T_2. Montrer que la somme des multiplicités des points d'intersection de T_1 et T_2 est égale à $d_1 d_2$.

Exercice 4 (a) Montrer que, par 2 points arbitraires dans $\mathbb{R}^2$, on peut toujours tracer une droite tropicale. De plus, si les points sont choisis génériquement, une telle droite tropicale est unique.

(b) Montrer que, par 3 points arbitraires dans $\mathbb{R}^2$, on peut toujours tracer une courbe tropicale définie par un polynôme tropical dont le polygone de Newton coïncide avec le carré aux sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$. De plus, si les points sont choisis génériquement, une telle courbe tropicale est unique.

(c) Soit a un entier strictement positif. Montrer que, par $2a + 1$ points arbitraires dans $\mathbb{R}^2$, on peut toujours tracer une courbe tropicale définie par un polynôme tropical dont le polygone de Newton coïncide avec le rectangle aux sommets $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(a, 1)$ et $(0, 1)$. De plus, si les points sont choisis génériquement, une telle courbe tropicale est unique.