Université Pierre et Marie Curie
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Education et Formation*, Section CAPES, M1
Année 2011 - 2012

Algèbre et géométrie 1

Interrogation de contrôle continu

Mercredi 9 novembre 2011

Durée : une heure

Documents, téléphones portables, calculatrices et baladeurs sont interdits.
Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

1. Donner la définition d'un sous-groupe et la définition d'un isomorphisme de groupes.

2. Soit G un ensemble muni d'une opération interne $\diamond$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- il existe un élément e de G tel que, pour tout élément a de G, on ait

$$a \diamond e = a,$$

- pour tout élément a de G, il existe un élément a' de G tel que

$$a \diamond a' = e,$$

- pour des éléments quelconques a, b et c de G, on a

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c).$$

Montrer que $(G, \diamond)$ est un groupe.

3. Considérons le groupe $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes non nuls (l'opération interne est la multiplication habituelle).

(a) Montrer que l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.
(b) Donner une description géométrique des classes (à gauche et à droite) modulo $\mathbb{U}$.

4. Soit G un groupe fini dont le nombre d'éléments est pair. Montrer qu'il existe un élément g de G tel que $g \neq e$ et $g^2 = e$, où e est l'élément neutre de G.