TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

Ilia Itenberg

2017 - 2018
École Normale Supérieure

Version préliminaire
de ces notes a été préparée par
Raphaël Alexandre

Sommaire

Introduction **1**
1 Variétés topologiques . . . 2
2 Somme connexe de surfaces topologiques . . . 4
3 Complexes simpliciaux . . . 5
4 CW-complexes . . . 7

I Homotopie **10**

1 Groupe fondamental **10**
1 Premières définitions . . . 10
2 Groupe fondamental . . . 16

2 Revêtements **25**
1 Définition et quelques propriétés . . . 25
2 Revêtements et groupe fondamental . . . 31
3 Théorème de van Kampen . . . 44

3 Compléments sur l'homotopie **48**
1 Groupes d'homotopie supérieurs . . . 48
2 Applications cellulaires . . . 54
3 Fibrations localement triviales . . . 57

II Homologie **64**

4 Homologie singulière **64**
1 Définitions . . . 64
2 Groupes d'homologie relatifs . . . 71
3 Théorème d'excision . . . 75

5 Homologie cellulaire **81**
1 Complexes cellulaires . . . 81
2 Homologie simpliciale . . . 86

6 Homologie avec des coefficients différents de $\mathbb{Z}$ et cohomologie **87**
1 Coefficients arbitraires . . . 87
2 Groupes de cohomologie . . . 87
3 Multiplication . . . 89
4 Homologie des variétés . . . 90

Introduction

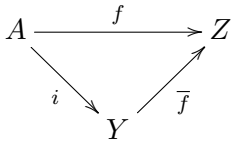
Un des buts de la topologie algébrique est de fournir des outils algébriques pour l'étude des espaces topologiques. Etant donnés deux espaces topologiques X et Y, on s'intéresse à l'existence d'un homéomorphisme entre ces espaces. Si on trouve un tel homéomorphisme, le problème est résolu. Par contre, si on n'arrive pas à trouver un homéomorphisme, comment peut-on procéder pour montrer que les espaces topologiques considérés ne sont pas homéomorphes ? Une des possibilités serait de trouver un *invariant* qui distingue ces deux espaces topologiques, c'est-à-dire, une application qui associe à tout espace topologique un élément d'un certain ensemble $\mathcal{A}$ telle que cette application associe le même élément de $\mathcal{A}$ à tous les espaces topologiques homéomorphes et prend des valeurs différentes sur X et Y.

Par exemple, soient n et m deux nombres entiers positifs ou nuls ; les espaces topologiques $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont ils-homéomorphes ? (Si on ne dit pas le contraire, on suppose toujours que $\mathbb{R}^k$ est muni de la topologie standard euclidienne.) Il est facile de voir que $\mathbb{R}^0$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ pour $m > 0$. En effet, dans ce cas, les ensembles considérés n'ont pas le même cardinal. Il n'est pas difficile non plus de voir que $\mathbb{R}^1$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ pour $m > 1$. Tout homéomrphisme $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^m$ donnerait un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$, mais $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$ ne sont pas homéomorphes, car le premier espace n'est pas connexe et le deuxième espace est connexe. On peut, bien sûr, présenter les arguments ci-dessus en utilisant le langage d'invariants et en considérant, par exemple, l'application à valeurs dans $\{0, 1\}$ associant 0 à tout espace topologique connexe et 1 à tout espace topologique non connexe. Pour distinguer $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^m$ avec $m > n$, on peut aussi utiliser certain invariants (dans le cas $n = 2$, un des invariants possibles est basé sur la considération du *groupe fondamental*; nous allons introduire cette notion dans le chapitre 1).

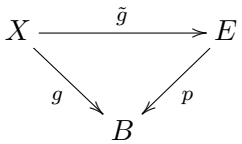
Une grande partie du cours sera consacrée aux groupes (d'homotopie et d'homologie) qui, dans beaucoup de cas, permettent de distinguer des espaces topologiques.

Les groupes d'homotopie et les groupes d'homologie jouent un rôle extrêmement important en topologie algébrique et peuvent être utilisés dans l'étude de différents problèmes topologiques fondamentaux. Parmi ces problèmes, on peut mentionner, par exemple, celui de *prolongement* et celui de *relèvement*.

Soit $A \subset Y$ un sous-espace d'un espace topologique Y, et soit $f : A \to Z$ une application continue de A dans un espace topologique Z. Le *problème de prolongement* porte sur l'existence d'une application continue $\overline{f} : Y \to Z$ dont la restriction sur A coïncide avec f, autrement dit, une application $\overline{f}$ telle que $\overline{f} \circ i = f$, où $i : A \hookrightarrow Y$ est l'inclusion.



Soit $p : E \to B$ une application continue d'un espace topologique E dans un espace topologique B, et soit $g : X \to B$ une application continue d'un espace topologique X dans B. Le *problème de relèvement* porte sur l'existence d'une application continue $\widetilde{g} : X \to E$ telle que $p \circ \widetilde{g} = g$.



Nous allons commencer le cours par quelques structures importantes sur des espaces

topologiques. Ensuite, nous parlerons d'homotopie, de groupes d'homotopie et de revêtements. La dernière partie du cours porte sur les groupes d'homologie et leurs propriétés.

1 VARIÉTÉS TOPOLOGIQUES

Intuitivement, les variétés topologiques sont des espaces topologiques qui localement ressemblent à $\mathbb{R}^n$. La définition formelle est la suivante.

DÉFINITION 1.
Soit n un nombre entier positif ou nul. Un espace topologique X est une *variété topologique de dimension n* si
- tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}^n$,
- l'espace X est séparé,
- et la topologie de X possède une base dénombrable.

Les deux dernières conditions peuvent paraître un peu artificielles, mais il est commode de les inclure dans la définition pour éviter certaines pathologies. La *droite à deux origines* est un exemple d'un espace topologique qui vérifie la première et la troisième conditions, mais ne vérifie pas la deuxième. La droite à deux origines est le quotient de la réunion disjointe $\mathbb{R} \amalg \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence suivante : pour tout nombre réel $a \neq 0$, on a une classe d'équivalence formée par le point a dans la première copie de $\mathbb{R}$ et le point a dans la deuxième copie de $\mathbb{R}$; il y a deux classes d'équivalence en plus, la première classe étant formée par le point 0 de la première copie de $\mathbb{R}$ et la deuxième classe étant formée par le point 0 de la deuxème copie de $\mathbb{R}$.

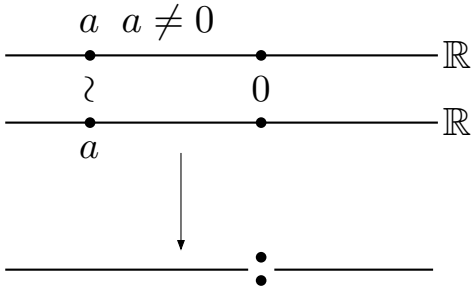


FIGURE 1 – La droite à deux origines

Soit X un espace topologique discret et non dénombrable. Alors, $X \times \mathbb{R}$ (muni de la topologie produit) est un exemple d'un espace topologique qui vérifie les deux premières conditions de la définition de variété topologique (pour $n = 1$), mais ne vérifie pas la troisième.

Un autre exemple, qui vérifie en plus la propriété de connexité, est fourni par une *demi-droite longue* dont la définition utilise le premier ordinal non dénombrable ω_1. §1

§1. Pour ceux qui sont familiés avec la notion d'ordinal, voici une construction de demi-droite longue. Comme tout ordinal dans l'approche de von Neumann, ω_1 est un ensemble bien ordonné, la relation d'ordre $\prec$ étant la relation d'appartenance ; les éléments de cet ensemble sont les ordinaux finis ou infinis dénombrables. On munit le produit $[0,1[\times\omega_1$ de l'ordre suivant : (x_0, y_0) est strictement plus petit que (x_1, y_1) si soit $y_0 \prec y_1$, soit $y_0 = y_1$ et $x_0 < x_1$. Ainsi, $[0,1[\times\omega_1$ est muni de la topologie engendrée par les segments ouverts (a, b) avec $a, b \in [0,1[\times\omega_1$ et a est strictement plus petit que b. Le résultat est une *demi-droite longue fermée*. Une *demi-droite longue ouverte* est obtenue à partir de la demi-droite longue fermée en enlevant le point $(0, \varnothing)$. La demi-droite longue ouverte est un espace topologique connexe séparé, et tout point de cet espace possède un voisinage ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}^1$. Par contre, la topologie de cet espace n'a pas de base dénombrable, car toute intervalle ouvert horizontal doit contenir au moins un élément de la base.

Pour la suite de l'introduction, on ne considère que des variétés connexes et compactes.

Dimension 1. La seule variété connexe et compacte de dimension 1 (à homéomorphisme près) est le cercle S^1.

Dimension 2. Les variétés connexes et compactes de dimension 2 sont appelés *surfaces topologiques*. Il y a une infinité de surfaces topologiques (même considérées à homéomorphisme près). Des exemples de surfaces topologiques sont fournis par la sphère S^2 et le tore $S^1 \times S^1$.

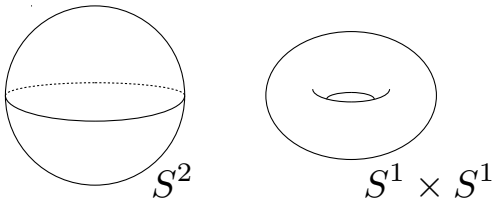


FIGURE 2 – Une sphère et un tore

Les surfaces topologiques peuvent être décrites par une procédure d'identification (recollement) des côtés d'un polygone. La figure 3 présente trois possibilités pour un recollement des côtés opposés d'un carré. Les flèches indiquent la façon de recoller deux côtés opposés. Par exemple, deux flèches de même direction sur deux côtés verticaux indiquent que ces côtés sont identifiés à l'aide d'une translation horizontale ; deux flèches de directions opposées sur deux côtés verticaux indiquent que ces côtés sont identifiés à l'aide de la symétrie centrale par rapport au centre du carré. Le premier recollement donne le tore, le deuxième produit la *bouteille de* KLEIN, et le troisème mène au *plan projectif réel*.

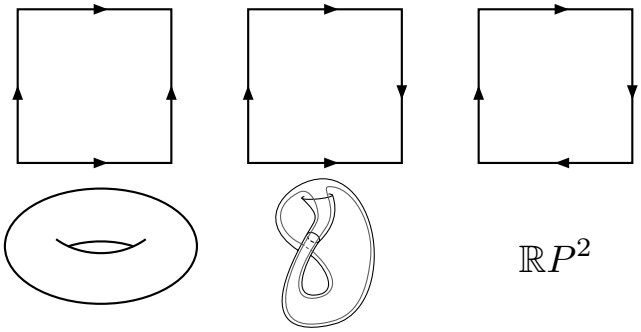


FIGURE 3 – Trois recollements possibles des côtés d'un carré

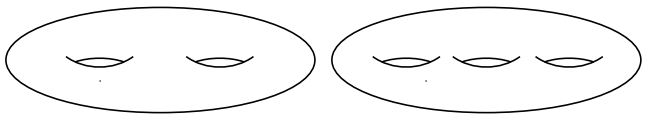


FIGURE 4 – Sphères à deux et trois anses

On peut également considérer des sphères avec plusieurs anses. Ces surfaces peuvent aussi être construites à l'aide de la procédure de recollement, mais on utilise des polygones plus compliqués qu'un carré. La figure 5 présente un recollement d'une sphère avec deux anses à partir d'un polygone régulier à 8 côtés. Les côtés ayant la même lettre et le même indice doivent être recollés. Les flèches indiquent la façon de recoller. Les puissances contiennent la même information que les flèches : on choisit un sens de parcours le long

du frontière du polygone et on met la puissance -1 pour tous les côtés dont les flèches indiquent la direction opposée au sens de parcours choisi.

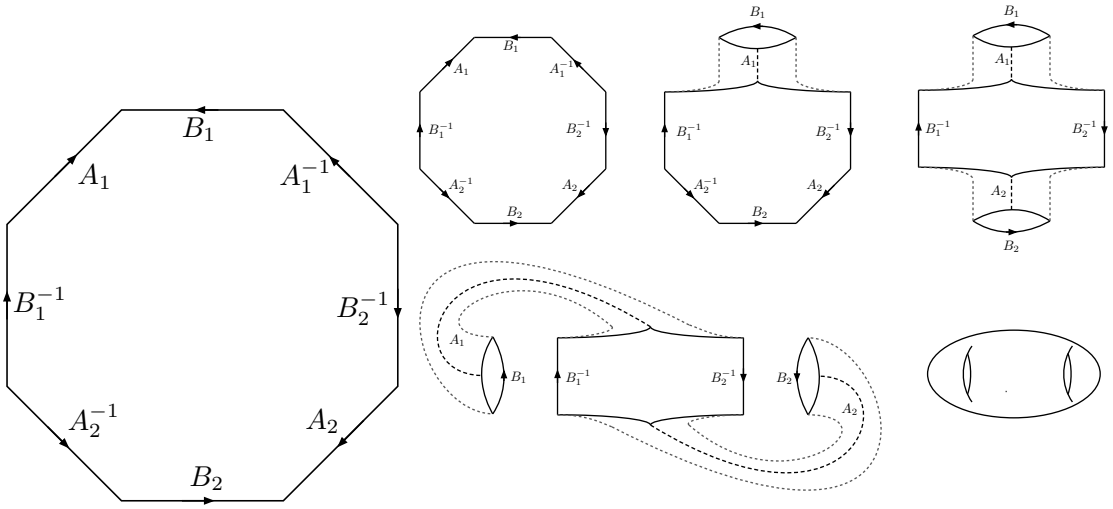


FIGURE 5 – Polygone fondamental de la sphère à deux anses

De façon similaire, on peut obtenur une sphère à n anses pour tout entier strictement positif n. Pour cela, on considère un polygone régulier à $4n$ côtés et on identifie les côtés selon le marquage suivant :

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_2 B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} \cdots A_n B_n A_n^{-1} B_n^{-1}.$$

On note S_n une telle sphère à n anses, et on utilise la notation S_0 pour la sphère S^2. Comme nous avons déjà remarqué, la surface S_1 est homéomorphe au tore $S^1 \times S^1$. Les surfaces S_n sont *orientables* (nous allons introduire la notion d'orientabilité plus tard).

Une autre famille de surfaces topologiques peut être obtenue à l'aide des polygones réguliers à $2m$ côtés (ici m est un nombre entier strictement positif) ; on identifie les côtés de chaque polygone selon le marquage

$$A_1 A_1 A_2 A_2 \cdots A_m A_m.$$

(Dans le cas $m = 1$, on utilise un polygone à deux côtés non rectilignes.) Les surfaces obtenues sont notées V_m. Ces surfaces ne sont pas orientables.

Il se trouve que toute surface topologique connexe et compacte est homéomorphe soit à une des surfaces S_n ($n = 0, 1, \ldots$) soit à une des surfaces V_m ($m = 1, 2, \ldots$). Nous ne démontrerons pas cet énoncé dans le cours. Par contre, nous démontrerons (à l'aide de l'orientabilité et d'un autre invariant topologique très important, la *caractéristique d'*EULER-POINCARÉ) que les surfaces S_n ($n = 0, 1, \ldots$) et V_m ($m = 1, 2, \ldots$) sont deux à deux non homéomorphes.

2 Somme connexe de surfaces topologiques

Nous allons introduire une opération qui permet de retrouver toutes les surfaces S_n et V_m à partir de la sphère S^2, le tore $S^1 \times S^1$ et le plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$.

Considérons deux surfaces connexes et compactes S et S'. On choisit deux disques fermés $D \subset S$ et $D' \subset S'$, ainsi qu'un homéomorphisme φ entre les bords de ces disques. La surface $S \sharp S'$ est obtenue de la réunion disjointe

$$(S \setminus \mathring{D}) \amalg (S' \setminus \mathring{D}'),$$

où $\mathring{D}$ et $\mathring{D}'$ sont les intérieurs de D et D', respectivement, à l'aide de l'identification des bords des disques D et D' par l'homéomorphisme φ. Cette surface, notée $S\sharp S'$, s'appelle *somme connexe* de S et S'. On peut vérifier que, à homéomorphisme près, le résultat ne dépend pas du choix de disques et d'homéomorphisme φ.

La somme connexe est une opération associative, on peut donc parler de la somme connexe de plusieurs (pas nécessairement deux) surfaces topologiques.

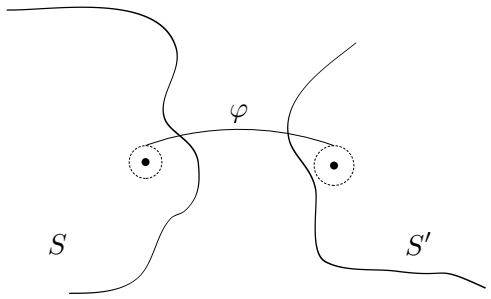


FIGURE 6 – Somme connexe

La somme connexe de S^2 et S^2 est homéomorphe à S^2. Pour tout entier n positif ou nul, la somme connexe $S_n\sharp S_1$ est homéomorphe à S_{n+1}. Ainsi, toute surface S_n, pour $n \geq 1$, peut être représentée comme somme connexe de n copies du tore $S^1 \times S^1$.

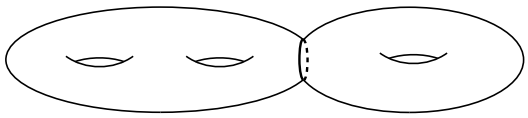


FIGURE 7 – Somme connexe de S_2 et S_1

On peut vérifier que la surface V_1 est homéomorphe au plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$ et que toute surface V_m ($m = 1, 2, \ldots$) peut être représentée comme somme connexe de m copies de $\mathbb{R}P^2$.

3 Complexes simpliciaux

Pour définir les complexes simpliciaux, nous allons avoir besoin de la notion de simplexe.

Soit $k \leq n$ deux entiers positifs ou nuls.

DÉFINITION 2.
Un *simplexe* (*affine*) *de dimension* k dans $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de $(k+1)$ points affinement indépendants dans $\mathbb{R}^n$. Un simplexe de dimension k s'appelle aussi *k-simplexe*.

Par exemple, un 0-simplexe est un point, un 1-simplexe est un segment, et un 2-simplexe est un triangle. Pour un k-simplexe, on dit que sa dimension est k. Si on ne veut pas préciser la dimension, on parle simplement de *simplexe*. Il est commode de considérer l'ensemble vide comme (-1)-simplexe.

Si $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ est un k-simplexe obtenu comme enveloppe convexe de points x_0, …, x_k et si L est un sous-ensemble de $\{x_0, \ldots, x_k\}$, alors l'enveloppe convexe des éléments de L est une *face* de σ (cette face est elle-même un ℓ-simplexe, où $\ell + 1$ est le cardinal de L).

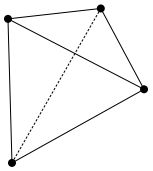


FIGURE 8 – Un 3-simplexe

DÉFINITION 3.

Un *complexe simplicial géométrique* dans $\mathbb{R}^n$ est une collection $\mathcal{K}$ de simplexes dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions suivantes :

- toute face d'un simplexe de la collection est aussi dans la collection ;
- l'intersection de deux simplexes quelconques de la collection est une face commune des deux simplexes considérés (cette face peut être vide) ;
- pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ tel que U ne rencontre qu'un nombre fini de simplexes de K.

Le *support* $|\mathcal{K}|$ de $\mathcal{K}$ est la réunion de tous les simplexes de $\mathcal{K}$. La *dimension* de $\mathcal{K}$ est le maximum des dimensions de simplexes de $\mathcal{K}$ (la dimension peut être infinie).

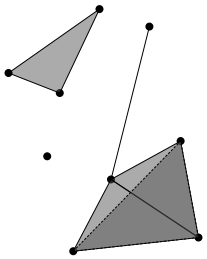


FIGURE 9 – Exemple de complexe simplicial

Si un espace topologique X admet un homéomorphisme $\phi : |\mathcal{K}| \to X$ pour un certain complexe simplicial géométrique $\mathcal{K}$, le choix d'un tel complexe simplicial géométrique $\mathcal{K}$ et d'un tel homéomorphisme ϕ introduit une structure de *complexe simplicial* sur X. Parfois, on dit qu'une telle paire $(\mathcal{K}, \phi)$ est une *triangulation* de X. Pour tout k-simplexe de $\mathcal{K}$, l'image de ce k-simplexe par ϕ s'appelle *k-simplexe de la triangulation de X*.

Les figures ci-dessous fournissent trois exemples d'une triangulation d'un carré (plus précisement, chacun des trois dessins montre les images des simplexes d'un complexe simplicial géométrique).

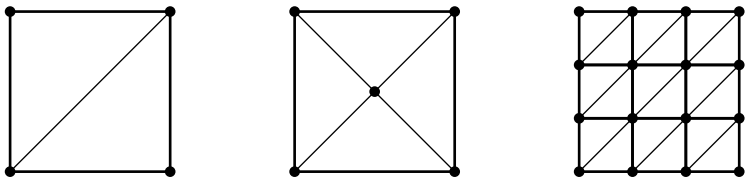


FIGURE 10 – Triangulations d'un carré

Si on identifie les côtés opposés du carré pour obtenir un tore, seulement un de ces trois exemples fournit les images de simplexes pour une certaine triangulation du tore (pourquoi ?). Une autre triangulation du tore $S^1 \times S^1$ est représentée sur la Figure 11.

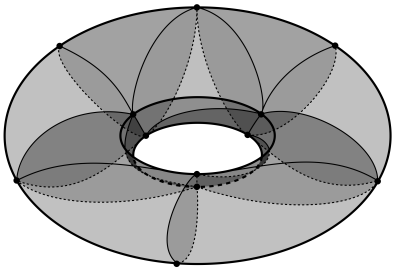


FIGURE 11 – Une triangulation du tore

Toute surface topologique compacte admet une triangulation ayant un nombre fini de simplexes (ce fait peut être utilisé pour démontrer l'énoncé mentionné ci-dessus : toute surface topologique connexe et compacte est homéomorphe soit à une des surfaces S_n, soit à une des surfaces V_m).

4 CW-COMPLEXES

La surface d'un cube de dimension 3 a une subdivision formée par les faces de dimension au plus 2 du cube, mais elle ne se présente pas naturellement comme un complexe simplicial. (Remarquons au passage que la surface du cube possède, bien sûr, des triangulations ; les triangulations les plus simples de la surface du cube représentent chaque face de dimension 2 du cube comme réunion d'images de deux triangles.)

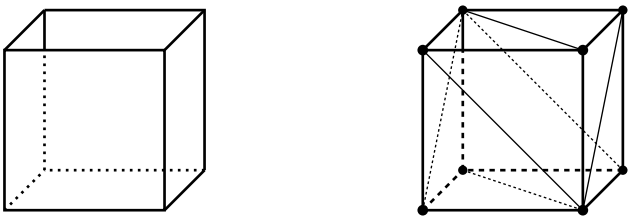


FIGURE 12 – Une triangulation de la surface d'un cube

On peut considérer une classe d'objets plus large que les complexes simpliciaux en gardant certains aspects combinatoires des complexes simpliciaux. Un *CW-complexe* (le nom CW provient de *closure-finite weak topology*) est un espace topologique séparé non vide muni d'une partition (dont les éléments s'appellent *cellules*) vérifiant les conditions suivantes :

(1) pour toute cellule C, il existe un entier n positif ou nul (appelé la *dimension* de C) et une application continue $f : D^n \to X$ (appelée *application caractéristique* de C) du n-disque unité fermé D^n vers X telle que

- la restriction de f à l'intérieur $\mathring{D}^n$ de D^n fournit un homéomorphisme entre $\mathring{D}^n$ et C,
- l'image du bord de D^n est contenue dans une réunion finie de cellules de dimension au plus $n-1$;

(pour l'instant, pour éviter quelques difficultés, on peut considérer que les applications caractéristiques font partie de la structure de CW-complexe) ;

(2) un sous-ensemble $A \subset X$ est fermé si et seulement si, pour toute cellule, l'intersection de A avec l'adhérence de la cellule (dans X) est fermée dans cette adhérence.

Par convention, $D^0 = \mathring{D}^0$ est un singleton. Une structure de CW-complexe sur X s'appelle aussi une *décomposition cellulaire* de X.

Pour tout entier $k \geq 0$, le *k-squelette* X_k d'un CW-complexe X est la réunion de toutes les cellules de dimension inférieure ou égale à k dans la décomposition cellulaire de X. En d'autres termes, on obtient X_k à partir de X_{k-1} en attachant à ce dernier une famille (possiblement vide) de k-disques fermés le long de leurs bords à l'aide des applications caractéristiques.

Pour tout entier $k \geq 0$, le k-squelette X_k d'un CW-complexe X possède naturellement une structure de CW-complexe. Soit X un complexe cellulaire. S'il existe un nombre n tel que les dimensions de toutes les cellules de la décomposition sont inférieures ou égales à n, on dit que le CW-complexe X est de dimension finie, et le plus petit tel n est la *dimension* de X. On dit que le CW-complexe X est *fini* s'il n'a qu'un nombre fini de cellules. Les CW-complexes de dimension au plus 1 peuvent être vus comme réalisations géométriques de graphes.

Pour tout entier $n \geq 1$, la structure de CW-complexe la plus simple sur la sphère S^n de dimension n est formée par deux cellules : une cellule de dimension 0 et une cellule de dimension n.

La sphère S^n a, bien sûr, d'autres décompositions cellulaires. Par exemple, on peut construire par récurrence une décomposition formée par deux cellules dans chaque dimension entre 0 et n.

Dans la figure qui suit, on a représenté une telle décomposition de S^2 en deux cellules de dimension 0 (notées e_1^0 et e_2^0), de dimension 1 (notées e_1^1 et e_2^1) et de dimension 2 (notées e_1^2 et e_2^2).

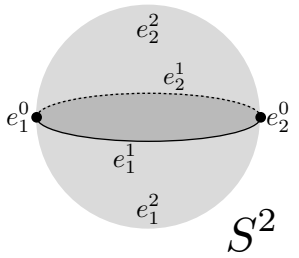


FIGURE 13 – Exemple d'une décomposition cellulaire de S^2

Pour trouver une décomposition cellulaire du plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$, on peut utiliser la décomposition cellulaire de S^2 présentée sur la Figure 13. Le plan projectif réel est obtenu comme espace quotient de la sphère S^2 : on identifie les points antipodaux de S^2. La décomposition indiquée sur la Figure 13 fournit, donc, une décomposition cellulaire de $\mathbb{R}P^2$: cette dernière a une cellule de dimension 0, une cellule de dimension 1 et une cellule de dimension 2.

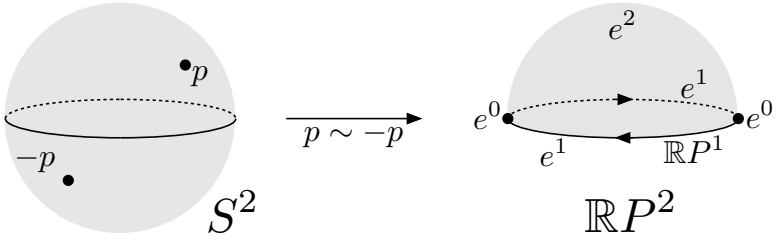


FIGURE 14 – Exemple d'une décomposition cellulaire de $\mathbb{R}P^2$

Une structure de CW-complexe sur $\mathbb{R}P^2$ légérement différente de celle indiquée ci-dessus peut être décrite de la façon suivante. Reprenons la représentation de $\mathbb{R}P^2$ sous

forme d'un quotient d'un carré (voir la Figure (3, *p.* 3)). L'identification des côtés du carré donne deux paires de sommets identifiés ; donc la décomposition obtenue a deux cellules de dimension 0. On a aussi deux cellules de dimension 1 qui correspondent aux deux paires d'arêtes identifiées. Enfin, on a une cellule de dimension 2 correspondant à l'intérieur du carré.

Il n'est pas vrai que toute décomposition d'un espace topologique X telle que chaque élément de la décomposition soit homéomorphe à un certain disque ouvert $\mathring{D}^n$ est une décomposition cellulaire de X. Par exemple, soit X l'espace $\left\{ re^{i\theta} \,\middle|\, r \in [0,1],\ \theta \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{R}^2$. Une décomposition naturelle de X (en cellules de dimension 0 et 1) n'est pas une décomposition cellulaire (trouvez un sous-ensemble $A \subset X$ tel que A ne soit pas fermé, mais, pour toute élément C de la décomposition, l'intersection de A avec l'adhérence $\overline{C}$ de C soit fermé dans $\overline{C}$). On verra plus tard que X ne possède aucune décomposition cellulaire.

Un autre exemple d'un espace topologique qui ne possède pas de décomposition cellulaire est fourni par les *boucles d'oreilles hawaïennes*. C'est un sous-ensemble $H \subset \mathbb{R}^2$ (muni de la topologie induite) formé par la collection dénombrable des cercles de centre $(\frac{1}{k}, 0)$ de rayon $\frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

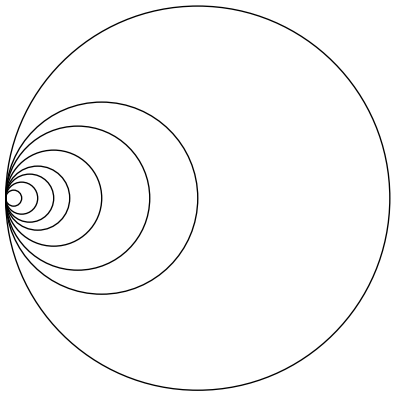


FIGURE 15 – Boucles d'oreilles hawaïennes

Première partie

Homotopie

Chapitre 1

Groupe fondamental

1 Premières définitions

1.1 Homotopie d'applications

La notion d'homotopie formalise une conception intuitive de déformation continue d'applications.

Définition 1.1 (Homotopie d'applications continues).
Soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ deux applications continues entre deux espaces topologiques X et Y. On pose $I = [0; 1]$. Une *homotopie* entre f et g est une application continue

$$H : X \times I \to Y$$

telle que

$$H(x, 0) = f(x),\ H(x, 1) = g(x)$$

pour tout point $x \in X$.

S'il existe une telle homotopie entre f et g, on dira que ces applications sont *homotopes*. On peut le noter $f \sim g$.

Soit H une homotopie entre $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$. Pour tout point $x \in X$ et pour tout $t \in I$, on pose $H(x, t) = h_t(x)$. Cette notation symbolise un point de vue important sur H : pour chaque $t \in I$ fixé, on a une application $x \mapsto h_t(x)$, et l'homotopie H peut être considérée comme famille d'applications $h_t : X \to Y$ indexées par $t \in I$. Chaque application h_t, $t \in I$, est continue (h_t est une restriction de l'homotopie H sur la fibre $X \times \{t\} \subset X \times I$).

L'application h_0 coïncide avec f et l'application h_1 coïncide avec g. Une homotopie entre f et g peut être vue comme famille continue d'applications qui relie f et g.

La relation « être homotopes » est une relation d'équivalence. En effet,

- pour toute application continue $f : X \to Y$, l'application $H : X \times I \to Y$ définie par $H(x, t) = f(x)$ est une homotopie entre f et f ;

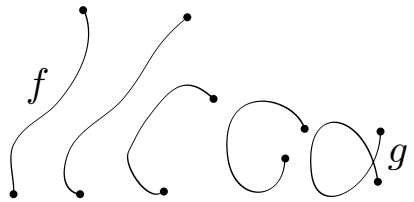


FIGURE 1.1 – Applications h_t

- si H est une homotopie entre des applications $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$, alors l'application $H' : X \times I \to Y$ définie par $H'(x,t) = H(x, 1-t)$ est une homotopie entre g et f ;
- si H est une homotopie entre des applications $f : X \to Y$ et $f' : X \to Y$, et H' est une homotopie entre des applications $f' : X \to Y$ et $f'' : X \to Y$, alors l'application $H'' : X \times I \to Y$ définie par

$$H''(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & \text{si } \ t \in [0;1/2], \\ H'(x,2t-1), & \text{si } \ t \in [1/2;1], \end{cases}$$

  est une homotopie entre f et f''.

Par conséquent, on a une partition de l'ensemble $\mathcal{C}(X,Y)$ des applications continues entre X et Y en classes d'équivalence. Ces classes s'appellent les *classes d'homotopie* des applications de X dans Y. L'ensemble des classes d'homotopie des applications entre X et Y est noté $\pi(X,Y)$.

Exemples.

(1) Soit n un nombre entier positif ou nul. Pour tout espace topologique X, deux applications continues $f : X \to \mathbb{R}^n$ et $g : X \to \mathbb{R}^n$ quelconques sont homotopes. En effet, l'application $H : X \times I \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

est une homotopie entre f et g.

(2) Soient X et Y deux espaces topologiques non vides tels que Y soit connexe par arcs. Soient y_0 et y_1 deux points de Y. Alors, l'application constante $f : X \to Y$ qui à tout point de X associe y_0 est homotope à l'application constante $g : X \to Y$ qui à tout point de X associe y_1. En effet, soit $\gamma : I \to Y$ un chemin tel que $\gamma(0) = y_0$ et $\gamma(1) = y_1$. Alors, l'application $H : X \times I \to Y$ définie par $H(x,t) = \gamma(t)$ est une homotopie entre f et g.

Donnons maintenant un exemple de deux applications continues qui ne sont pas homotopes. Soit X un espace topologique non vide quelconque, et soit Y un espace topologique ayant au moins deux composantes connexes par arcs. Considérons deux points y_0 et y_1 de Y tels que ces points appartiennent à des composantes connexes par arcs différentes de Y. Posons $f(x) = y_0$ et $g(x) = y_1$ pour tout point $x \in X$. Alors, les deux applications constantes $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ ne sont pas homotopes. En effet, si $H : X \times I \to Y$ est une homotopie entre f et g, alors, pour tout point $x \in X$, on a un chemin $\gamma_x : I \to Y$, défini par $\gamma_x(t) = H(x,t)$, qui relie y_0 et y_1.

Proposition 1.1.
Soient M, N, X et Y des espaces topologiques, et soient $g : M \to X$, $f : X \to Y$, $f' : X \to Y$ et $h : Y \to N$ des applications continues telles que $f \sim f'$.

$$\begin{array}{ccc} M & & N \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \uparrow{\scriptstyle h} \\ X & \xrightarrow[f']{f} & Y \end{array}$$

Soit $H : X \times I \to Y$ une homotopie entre f et f'. Alors, $h \circ H \circ (g \times \mathrm{id}_I)$ est une homotopie entre $h \circ f \circ g : M \to N$ et $h \circ f' \circ g : M \to N$ (ici $\mathrm{id}_I : I \to I$ est l'application identité).

Démonstration. L'application $G = h \circ H \circ (g \times \mathrm{id}_I) : M \times I \to N$ est continue. De plus, pour tout point $m \in M$, on a

$$G(m, 0) = h(H(g(m), 0)) = h(f(g(m))),$$
$$G(m, 1) = h(H(g(m), 1)) = h(f'(g(m))).$$

Donc, G est une homotopie entre $h \circ f \circ g$ et $h \circ f' \circ g$. □

Proposition 1.2.
Soient X, Y et Z des espaces topologiques, et soient $f : Z \to X \times Y$ et $g : Z \to X \times Y$ deux applications continues. Alors, les applications f et g sont homotopes si et seulement si $\mathrm{pr}_X \circ f : Z \to X$ est homotope à $\mathrm{pr}_X \circ g : Z \to X$ et $\mathrm{pr}_Y \circ f : Z \to Y$ est homotope à $\mathrm{pr}_Y \circ g : Z \to Y$ (ici $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ et $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ sont les projections).

Démonstration. Supposons que les applications f et g sont homotopes. Soit $H : Z \times I \to X \times Y$ une homotopie entre f et g. Alors, $\mathrm{pr}_X \circ H$ est une homotopie entre $\mathrm{pr}_X \circ f$ et $\mathrm{pr}_X \circ g$, et $\mathrm{pr}_Y \circ H$ est une homotopie entre $\mathrm{pr}_Y \circ f$ et $\mathrm{pr}_Y \circ g$.

Supposons maintenant que $\mathrm{pr}_X \circ f$ et $\mathrm{pr}_X \circ g$ sont homotopes et que $\mathrm{pr}_Y \circ f$ et $\mathrm{pr}_Y \circ g$ sont homotopes. Soit $H_X : Z \times I \to X$ une homotopie entre $\mathrm{pr}_X \circ f$ et $\mathrm{pr}_X \circ g$, et soit $H_Y : Z \times I \to Y$ une homotopie entre $\mathrm{pr}_Y \circ f$ et $\mathrm{pr}_Y \circ g$. Alors, l'application $H : Z \times I \to X \times Y$ définie par $(z, t) \mapsto (H_X(z, t), H_Y(z, t))$ est une homotopie entre f et g. □

1.2 Homotopie relative

La notion d'homotopie introduite ci-dessus peut être généralisée de la façon suivante.

Définition 1.2.
Soient X et Y des espaces topologiques, et soit $A \subset X$ un sous-espace topologique. Une homotopie $H : X \times I \to Y$ est dite *relative à* A si $H(a, t) = H(a, 0)$ pour tout $a \in A$ et tout $t \in I$. Si deux applications $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ sont reliées par une homotopie relative à A, on dit que f et g sont *homotopes relativement à* A et on écrit $f \sim g$ rel A. Bien sûr, deux applications homotopes relativement à A coïncident sur A. La relation « être homotope relativement à A à » est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de cette relation s'appellent *classes de A-homotopie* des applications de X dans Y.

Les démonstrations des deux propositions suivantes sont complètement similaires à celles des Propositions 1.1 et 1.2.

Proposition 1.3.

Soient M, N, X et Y des espaces topologiques, et soit $A \subset X$ un sous-espace topologique. Soient $g : M \to X$, $f : X \to Y$, $f' : X \to Y$ et $h : Y \to N$ des applications continues telles que $f \sim f'$ rel A. Soit $H : X \times I \to Y$ une homotopie entre f et f' relative à A. Alors, $h \circ H \circ (g \times \mathrm{id}_I)$ est une homotopie entre $h \circ f \circ g : M \to N$ et $h \circ f' \circ g : M \to N$ relative à $g^{-1}(A)$. □

Proposition 1.4.

Soient X, Y et Z des espaces topologiques, et soit $A \subset Z$ un sous-espace topologique. Soient $f : Z \to X \times Y$ et $g : Z \to X \times Y$ deux applications continues. Alors, les applications f et g sont homotopes relativement à A si et seulement si $\mathrm{pr}_X \circ f : Z \to X$ est homotope à $\mathrm{pr}_X \circ g : Z \to X$ relativement à A et $\mathrm{pr}_Y \circ f : Z \to Y$ est homotope à $\mathrm{pr}_Y \circ g : Z \to Y$ relativement à A. □

1.3 Propriétés homotopiques de la multiplication de chemins

Soit X un espace topologique, et soient $\gamma : I \to X$ et $\gamma' : I \to X$ deux chemins. Il est facile de vérifier que deux applications γ et γ' sont homotopes si et seulement si $\gamma(I)$ et $\gamma'(I)$ sont dans la même composante connexe par arcs de X. On obtient une notion plus intéressante si on considère les homotopies relatives aux extrémités de I, c'est-à-dire, relatives au sous-ensemble $\{0, 1\} \subset I$.

Définition 1.3 (Homotopie de chemins).

On dit que deux **chemins** $\gamma : I \to X$ et $\gamma' : I \to X$ sont homotopes si les applications γ et γ' sont homotopes relativement à $\{0, 1\}$. Les classes de $\{0, 1\}$-homotopie des applications de I dans X s'appellent *classes d'homotopie des chemins* dans X. Si γ est un chemin dans X, on note $[\gamma]$ la classe d'homotopie de γ.

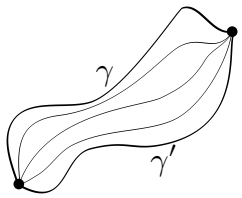


Figure 1.2 – Chemins homotopes

Définition 1.4.

Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins dans un espace topologique X tels que le point d'arrivée de γ_1 coïncide avec le point de départ de γ_2, on peut considérer le produit $\gamma_1\gamma_2$ de γ_1 et γ_2 : c'est le chemin $\gamma_1\gamma_2 : I \to X$ défini par

$$\begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{si } \ t \in [0; \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(2t-1), & \text{si } \ t \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

Proposition 1.5.

Soit X un espace topologique, et soient γ_1 et γ_2 deux chemins dans X tels que le point d'arrivée de γ_1 coïncide avec le point de départ de γ_2. Considérons deux chemins γ_1' et γ_2' dans X tels que les chemins γ_1 et γ_1' soient homotopes et les chemins γ_2 et γ_2' soient aussi homotopes. Alors, le point d'arrivée de γ_1' coïncide avec le point de départ de γ_2', et on a $[\gamma_1\gamma_2] = [\gamma_1'\gamma_2']$.

Démonstration. L'affirmation sur le point d'arrivée de γ_1' et le point de départ de γ_2' est immédiate. Soit $H_1 : I \times I \to X$ (respectivement, $H_2 : I \times I \to X$) une homotopie entre les chemins γ_1 et γ_1' (respectivement, les chemins γ_2 et γ_2'). Une homotopie $H : I \times I \to X$ entre les chemins $\gamma_1\gamma_2$ et $\gamma_1'\gamma_2'$ est donnée par

$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(2s,t), & \text{si } \ s \in [0;\tfrac{1}{2}], \\ H_2(2s-1,t), & \text{si } \ s \in [\tfrac{1}{2};1]. \end{cases}$$

Donc, $[\gamma_1\gamma_2] = [\gamma_1'\gamma_2']$. □

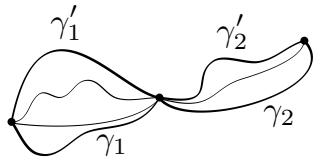


FIGURE 1.3 – Homotopie entre $\gamma_1\gamma_2$ et $\gamma_1'\gamma_2'$

La Proposition 1.5 permet de définir une opération de multiplication sur les classes d'homotopie des chemins dans X : pour deux classes c_1 et c_2 qui sont représentées, respectivement, par des chemins γ_1 et γ_2 tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, on peut définir le produit c_1c_2 qui est la classe du chemin $\gamma_1\gamma_2$.

Considérons des chemins γ_1, γ_2 et γ_3 dans X tels que les produits $\gamma_1\gamma_2$ et $\gamma_2\gamma_3$ soient définis (c'est-à-dire, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$). L'égalité $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 = \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ n'est pas forcement vraie, autrement dit, la multiplication de chemins n'est pas, en général, associative. Par contre, pour la multiplication de classes d'homotopie de chemins, on a l'associativité.

PROPOSITION 1.6.
Soit X un espace topologique. Considérons des chemins γ_1, γ_2 et γ_3 dans X tels que les produits $\gamma_1\gamma_2$ et $\gamma_2\gamma_3$ soient définis. Alors,

$$([\gamma_1][\gamma_2])[\gamma_3] = [\gamma_1]([\gamma_2][\gamma_3]).$$

Démonstration. Considérons l'application $\psi : I \to I$ définie par

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & \text{si } \ t \in [0;\tfrac{1}{2}], \\ t - \frac{1}{4}, & \text{si } \ t \in [\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{4}], \\ 2t-1, & \text{si } \ t \in [\tfrac{3}{4};1]. \end{cases}$$

On vérifie facilement que l'application ψ est continue et que, pour tout $t \in I$, on a

$$(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3(\psi(t)) = \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)(t).$$

D'autre part, on a $\psi \sim \mathrm{id}_I$ rel $\{0,1\}$. Une homotopie $H : I \times I \to I$ relative à $\{0,1\}$ entre ψ et id_I est donnée par

$$H(s,t) = (1-t)\psi(s) + ts.$$

Il reste à appliquer la Proposition 1.3. □

La construction de l'homotopie H dans la démonstration de la Proposition 1.6 se généralise et donne l'énoncé suivant.

LEMME 1.7.
Soit $\psi : I \to I$ un chemin dont le point de départ coïncide avec 0 et le point d'arrivée coïncide avec 1. Alors, le chemin ψ est homotope au chemin $\mathrm{id}_I : I \to I$. □

Pour tout point $x \in X$, on note e_x le chemin constant $I \to X$ défini par $e_x : t \mapsto x$, $t \in I$.

PROPOSITION 1.8.
Soit X un espace topologique, et soit $x \in X$ un point. Considérons des chemins γ_1 et γ_2 dans X tels que $\gamma_1(1) = x = \gamma_2(0)$. Alors,

$$[\gamma_1][e_x] = [\gamma_1], \quad [e_x][\gamma_2] = [\gamma_2].$$

Démonstration. Considérons l'application $\psi_1 : I \to I$ définie par

$$\psi_1(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } \ t \in [0; \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{si } \ t \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

et l'application $\psi_2 : I \to I$ définie par

$$\psi_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ t \in [0; \frac{1}{2}], \\ 2t - 1, & \text{si } \ t \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

Les applications ψ_1 et ψ_2 sont continues et, pour tout $t \in I$, on a

$$\gamma_1 e_x(t) = \gamma_1(\psi_1(t)),$$
$$e_x \gamma_2(t) = \gamma_2(\psi_2(t)).$$

Il reste à appliquer le Lemme 1.7 et la Proposition 1.3. □

L'énoncé suivant est similaire au Lemme 1.7.

LEMME 1.9. Soit $\psi : I \to I$ un chemin dont le point de départ et le point d'arrivée coïncident avec 0. Alors, le chemin ψ est homotope au chemin constant $e_0 : I \to I$. □

PROPOSITION 1.10.
Soit X un espace topologique, et soit γ un chemin dans X. On pose $p = \gamma(0)$ et $q = \gamma(1)$. Alors,

$$[\gamma][\gamma^{-1}] = [e_p], \quad [\gamma^{-1}][\gamma] = [e_q],$$

où γ^{-1} est le chemin inverse de γ.

Démonstration. Considérons l'application $\psi : I \to I$ définie par

$$\psi(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } \ t \in [0; \frac{1}{2}], \\ 2 - 2t, & \text{si } \ t \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

L'application ψ est continue et, pour tout $t \in I$, on a

$$\gamma\gamma^{-1}(t) = \gamma(\psi(t)),$$
$$\gamma^{-1}\gamma(t) = \gamma^{-1}(\psi(t)).$$

Il reste à appliquer le Lemme 1.9 et la Proposition 1.3. □

2 Groupe fondamental

2.1 Définition et premières propriétés

Soit X un espace topologique non vide, et soit $x_0 \in X$ un point. Un *lacet* de base x_0 est un chemin $\gamma : I \to X$ tel que le point de départ et le point d'arrivée de γ coïncident avec x_0. Notons $\Omega_1(X, x_0)$ l'ensemble des lacets de base x_0 dans X, et notons $\pi_1(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'homotopie des lacets de base x_0. La multiplication de chemins munit chacun des deux ensembles $\Omega_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_0)$ d'une opération de multiplication.

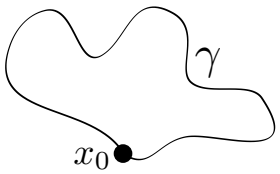


Figure 1.4 – Un lacet

Remarquons que $\Omega_1(X, x_0)$ est en bijection avec l'ensemble des applications continues de S^1 dans X qui envoient un point fixé s_0 de S^1 sur x_0 : on représente S^1 comme quotient de I par la relation d'équivalence identifiant les points extrémaux de I ; le point s_0 est l'image des points extrémaux par la projection canonique.

Proposition 1.11.
Pour tout espace topologique non vide X et pour tout point $x_0 \in X$, l'ensemble $\pi_1(X, x)$ muni de l'opération de multiplication (provenant de la multiplication de chemins) est un groupe.

Démonstration. D'après la Proposition 1.6, l'opération de multiplication sur $\pi_1(X, x_0)$ est associative.

Notons e_{x_0} le lacet constant de base x_0, c'est-à-dire, le chemin $e_{x_0} : I \to X$ tel que $e(t) = x_0$ pour tout $t \in I$. La Proposition 1.8 implique que la classe d'homotopie $\varepsilon = [e_{x_0}]$ de e_{x_0} vérifie les relations suivantes pour tout $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$:

$$\varepsilon\alpha = \alpha = \alpha\varepsilon.$$

De plus, pour toute classe $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, on peut choisir un répresentant γ de α et considérer la classe d'homotopie $[\gamma^{-1}]$ du lacet inverse γ^{-1}. On pose $\alpha^{-1} = [\gamma^{-1}]$. D'après la Proposition 1.10, on a $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon$ et $\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon$. □

Le groupe $\pi_1(X, x_0)$ s'appelle le *groupe fondamental* de X de base x_0.

Exemple. Soit n un nombre entier positif ou nul. Le groupe $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$ est trivial. (Ici $\mathbb{R}^n$ est muni de la topologie standard.) En effet, tout lacet de base 0 dans $\mathbb{R}^n$ est homotope au lacet constant e_0.

Proposition 1.12.
Soit X un espace topologique non vide, et soit $\gamma : I \to X$ un chemin. On pose $x = \gamma(0)$ et $y = \gamma(1)$. Alors, l'application $\varphi_\gamma : \pi_1(X, y) \to \pi_1(X, x)$ définie par

$$\alpha \mapsto [\gamma]\alpha[\gamma^{-1}]$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Montrons que φ_γ est un morphisme de groupes. Pour deux éléments quelconques α_1 et α_2 de $\pi_1(X, y)$, on a

$$\varphi_\gamma(\alpha_1\alpha_2) = [\gamma](\alpha_1\alpha_2)[\gamma^{-1}] = [\gamma]\alpha_1[\gamma^{-1}][\gamma]\alpha_2[\gamma^{-1}] = \varphi_\gamma(\alpha_1)\varphi_\gamma(\alpha_2).$$

De plus, l'application φ_γ est bijective, son inverse est l'application $\varphi_{\gamma^{-1}} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$. En effet,

$$(\varphi_{\gamma^{-1}} \circ \varphi_\gamma)(\alpha) = [\gamma^{-1}][\gamma]\alpha[\gamma^{-1}][\gamma] = \alpha$$

pour tout $\alpha \in \pi_1(X, y)$. De façon similaire, $\varphi_\gamma \circ \varphi_{\gamma^{-1}} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x)$ est l'identité. □

L'isomorphisme φ_γ, introduit ci-dessus, s'appelle *isomorphisme de changement de point de base* le long du chemin γ. L'isomorphisme φ_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ.

Corollaire 1.13.
Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs, et soient x et y deux points de X. Alors, les groupes $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, y)$ sont isomorphes. □

Pour les espaces connexes par arcs, on parle souvent du groupe fondamental sans préciser le point base.

On dit qu'un espace topologique non vide est *simplement connexe* si cet espace est connexe par arcs et son groupe fondamental est trivial. Comme nous avons vu ci-dessus, $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe pour tout entier n positif ou nul.

Proposition 1.14.
Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs. Alors, X est simplement connexe si et seulement si deux chemins quelconques dans X qui ont le même point de départ et le même point d'arrivée sont homotopes.

Démonstration. Supposons que X est simplement connexe. Soient x et y deux points de X, et soient γ_1 et γ_2 deux chemins reliant x et y. Alors, les lacets $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ et $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ sont homotopes aux lacets constants e_x et e_y, respectivement. Donc,

$$[\gamma_1] = [\gamma_1][\gamma_1^{-1}][\gamma_2] = [\gamma_2].$$

L'implication réciproque est immédiate. □

2.2 Applications continues et groupe fondamental

Soient X et Y deux espaces topologiques non vides, et soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ des points. A toute application continue $f : X \to Y$ telle que $f(x_0) = y_0$, nous allons associer un morphisme $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ des groupes fondamentaux $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(Y, y_0)$.

La construction est la suivante. A tout lacet γ de base x_0 dans X, on associe le lacet $f \circ \gamma$ de base y_0 dans Y. Si deux lacets γ_1 et γ_2 de base x_0 sont homotopes, alors les lacets $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ de base y_0 sont aussi homotopes. En effet, une homotopie H entre les lacets γ_1 et γ_2 produit une homotopie $f \circ H$ entre les lacets $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$. Par conséquent, on obtient une application f_* de $\pi_1(X, x_0)$ dans $\pi_1(Y, y_0)$.

Proposition 1.15.
L'application $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ est un morphisme de groupes.

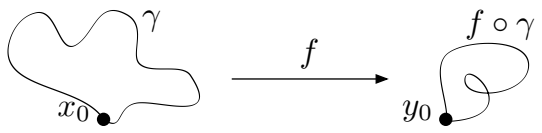


FIGURE 1.5 – Composition d'un lacet par une application continue

Démonstration. Soient α et α' deux éléments de $\pi_1(X, x_0)$, et soient γ et γ' des représentants de α et α', respectivement. Alors,

$$f_*(\alpha\alpha') = [f \circ (\gamma\gamma')] = [(f \circ \gamma)(f \circ \gamma')] = f_*(\alpha)f_*(\alpha').$$

□

On dit que f_* est le *morphisme induit* par f. L'énoncé suivant est immédiat.

PROPOSITION 1.16.
Soient X, Y et Z des espaces topologiques non vides, soit $x_0 \in X$ un point, et soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications continues. Alors,

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, g(f(x_0))).$$

De plus, si $\mathrm{id} : X \to X$ est l'identité, alors $\mathrm{id}_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ est aussi l'identité. □

COROLLAIRE 1.17.
Si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme, alors, pour tout point $x_0 \in X$, le morphisme induit $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ est un isomorphisme de groupes ayant $(f^{-1})_*$ pour inverse.

Démonstration. L'application $f^{-1} \circ f$ est l'identité $\mathrm{id}_X : X \to X$. Donc, le morphisme $(f^{-1})_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ est l'identité. De façon similaire, $f_* \circ (f^{-1})_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ est aussi l'identité. □

PROPOSITION 1.18.
Soit X un espace topologique non vide, et soit $x_0 \in X$ un point. Notons C la composante connexe par arcs de X telle que $x_0 \in C$. Alors, le morphisme

$$\mathrm{in}_* : \pi_1(C, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

induit par l'inclusion $\mathrm{in} : C \hookrightarrow X$ est un isomorphisme.

Démonstration. Tout lacet de base x_0 dans X est entièrement contenu dans C. Donc, le morphisme in_* est surjectif. Pour montrer que in_* est injectif, considérons un lacet γ de base x_0 dans X tel que γ soit homotope au lacet constant e_{x_0}. Notons $H : [0,1]\times[0,1] \to X$ une homotopie reliant γ et e_{x_0}. L'image de H est entièrement contenue dans C, donc H fournit une homotopie entre C et e_{x_0} vus comme lacets dans C. □

PROPOSITION 1.19.
Soient X et Y des espaces topologiques non vides, soit $x_0 \in X$ un point, et soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ des applications continues qui sont homotopes relativement à $\{x_0\} \subset X$. Alors,$f_* = g_*$.

Démonstration. Si $H : X \times I \to Y$ est une homotopie relative à $\{x_0\}$ entre f et g, alors, pour tout lacet γ de base x_0 dans X, l'homotopie $H \circ (\gamma \times Id_I)$ certifie que les lacets $f \circ \gamma$ et $g \circ \gamma$ de base $f(x_0) = g(x_0)$ sont homotopes (voir la Proposition 1.3). □

PROPOSITION 1.20.
Soient X et Y des espaces topologiques non vides, et soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ des points. Alors, l'application

$$P : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0),$$

définie par $P(\alpha) = ((\mathrm{pr}_X)_*(\alpha), (\mathrm{pr}_Y)_*(\alpha))$, est un isomorphisme.

Démonstration. L'application P est clairement un morphisme de groupes. Si $\gamma_X : I \to X$ est un lacet de base x_0 et si $\gamma_Y : I \to Y$ est un lacet de base y_0, alors $\gamma : I \to X \times Y$ définie par $\gamma(t) = (\gamma_X(t), \gamma_Y(t))$ est un lacet de base (x_0, y_0). Donc, l'application P est surjective. L'injectivité de P est un corollaire de la Proposition 1.4. □

2.3 Types d'homotopie

Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques X et Y. On dit que f est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application continue $g : Y \to X$ telle que $g \circ f$ soit homotope à $\mathrm{id}_X : X \to X$ et $f \circ g$ soit homotope à $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$.

On dit que deux espaces topologiques X et Y ont le *même type d'homotopie* s'il existe une équivalence d'homotopie $f : X \to Y$. La relation « avoir le même type d'homotopie » est une relation d'équivalence.

Exemples.

- Deux espaces topologiques homéomorphes ont toujours le même type d'homotopie.
- Soit n un nombre entier positif ou nul. L'espace $\mathbb{R}^n$ a le même type d'homotopie qu'un point. Pour vérifier cette affirmation, considérons l'application constante $f : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ et l'inclusion $g : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. L'application composée $f \circ g : \{0\} \to \{0\}$ est l'identité. L'application composée $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est homotope à $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: une homotopie $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ est donnée par $H(x, t) = tx$.
- Soit n un nombre entier strictement positif. L'espace topologique $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et la sphère S^{n-1} de dimension $n-1$ ont le même type d'homotopie. On représente S^{n-1} comme sphère unité dans $\mathbb{R}^n$. Pour f, on utilise la projection radiale de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur S^{n-1} : $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour g, on utilise l'inclusion de S^{n-1} dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La composée $f \circ g$ est l'identité sur S^{n-1}. La composée $g \circ f$ est homotope à l'idéntité sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ce qui est certifié par l'homotopie

  $$H : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

  définie par

  $$H(x, t) = (1 - t)\frac{x}{\|x\|} + tx.$$

On dit qu'un espace topologique est *contractile* s'il a le même type d'homotopie qu'un point. Par exemple, $\mathbb{R}^n$ est contractile pour tout entier n positif ou nul. De façon similaire, la boule unité

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

est contractile pour tout entier n positif ou nul.

PROPOSITION 1.21.
Soient X et Y deux espaces topologiques non vides et connexes par arcs qui ont le même type d'homotopie. Alors, leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.

Démonstration. Considérons deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $g \circ f$ soit homotope à l'identité $\mathrm{id}_X : X \to X$ et $f \circ g$ soit homotope à l'identité $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$. Soit $H : X \times I \to X$ une homotopie entre $g \circ f$ et $\mathrm{id}_X : X \to X$. Soit $x_0 \in X$ un point. On a deux morphismes

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)) \text{ et } g_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(x, g(f(x_0))).$$

Nous allons montrer que la composée

$$g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, g(f(x_0)))$$

est un isomorphisme. Plus précisement, nous allons montrer que $g_* \circ f_*$ coïncide avec l'isomorphisme φ_c de changement de point de base le long du chemin $c : I \to X$ défini par $c(t) = H(x_0, t)$ pour tout $t \in I$.

Soit $\gamma : I \to X$ un lacet de base x_0 dans X. Une homotopie $F : I \times I \to X$ entre les lacets $g \circ f \circ \gamma$ et $c\gamma c^{-1}$ est donnée par

$$F(s,t) = \begin{cases} c(3s), & \text{si } \ s \in [0; \frac{t}{3}], \\ H(\gamma(\frac{3}{3-2t}s - \frac{t}{3-2t}), t), & \text{si } \ s \in [\frac{t}{3}; 1 - \frac{t}{3}], \\ c(3-3s), & \text{si } \ s \in [1 - \frac{t}{3}; 1]. \end{cases}$$

Donc, $(g_* \circ f_*)([\gamma]) = [g \circ f \circ \gamma] = [c\gamma c^{-1}] = \varphi_c(\gamma)$. De façon similaire, on montre que la composée $f_* \circ g_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Y, f(g(f(x_0))))$ est aussi un isomorphisme. □

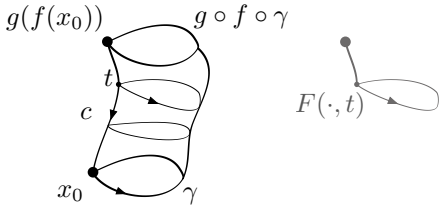


FIGURE 1.6 – Homotopie F

COROLLAIRE 1.22.
Tout espace topologique contractile est simplement connexe. □

2.4 Rétractes

Soit X un espace topologique, et soit $A \subset X$ un sous-espace. On dit que A est un *rétracte* de X s'il existe une application continue $r : X \to A$ telle que $r(a) = a$ pour tout point $a \in A$. Une telle application r s'appelle une *rétraction*.

Exemples.

- Pour tout espace topologique X, tout point de X est un rétracte de X.
- Pour deux nombres réels quelconques a et b tels que $a < b$, l'intervalle $[a, b]$ est un rétracte de $\mathbb{R}$. Par contre, l'intervalle ouvert $]a, b[$ n'est pas un rétracte de $\mathbb{R}$. On peut montrer facilement que tout rétracte d'un espace topologique séparé est fermé.

- La 0-sphère $S^0 = \{-1, 1\}$ n'est pas un rétracte de l'intervalle $D^1 = [-1, 1]$. En effet, l'existence d'une rétraction $r : D^1 \to S^0$ contredit le fait que $S^0 = r(D^1)$ n'est pas connexe.

PROPOSITION 1.23.
Soit $r : X \to A$ une rétraction, et soit $x_0 \in A$ un point. Notons $\mathrm{in} : A \hookrightarrow X$ l'inclusion de A dans X. Alors, le morphisme $r_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$ est surjectif et le morphisme $\mathrm{in}_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ est injectif.

Démonstration. L'application $r \circ \mathrm{in}$ coïncide avec $\mathrm{id}_A : A \to A$. Donc, $r_* \circ \mathrm{in}_*$ est l'identité $\pi_1(A, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$. Par conséquent, r_* est surjectif et in_* est injectif. □

On dit que $A \subset X$ est un *rétracte par déformation* de X s'il existe une rétraction $r : X \to A$ telle que la composition $\mathrm{in} \circ r$ de r et de l'inclusion $\mathrm{in} : A \hookrightarrow X$ soit homotope à l'identité $\mathrm{id}_X : X \to X$. Une telle application r s'appelle une *rétraction par déformation*. Cette notion est intermédiaire entre celle d'homéomorphisme et celle d'équivalence d'homotopie. On dit que $r : X \to A$ est une *rétraction forte par déformation* si $\mathrm{in} \circ r$ est homotope à l'identité $\mathrm{id}_X : X \to X$ relativement à A.

2.5 Groupe fondamental du cercle

Le but de cette section est de calculer le groupe fondamental du cercle S^1 (on représente S^1 comme cercle unité dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$).

Notons $\gamma^{(1)} : I \to S^1$ l'application définie par $\gamma^{(1)}(t) = \exp(2\pi \boldsymbol{i} t)$. C'est un lacet de base 1 dans S^1. On pose aussi $\gamma^{(n)}(t) = \exp(2\pi \boldsymbol{i} n t)$ pour tout $t \in I$ et tout entier n. On a $[\gamma^{(n)}] = [\gamma^{(1)}]^n$. Nous allons montrer que l'application $\mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1)$ définie par $n \mapsto [\gamma^{(n)}]$ est un isomorphisme de groupes.

PROPOSITION 1.24.
Soit $\gamma : I \to S^1$ un lacet de base 1 dans S^1, et soit $x_0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ un point. Il existe un unique chemin $\widetilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Exp} \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ et $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$, où $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ est l'application définie par $t \mapsto \exp(2\pi \boldsymbol{i} t)$.

Démonstration. L'unicité de $\widetilde{\gamma}$ est immédiate : la différence entre deux tels chemins est une application continue de I dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ (muni de la topologie discrète) ; cette différence est, donc, constante (égale à 0, car les points de départ des deux chemins coïncident).

Pour construire $\widetilde{\gamma}$, considérons un recouvrement ouvert

$$S^1 = (S^1 \setminus \{\boldsymbol{i}\}) \cup (S^1 \setminus \{-\boldsymbol{i}\})$$

de S^1. L'image inverse $\mathrm{Exp}^{-1}(S^1 \setminus \{\boldsymbol{i}\})$ est une réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, deux à deux disjoints, tels que la restriction de Exp sur chaque intervalle soit un homéomorphisme entre l'intervalle et $S^1 \setminus \{\boldsymbol{i}\}$; l'application inverse peut être décrite à l'aide de la branche appropriée du logarithme complexe. L'affirmation similaire est vraie aussi pour $S^1 \setminus \{-\boldsymbol{i}\}$.

Puisque l'intervalle I est compact, il peut être divisé en sous-intevalles par une collection finie de points $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = 1$ tels que l'image par γ de tout sous-intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, k-1$, soit entièrement contenue dans (au moins) un des ensembles $S^1 \setminus \{\boldsymbol{i}\}$ et $S^1 \setminus \{-\boldsymbol{i}\}$ (on peut choisir les points $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = 1$ de telle façon que la longueur de chaque sous-intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, k-1$, soit plus petit qu'un nombre de Lebesgue du recouvrement ouvert $I = \gamma^{-1}(S^1 \setminus \{\boldsymbol{i}\}) \cup \gamma^{-1}(S^1 \setminus -\{\boldsymbol{i}\})$ de l'intervalle I).

On définit l'application $\widetilde{\gamma}$ sur $[0, a_j]$ par récurrence sur j. Pour $j = 0$, on a $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$. Supposons que $\widetilde{\gamma}$ est déjà défini sur $[0, a_j]$, où $j = 0, \ldots, k-1$. On a $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset$

$S^1 \setminus \{\boldsymbol{i}\}$ ou $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset S^1 \setminus \{-\boldsymbol{i}\}$. Supposons, par exemple, que $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset S^1 \setminus \{\boldsymbol{i}\}$ (le deuxième cas est complètement similaire). Soit $V \subset \mathbb{R}$ la composante connexe de $\mathrm{Exp}^{-1}(S^1 \setminus \{\boldsymbol{i}\})$ telle que $\widetilde{\gamma}(a_j) \in V$. La restriction ρ de Exp sur V est un homéomorphisme entre V et $S^1 \setminus \{\boldsymbol{i}\}$. Sur l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, on considère la composée $\rho^{-1} \circ (\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]})$, cette application se recolle avec l'application $\widetilde{\gamma}$ déjà définie sur $[0, a_j]$ pour donner une application continue $\widetilde{\gamma}$ sur $[0, a_{j+1}]$. □

Le chemin $\widetilde{\gamma}$ de la Proposition 1.24 s'appelle *relèvement* de γ.

PROPOSITION 1.25.
Soit $\gamma : I \to S^1$ un lacet de base 1 dans S^1, et soit $\widetilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ un relèvement de γ. Alors, $\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0)$ est un nombre entier qui ne dépend pas du choix de point de départ de $\widetilde{\gamma}$.

Démonstration. Le nombre $\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0)$ est entier, car γ est un lacet et $\mathrm{Exp} \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$. Deux relèvements quelconques de γ diffèrent par une translation. □

La différence $\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0)$ s'appelle le *degré* de γ. Par exemple, pour tout entier n, le degré de $\gamma^{(n)}$ est égal à n.

PROPOSITION 1.26.
Soient $\gamma_1 : I \to S^1$ et $\gamma_2 : I \to S^1$ deux lacets homotopes de base 1 dans S^1. Alors, γ_1 et γ_2 ont le même degré.

Démonstration. Les arguments sont très similaires à ceux de la démonstration de la Proposition 1.24.

Soient $\widetilde{\gamma}_1 : I \to \mathbb{R}$ et $\widetilde{\gamma}_2 : I \to \mathbb{R}$ les relèvements de γ_1 et γ_2, respectivement, tels que $\widetilde{\gamma}_1(0) = \widetilde{\gamma}_2(0) = 0$. Soit $H : I \times I \to S^1$ une homotopie entre les lacets γ_1 et γ_2.

Puisque le carré $I \times I$ est compact, il peut être divisé en rectangles

$$R_{ij} = \{(s,t) \in I \times I \mid a_i \le s \le a_{i+1},\ b_j \le t \le b_{j+1}\},$$
$$i = 0, \ldots, k-1, \quad j = 0, \ldots, \ell - 1,$$

donnés par deux collections finies de points

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = 1,$$
$$0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_{\ell-1} < b_\ell = 1,$$

tels que l'image par H de tout rectangle R_{ij} soit entièrement contenue dans (au moins) un des ensembles $S^1 \setminus \{\boldsymbol{i}\}$ et $S^1 \setminus \{-\boldsymbol{i}\}$. Un relèvement de H, c'est-à-dire, une application continue $\widetilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{Exp} \circ \widetilde{H} = H$ et $\widetilde{H}(0,0) = 0$, peut être construit par une procédure récursive similaire à celle de la démonstration de la Proposition 1.24.

L'application $t \mapsto \widetilde{H}(0,t)$ est à valeurs entières, donc, constante sur l'intervalle I. De même façon, l'application $t \mapsto \widetilde{H}(1,t)$ est constante sur I. De plus, l'unicité de relèvement de chemins implique que $\widetilde{H}(s,0) = \widetilde{\gamma}_1(s)$ et $\widetilde{H}(s,1) = \widetilde{\gamma}_2(s)$ pour tout $s \in I$. Par conséquent, les chemins $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ sont homotopes, et les lacets γ_1 et γ_2 ont le même degré. □

La proposition 1.26 implique que, à tout élément $\alpha \in \pi_1(S^1, 1)$ on peut associer un degré $d(\alpha)$: c'est le degré de tout représentant de α.

PROPOSITION 1.27.
L'application $d : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$, qui associe à tout élément $\alpha \in \pi_1(S^1, 1)$ son degré $d(\alpha)$, est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. Montrons d'abord que $d : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ est une bijection. L' application d est clairement surjective : pour tout nombre entier n, on peut choisir un chemin $\delta : I \to \mathbb{R}$ qui relie 0 et n, et $\mathrm{Exp} \circ \delta$ est un lacet de base 1 et de degré n (on peut aussi prendre $\gamma^{(n)}$, c'est un lacet de degré n).

L'application $d : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ est injective. En effet, soit n un nombre entier, et soient α_1 et α_2 des éléments de degré n de $\pi_1(S^1, 1)$. Considérons des lacets γ_1 et γ_2 représentant α_1 et α_2, respectivement. Soient $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ les relèvements de γ_1 et γ_2, respectivement, reliant 0 et n. Alors, $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ sont homotopes (*cf.* Lemme 1.7) : une homotopie est donnée par

$$H(s, t) = (1 - t)\widetilde{\gamma}_1(s) + t\widetilde{\gamma}_2(s).$$

Par consésquent, l'application $\mathrm{Exp} \circ H$ certifie que les lacets γ_1 et γ_2 sont homotopes.

Montrons maintenant que $d : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes. Considérons des lacets γ_1 et γ_2 de base 1 dans S^1. Soit $\widetilde{\gamma}_1 : I \to \mathbb{R}$ le relèvement de γ_1 tel que $\widetilde{\gamma}_1(0) = 0$, et soit $\widetilde{\gamma}_2 : I \to \mathbb{R}$ le relèvement de γ_2 tel que $\widetilde{\gamma}_2(0) = \widetilde{\gamma}_1(1)$. Le degré $d(\gamma_1\gamma_2)$ est égal à $\widetilde{\gamma}_2(1)$. D'autre part, $d(\gamma_1) = \widetilde{\gamma}_1(1)$ et $d(\gamma_2) = \widetilde{\gamma}_2(1) - \widetilde{\gamma}_2(0) = \widetilde{\gamma}_2(1) - \widetilde{\gamma}_1(1)$. Donc, $d(\gamma_1\gamma_2) = d(\gamma_1) + d(\gamma_2)$. □

Nous avons montré que le groupe fondamental $\pi_1(S^1, 1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Corollaire 1.28.
Pour tout entier m strictement positif, le groupe fondamental de $(S^1)^m$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^m$. □

2.6 Quelques applications

La première application des résultats présentés ci-dessus est l'énoncé suivant.

Proposition 1.29.
Le cercle $S^1 \subset D^2$ n'est pas un rétracte de la boule $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

Démonstration. La boule D^2 est simplement connexe, et le groupe fondamental de S^1 est isomorphe $\mathbb{Z}$. Puisqu'il n'y a pas de morphisme surjectif du groupe trivial dans $\mathbb{Z}$, la Proposition 1.23 implique que S^1 n'est pas un rétracte de D^2. □

Corollaire 1.30 (Théorème de Brouwer).
Toute application continue $f : D^2 \to D^2$ a au moins un point fixe.

Démonstration. Supposons que $f : D^2 \to D^2$ est une application continue qui n'admet aucun point fixe. Alors, pour tout point $x \in D^2$, il existe un nombre réel $\lambda_x \geq 0$ tel que $\|x + \lambda_x(x - f(x))\| = 1$: le vecteur $x + \lambda_x(x - f(x))$ correspond au point d'intersection du cercle S^1 et de la demi-droite ayant le point $f(x)$ pour extremité et passant par le point x. L'application qui a tout point $x \in D^2$ associe $x + \lambda_x(x - f(x))$ est continue. (Vérifiez cette affirmation !) De plus, la restriction de cette application sur S^1 est l'identité $\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \to S^1$. Donc, cette application est une rétraction de D^2 sur S^1. Contradiction. □

2.7 Version faible du théorème de van Kampen

Le théorème de van Kampen est un outil important qui, dans certains cas, permet de calculer le groupe fondamental. Dans cette section, nous considérons une version faible du théorème de van Kampen.

PROPOSITION 1.31 (Théorème de VAN KAMPEN faible).
Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs. Soit $X = U_1 \cup U_2$ un recouvrement ouvert de X tel que U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ soient non vides et connexes par arcs. Soit $x_0 \in U_1 \cap U_2$ un point. Alors, le groupe $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par les images des groupes $\pi_1(U_1, x_0)$ et $\pi_1(U_2, x_0)$ sous les morphismes induits par les inclusions $U_1 \hookrightarrow X$ et $U_2 \hookrightarrow X$, respectivement.

Démonstration. Soit $\gamma : I \to X$ un lacet de base x_0. Comme dans la démonstration de la Proposition 1.24, on divise l'intervalle I en sous-intevalles par une collection finie de points

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = 1$$

tels que l'image par γ de tout sous-intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, k-1$, soit entièrement contenue dans (au moins) un des ensembles U_1 et U_2, et les images par γ de tous les points a_j, $j = 0, \ldots, k$, appartiennent à $U_1 \cap U_2$.

Pour tout entier j entre 0 et $k-1$, soit $\gamma_j : I \to X$ le chemin obtenu de la restriction de γ sur $[a_j, a_{j+1}]$ par un changement affine de paramètre :

$$\gamma_j(t) = \gamma((a_{j+1} - a_j)t + a_j).$$

De plus, pour tout entier j entre 1 et $k-1$, choisissons un chemin $\delta_j : I \to U_1 \cap U_2$ qui relie x_0 et $\gamma(a_j)$. Il reste à remarquer que

$$[\gamma] = [\gamma_0\delta_1^{-1}\delta_1\gamma_1\delta_2^{-1}\delta_2\gamma_2 \ldots \delta_{k-1}^{-1}\delta_{k-1}\gamma_{k-1}],$$

et l'image de chaque chemin $\gamma_0\delta_1^{-1}$, $\delta_1\gamma_1\delta_2^{-1}$, …, $\delta_{k-2}\gamma_{k-1}\delta_{k-1}^{-1}$, $\delta_{k-1}\gamma_{k-1}$ est entièrement contenue dans U_1 ou U_2. □

COROLLAIRE 1.32.
Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs. Supposons que X possède un recouvrement ouvert $X = U_1 \cup U_2$ tel que U_1 et U_2 soient simplement connexes et $U_1 \cap U_2$ soit non vide et connexe par arcs. Alors, X est simplement connexe. □

COROLLAIRE 1.33.
Soit $n \geq 2$ un nombre entier. Alors, la sphère S^n est simplement connexe.

Démonstration. On identifie S^n avec la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et on note N et S les points $(0, \ldots, 0, 1)$ et $(0, \ldots, 0, -1)$ de S^n. On a un recouvrement ouvert $S^n = U_1 \cup U_2$ de S^n, où $U_1 = S^n \setminus \{S\}$ et $U_2 = S^n \setminus \{N\}$. Par projection stéréographique, chacun des ouverts U_1 et U_2 est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. De plus, par projection stéréographique, $U_1 \cap U_2$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, c'est-à-dire, homéomorphe à $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Donc, $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs, et on peut utiliser le Corollaire 1.32. □

La Figure 1.7 représente un autre choix possible pour les ouverts U_1 et U_2 dans la démonstration du Corollaire 1.33. On fixe un nombre $0 < \varepsilon < 1$ et on pose

$$U_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_n < \varepsilon\} \quad \text{et} \quad U_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_n > -\varepsilon\}.$$

PROPOSITION 1.34.
Soit $m > 2$ un nombre entier. Alors, $\mathbb{R}^m$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme, on obtient un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$, ce qui est impossible car $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ a le type d'homotopie de S^1 (donc, le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$) et $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ a le type d'homotopie de S^{m-1} (donc, $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ est simplement connexe). □

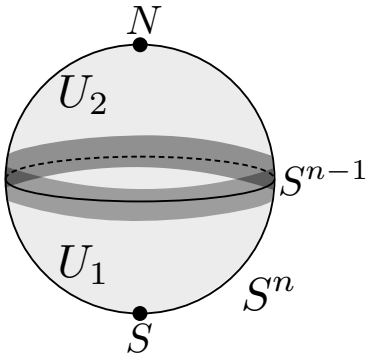


FIGURE 1.7 – Recouvrement de la sphère par deux ouverts simplement connexes

Chapitre 2

Revêtements

1 Définition et quelques propriétés

1.1 Définition

Soient E et B des espaces topologiques, et soit $p : E \to B$ une application continue. Supposons que l'application p est surjective et que, pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage ouvert $U \subset B$ de b tel que l'image inverse $p^{-1}(U)$ de U soit une réunion d'ouverts $U_i \subset E$ (où les indices i parcourent un certain ensemble F), deux à deux disjoints, et la restriction de p sur chaque ouvert U_i soit un homéomorphisme entre U_i et U. Dans ce cas, on dit que $p : E \to B$ est un *revêtement* de B. L'espace B s'appelle la *base* du revêtement p, l'espace E s'appelle l'*espace total* de p. Pour tout point $b \in B$, l'image inverse $p^{-1}(b)$ de b s'appelle la *fibre* de b. L'ensemble F peut être identifié avec la fibre de b. Un voisinage U qui apparaît dans la définition est dit *trivialisant* le revêtement p (cette terminologie peut être expliquée par la Proposition 2.1 ci-dessous).

Si $p : E \to B$ est un revêtement et $A \subset B$ est un sous-espace, une *section* de p au-dessus de A est une application continue $s : A \to E$ telle que $p \circ s$ coïncide avec l'identité sur A. Soit $b \in B$ un point, et soit x un point de $p^{-1}(b)$. Considérons un voisinage $U \ni b$ trivialisant le revêtement p. Le point x appartient à U_i pour un certain indice $i \in F$. Il existe une section $s_i : U \to E$ de p au-dessus de U telle que $U_i = s_i(U)$ (en particulier, $x \in s_i(U)$).

PROPOSITION 2.1.
Une application continue $p : E \to B$ est un revêtement si et seulement si, pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage $U \subset B$ de b, un espace discret non vide F et un

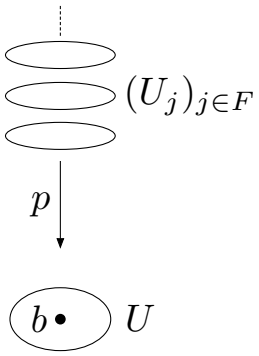


FIGURE 2.1 – Voisinage trivialisant

homéomorphsime $\Psi : p^{-1}(U) \to U \times F$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times F \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}} & \\ & U & \end{array}$$

(Ici $\mathrm{pr} = \mathrm{pr}_U$ est la projection de $U \times F$ sur U.)

Démonstration. Supposons que $p : E \to B$ est un revêtement. Soit $b \in B$ un point. Considérons un voisinage ouvert U de b tel que U soit un voisinage trivialisant le revêtement p. On a $p^{-1}(U) = \bigcup_{i\in F} U_i$, où F est un ensemble, les ouverts $U_i \subset E$ sont deux à deux disjoints et, pour tout $i \in F$, la restriction de p sur U_i est un homéomorphisme entre U_i et U. Munissons F de la topologie discrète et définissons une application $\Psi : p^{-1}(U) \to U \times F$ par $x \mapsto (p(x), i)$, où $i \in F$ est tel que $x \in U_i$. Cette application est un homéomorphisme qui vérifie $(\mathrm{pr} \circ \Psi)(x) = p(x)$ pour tout $x \in p^{-1}(U)$: son inverse est $(b', i) \mapsto s_i(b')$.

Pour démontrer l'implication réciproque, remarquons qu'un voisinage U vérifiant la condition imposée contient un voisinage ouvert trivialisant le revêtement. □

L'application Ψ de la Proposition 2.1 s'appelle *trivialisation locale* de p au-dessus de U.

Exemples.

(1) Pour tout espace topologique B et pour tout espace discret non vide F, le *revêtement trivial standard* de B ayant F pour fibre est l'application de projection $\mathrm{pr} : B \times F \to B$.

(2) L'application $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ définie par $t \mapsto \exp(2\pi \boldsymbol{i} t)$ est un revêtement (pour des voisinages trivialisants, on peut prendre, par exemple, $S^1 \setminus \{\boldsymbol{i}\}$ et $S^1 \setminus \{-\boldsymbol{i}\}$; *cf.* Section 2.5 du premier chapitre).

Question. La projection $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $(x, y) \mapsto x$, est-elle un revêtement de $\mathbb{R}$?

Si $p : E \to B$ est un revêtement, $b \in B$ est un point, et $U \ni b$ est un voisinage trivialisant le revêtement p, alors la restriction de p sur $p^{-1}(U)$, vue comme application $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$, s'identifie avec le revêtement trivial de U ayant $p^{-1}(b)$ pour fibre. Les ouverts $U_i \subset E$ pour lesquels $p|_{p^{-1}(U)}$ fournit un homéomorphsime avec U s'appellent les *feuillets* de p au-dessus de U.

1.2 Premières propriétés

Dans cette section, on démontre quelques propriétés des revêtements.

PROPOSITION 2.2.
Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ des revêtements. Alors, $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ est aussi un revêtement.

Démonstration. Soit $(b, b') \in B \times B'$ un point. On pose $F = p^{-1}(b)$ et $F' = (p')^{-1}(b')$. Considérons un voisinage ouvert $U \subset B$ de b trivialisant le revêtement p et un voisinage ouvert $U' \subset B'$ de b' trivialisant le revêtement p'. Alors, $U \times U' \subset B \times B'$ est un voisinage ouvert de (b, b'). De plus, on a des homéomorphismes

$$\Psi : p^{-1}(U) \to U \times F,$$
$$\Psi' : (p')^{-1}(U') \to U' \times F'$$

tels que $\mathrm{pr} \circ \Psi = p|_{p^{-1}(U)}$ et $\mathrm{pr}' \circ \Psi' = p'|_{(p')^{-1}(U')}$, où

$$\mathrm{pr} : U \times F \to U \text{ et } \mathrm{pr}' : U' \times F' \to U'$$

sont les projections. Donc,

$$\Psi \times \Psi' : p^{-1}(U) \times (p')^{-1}(U') = (p \times p')^{-1}(U \times U') \to (U \times U') \times (F \times F')$$

est un homéomorphisme tel que

$$(\mathrm{pr} \times \mathrm{pr}') \circ (\Psi \times \Psi') = (p \times p')|_{(p \times p')^{-1}(U \times U')} .$$

Par conséquent, $p \times p'$ est un revêtement. □

PROPOSITION 2.3.
Soit $p : E \to B$ un revêtement. On a les affirmations suivantes.
(1) Si $A \subset B$ est un sous-espace topologique, alors

$$p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$$

est un revêtement.
(2) Si B est séparé, alors E est aussi séparé.
(3) Si B est connexe, alors toutes les fibres de p ont le même cardinal.
(4) Si E et B sont compacts, alors les fibres de p sont finies.

Démonstration. L'affirmation (1) est immédiate.

Pour démontrer l'affirmation (2), considérons deux points x et y de E. Si $p(x) = p(y)$, alors posons $b = p(x) = p(y)$ et considérons un voisinage ouvert $U \ni b$ trivialisant le revêtement p. Parmi les feuillets U_i au-dessus de U, il y deux ouverts disjoints U_x et U_y tels que $x \in U_x$ et $y \in U_y$. Si les points $b^{(1)} = p(x)$ et $b^{(2)} = p(y)$ sont distincts, on peut trouver des voisinages trivialisants $U^{(1)}$ et $U^{(2)}$ de $b^{(1)}$ et $b^{(2)}$, respectivement, tels que $U^{(1)} \cap U^{(2)} = \varnothing$. Ceci donne deux voisinages disjoints $U_x^{(1)}$ et $U_y^{(2)}$ de x et y, respectivement.

(3) Soit $b \in B$ un point, et soit $U \ni b$ un voisinage trivialisant le revêtement p. Pour chaque point de U, la fibre de ce point est un bijection avec l'ensemble $F = p^{-1}(b)$. On en déduit que l'application $b' \mapsto \mathrm{card}\ p^{-1}(b')$, qui associe à tout point $b' \in B$ le cardinal $\mathrm{card}\ p^{-1}(b')$ de $p^{-1}(b')$, est localement constante sur B. Puisque B est connexe, on obtient que l'application $b' \mapsto \mathrm{card}\ p^{-1}(b')$ est constante sur B.

(4) Soit $b \in B$ un point. Le sous-ensemble $F = p^{-1}(b) \subset E$ est fermé. Puisque E est compact, le fermé F est aussi compact. Puisque F est discret, on obtient que F est fini. □

Soit $p : E \to B$ un revêtement tel que B soit connexe. Si les fibres de p sont finies, le nombre de points de chaque fibre s'appelle le *nombre de feuillets* du revêtement p. Sinon, on dit que le nombre de feuillets de p est infini.

Une application $f : X \to Y$ est un *homéomorphisme local* si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $f(U) \subset Y$ soit un ouvert et la restriction $f|_U$ de f sur U, vue comme application de U dans $f(U)$, soit un homéomorphisme.

PROPOSITION 2.4.
Tout revêtement est un homéomorphisme local.

Démonstration. Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soit $x \in E$ un point. Posons $F = p^{-1}(p(x))$ et considérons un voisinage ouvert $U \ni p(x)$ trivialisant le revêtement p. On a un homéomorphisme $\Psi : p^{-1}(U) \to U \times F$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times F \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}} & \\ & U & \end{array}$$

Le point x appartient à l'ouvert $U_x = \Psi^{-1}(U \times \{x\})$. La section $s : U \to E$ définie par $b \mapsto \Psi^{-1}(b, x)$ est l'inverse de $p|_{U_x}$ (vue comme application de U_x dans U). Donc, $p|_{U_x}$ fournit un homéomorphisme entre U_x et U. □

L'énoncé reciproque à celui de la Proposition 2.4 est faux : il existe des homéomorphismes locaux qui ne sont pas des revêtements (essayez de trouver un exemple).

PROPOSITION 2.5.
Soit E un espace topologique muni d'une opération totalement discontinue d'un groupe topologique discret G. Alors, l'application quotient

$$p : E \to E/G$$

est un revêtement.

Démonstration. Par définition d'une opération de groupe totalement discontinue, tout point $x \in E$ admet un voisinage ouvert $V \subset E$ tel que $(g \cdot V) \cap V = \varnothing$ pour tout élément $g \in G$ différent de l'élément neutre. De plus, la projection p est ouverte. Donc, $p|_V : V \to U$, où $U = p(V)$, est un homéomorphisme. L'application

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &\to U \times G \\ x &\mapsto (p(x), g_x), \end{aligned}$$

où g_x est l'unique élément de G tel que $(g_x)^{-1} \cdot x \in V$, est une trivialisation locale de p au-dessus de U. □

1.3 Relèvement de chemins et d'homotopies

Soit $p : E \to B$ un revêtement. Dans cette section, nous allons commencer à étudier le problème du relèvement d'applications continues $f : X \to B$ par rapport à p. Nous serons plus particulièrement intéressés par les relèvements de chemins et d'homotopies.

LEMME 2.6.
Soient $p : E \to B$ un revêtement, X un espace topologique connexe, et $f : X \to B$ une application continue. Alors, deux relèvements de f par rapport à p qui coïncident

en un point sont égaux.

Démonstration. Soient $\widetilde{f} : X \to E$ et $\widetilde{f}' : X \to E$ deux relèvements de f qui coïncident en un point $x_0 \in X$. On a $X = X_1 \cup X_2$, où $X_1 = \{x \in X \mid \widetilde{f}(x) = \widetilde{f}'(x)\}$ et $X_2 = \{x \in X \mid \widetilde{f}(x) \neq \widetilde{f}'(x)\}$ sont deux sous-ensembles disjoints de X.

Soient $x \in X$ un point, $U \subset B$ un voisinage ouvert de $f(x)$ tel que U trivialise le revêtement p, et notons V et V' les feuillets au-dessus de U tels que $\widetilde{f}(x) \in V$ et $\widetilde{f}'(x) \in V'$.

Si $x \in X_1$, alors $V = V'$ et $\widetilde{f}^{-1}(V) \cap (\widetilde{f}')^{-1}(V) \ni x$ est un voisinage ouvert entièrement contenu dans X_1. Donc, X_1 est un ouvert.

Si $x \in X_2$, alors $\widetilde{f}^{-1}(V) \cap (\widetilde{f}')^{-1}(V') \ni x$ est un voisinage ouvert entièrement contenu dans X_2. Donc, X_2 est un ouvert. Puisque X est connexe et $x_0 \in X_1$, on obtient que X_2 est vide. □

PROPOSITION 2.7 (Relèvement des chemins).

Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soient $x_0 \in E$ et $b_0 \in B$ des points tels que $p(x_0) = b_0$. Alors, pour tout chemin $\gamma : I \to B$ tel que $\gamma(0) = b_0$, il existe un unique relèvement $\widetilde{\gamma}$ de γ (par rapport à p) tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$, autrement dit, un unique chemin $\widetilde{\gamma} : I \to E$ tel que $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ et $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$.

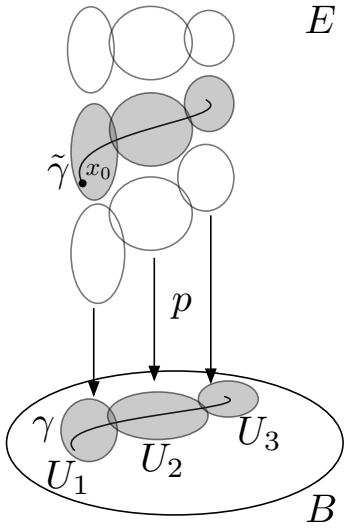


FIGURE 2.2 – Relèvement d'un chemin

Démonstration. L'unicité est un corollaire du Lemme 2.6. La démonstration d'existence est complètement similaire à celle de la Proposition 1.24. Considérons un recouvrement ouvert de B par des voisinages ouverts trivialisant le revêtement p.

Puisque l'intervalle I est compact, il peut être divisé en sous-intevalles par une collection finie de points $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = 1$ tels que l'image par γ de tout sous-intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, k-1$, soit entièrement contenue dans (au moins) un des éléments du recouvrement.

On démontre l'existence et l'unicité de relèvement $\widetilde{\gamma}$ sur $[0, a_j]$ par récurrence sur j. Pour $j = 0$, on a $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$. Supposons que $\widetilde{\gamma}$ est déjà défini sur $[0, a_j]$, où $j = 0, \ldots, k-1$. L'image $\gamma([a_j, a_{j+1}])$ est entièrement contenu dans un élément $U^{(j)}$ du recouvrement. Soit $U_i^{(j)} \subset E$ le feuillet au-dessus de $U^{(j)}$ tel que $\widetilde{\gamma}(a_j) \in U_i^{(j)}$. Sur l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, on considère la composée $s_j \circ (\gamma|_{[a_j; a_{j+1}]})$, où $s_j : U^{(j)} \to U_i^{(j)}$ est la section de p ayant $U_i^{(j)}$ pour image. Cette application se recolle avec l'application $\widetilde{\gamma}$ déjà définie sur $[0, a_j]$ pour donner une application continue $\widetilde{\gamma}$ sur $[0, a_{j+1}]$. □

Si, dans la Proposition 2.7, on remplace l'hypothèse « $p : E \to B$ un revêtement » par « $p : E \to B$ est un homéomorphisme local », l'énoncé devient faux (essayez de trouver un contre-exemple).

Si $\gamma : I \to B$ est un lacet de base $b_0 \in B$ et $x_0 \in E$ est un point tel que $p(x_0) = b_0$, le relèvement $\widetilde{\gamma}$ de γ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$ n'est pas forcement un lacet. Par exemple, dans le cas du revêtement $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ (voir la Section 2.5 du premier chapitre), un relèvement d'un lacet γ de base $1 \in S^1$ est un lacet si et seulement si γ est de degré 0.

Proposition 2.8 (Relèvement d'homotopies).

Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soient $x_0 \in E$ et $b_0 \in B$ des points tels que $p(x_0) = b_0$. Soient $\gamma : I \to B$ et $\delta : I \to B$ des chemins homotopes tels que $\gamma(0) = b_0$, et soient $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\delta}$ les relèvements de γ et δ, respectivement, tels que $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{\delta}(0) = x_0$. Alors, $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\delta}$ sont aussi homotopes. En particulier, $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\delta}(1)$.

Démonstration. A nouveau, la démonstration est complètement similaire à celle de la Proposition 1.24. Considérons un recouvrement ouvert de B par des voisinages ouverts trivialisant le revêtement p. Soit $H : I \times I \to B$ une homotopie entre les chemins γ et δ.

Puisque le carré $I \times I$ est compact, il peut être divisé en rectangles

$$R_{ij} = \{(s,t) \in I \times I \mid a_i \leq s \leq a_{i+1},\ b_j \leq t \leq b_{j+1}\},$$
$$i = 0, \ldots, k-1, \quad j = 0, \ldots, \ell - 1,$$

donnés par deux collections finies de points

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = 1,$$
$$0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_{\ell-1} < b_\ell = 1,$$

tels que l'image par H de tout rectangle R_{ij} soit entièrement contenue dans (au moins) un des éléments du recouvrement de B. Un relèvement $\widetilde{H}$ de H tel que $\widetilde{H}(0,0) = x_0$ peut être construit par une procédure récursive similaire à celle de la démonstration de la Proposition 2.7. Il reste à vérifier que $\widetilde{H}$ est une homotopie entre les chemins $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\delta}$.

Considérons le chemin $\iota_0 : t \mapsto \widetilde{H}(0,t)$. Ce chemin est un relèvement du chemin constant e_{b_0}. Donc, ι_0 est le chemin constant e_{x_0}. De même façon, le chemin $\iota_1 : t \mapsto \widetilde{H}(1,t)$ est aussi constant. De plus, l'unicité de relèvement de chemins implique que $\widetilde{H}(s,0) = \widetilde{\gamma}(s)$ et $\widetilde{H}(s,1) = \widetilde{\delta}(s)$ pour tout $s \in I$. Par conséquent, $\widetilde{H}$ est une homotopie entre les chemins $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\delta}$. □

Corollaire 2.9.

Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soit $b_0 \in B$ un point. Si un lacet $\gamma : I \to B$ de base b_0 admet un relèvement qui n'est pas un lacet, alors γ n'est pas homotope au lacet constant e_{b_0}. □

Le Corollaire 2.9 implique l'énoncé suivant.

Corollaire 2.10.

Soit B un espace topologique non vide et connexe par arcs. Supposons qu'il existe un revêtement $p : E \to B$ tel que p ne soit pas un homéomorphisme et E soit connexe par arcs. Alors, B n'est pas simplement connexe.

Démonstration. Soit $b_0 \in B$ un point. Si $p^{-1}(b_0)$ ne contient qu'un seul point, alors le nombre de feuillets du revêtement p est égal à 1, et p est un homéomorphisme, ce qui est impossible.

Donc, $p^{-1}(b_0)$ contient des points distincts x et y. Considérons un chemin $\eta : I \to E$ qui relie x et y. On obtient que le lacet $p \circ \eta$ de base b_0 n'est pas homotope au lacet constant e_{b_0}. Par conséquent, B n'est pas simplement connexe. □

2 Revêtements et groupe fondamental

2.1 Sous-groupe déteminé par un point

Le calcul du groupe fondamental du cercle (voir la Section 2.5 du premier chapitre) indique qu'il y a des relations importantes entre revêtements et groupe fondamental. Dans ce chapitre, nous allons étudier ces relations.

Proposition 2.11.
Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soit $x_0 \in E$ un point. Posons $b_0 = p(x_0)$. Alors, le morphisme

$$p_* : \pi_1(E, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

induit par p est injectif.

Démonstration. Soit γ un lacet de base x_0 dans E tel que la classe $[\gamma] \in \pi_1(E, x_0)$ de γ soit dans le noyau de p_*. Le lacet $p \circ \gamma$ est homotope au lacet constant e_{b_0}. Soit $H : I \times I \to B$ une homotopie des lacets $p \circ \gamma$ et e_{b_0}. Le lacet γ est l'unique relèvement de $p \circ \gamma$ tel que le point de départ de relèvement soit x_0. Le relevé $\widetilde{H}$ de H tel que $\widetilde{H}(0, 0) = x_0$ est une homotopie du relevé γ de $p \circ \gamma$ à celui de e_{b_0}, c'est-à-dire, au lacet constant e_{x_0}. Donc, les lacets γ et e_{x_0} sont homotopes. □

On dit que le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$ est le *sous-groupe déterminé* par x_0. Remarquons que si on choisit un point $x_1 \in p^{-1}(b_0)$ différent de x_0, le sous-groupe déterminé par x_1 ne coïncide pas forcement avec celui déterminé par x_0.

Proposition 2.12.
Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soient x_0 et x_1 des points de E qui appartiennent à une composante connexe par arcs de E et tels que $p(x_0) = p(x_1)$. Posons $b_0 = p(x_0)$. Alors, les sous-groupes $p_*(\pi_1(E, x_0))$ et $p_*(\pi_1(E, x_1))$ sont conjugués dans $\pi_1(B, b_0)$: il existe un élément $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$ tel que

$$p_*(\pi_1(E, x_1)) = \alpha \, p_*(\pi_1(E, x_0)) \, \alpha^{-1}.$$

Réciproquement, pour tout élément $\alpha' \in \pi_1(B, b_0)$, il existe un point $x_1' \in p^{-1}(b_0)$ tel que

$$p_*(\pi_1(E, x_1')) = \alpha' \, p_*(\pi_1(E, x_0)) \, \alpha'^{-1}.$$

Démonstration. Soit $\gamma : I \to E$ un chemin dont le point de départ coïncide avec x_1 et le point d'arrivée coïncide avec x_0. Soit

$$\varphi_\gamma : \pi_1(E, x_0) \to \pi_1(E, x_1)$$

l'isomorphisme de changement de point de base le long du chemin γ.

Le chemin $p \circ \gamma$ est un lacet de base b_0, et on pose $\alpha = [p \circ \gamma]$. L'élément $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$ définit un automorphisme intérieur

$$T_\alpha : \pi_1(B, b_0) \to \pi_1(B, b_0), \quad \beta \mapsto \alpha\beta\alpha^{-1}.$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E, x_0) & \xrightarrow{\varphi_\gamma} & \pi_1(E, x_1) \\ \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ \pi_1(B, b_0) & \xrightarrow{T_\alpha} & \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

En effet, soit $\delta : I \to E$ un lacet de base x_0. On a

$$(p_* \circ \varphi_\gamma)([\delta]) = p_*([\gamma\delta\gamma^{-1}]) = [p \circ \gamma][p \circ \delta][p \circ \gamma^{-1}]$$
$$= \alpha\ p_*([\delta])\ \alpha^{-1} = (T_\alpha \circ p_*)([\delta]).$$

Puisque φ_γ est un isomorphisme, on obtient que

$$T_\alpha(p_*(\pi_1(E, x_0))) = p_*(\pi_1(E, x_1)).$$

Réciproquement, choisissons un élément $\alpha' \in \pi_1(B, b_0)$. Soit $\overline{\gamma}' : I \to B$ un lacet qui représente la classe $(\alpha')^{-1}$, et soit $\gamma' : I \to E$ le relèvement de $\overline{\gamma}'$ tel que $\gamma'(0) = x_0$. Posons $x_1' = \gamma'(1)$. Les arguments présentés ci-dessus montrent que

$$p_*(\pi_1(E, x_1')) = \alpha'\ p_*(\pi_1(E, x_0))\ \alpha'^{-1}.$$

□

Corollaire 2.13.
Soit $p : E \to B$ un revêtement dont l'espace total E est connexe par arcs. Soit $b_0 \in B$ un point, et soit $G \subset \pi_1(B, b_0)$ le sous-groupe déterminé par un point $x_0 \in p^{-1}(b_0)$. Alors, un sous-groupe $G' \subset \pi_1(B, b_0)$ est déterminé par un des points de $p^{-1}(b_0)$ si et seulement si les sous-groupes G et G' sont conjugués. □

Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soit $b_0 \in B$ un point. Notons $F = p^{-1}(b_0)$ la fibre au-dessus de b_0. Considérons un point $x \in F$ et un élément $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$. Soit $\gamma : I \to B$ un lacet qui représente la classe α. On note $x\alpha = \widetilde{\gamma}(1) \in F$ le point d'arrivée du relèvement $\widetilde{\gamma} : I \to E$ de γ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x$ (la Proposition 2.8 implique que le point d'arrivée du relèvement ne dépend pas du choix de représentant de la classe α).

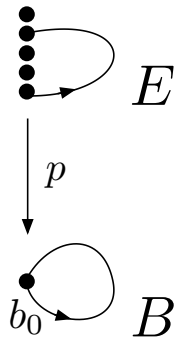


Figure 2.3 – Action du $\pi_1(B, b_0)$ la fibre $p^{-1}(b_0)$

Proposition 2.14.
L'application $(\alpha, x) \mapsto x\alpha$ est une action à droite du groupe fondamental $\pi_1(B, b_0)$ sur la fibre F.

Démonstration. Soient $\gamma : I \to B$ et $\gamma' : I \to B$ deux lacets de base b_0. Le relèvement $\widetilde{\gamma\gamma'}$ de $\gamma\gamma'$ tel que $\widetilde{\gamma\gamma'}(0) = x$ est le produit du relèvement $\widetilde{\gamma}$ de γ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x$ et du relèvement $\widetilde{\gamma}'$ de γ' tel que $\widetilde{\gamma}'(0) = \widetilde{\gamma}(1)$. Par conséquent,

$$x([\gamma][\gamma']) = (x[\gamma])[\gamma'].$$

De plus, le relèvement d'origine x du lacet constant e_{b_0} est le lacet constant e_x. Donc,

$$x\varepsilon = x$$

pour tout $x \in F$ (ici, ε est l 'élément neutre de $\pi_1(B, b_0)$). □

PROPOSITION 2.15.
Le stabilisateur d'un point $x \in F$ par l'action de $\pi_1(B, b_0)$ sur F est le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x)) \subset \pi_1(B, b_0)$ déterminé par le point x.

Démonstration. Soit $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$ un élément tel que $x\alpha = x$. Considérons un lacet $\gamma : I \to B$ qui représente α. Soit $\widetilde{\gamma} : I \to E$ le relèvement d'origine x de γ. Puisque $x\alpha = x$, le chemin $\widetilde{\gamma}$ est un lacet de base x. Donc, $\alpha \in p_*(\pi_1(E, x))$.

Réciproquement, soit $\beta \in \pi_1(E, x)$, et soit $\delta : I \to E$ un lacet qui représente la classe β. Alors, δ est le relèvement d'origine x de $p \circ \delta$, d'où $xp_*(\beta) = x$. □

PROPOSITION 2.16.
Soit $p : E \to B$ un revêtement dont la base B est connexe par arcs, et soit $b_0 \in B$ un point. On pose $F = p^{-1}(b_0)$, et on note $\pi_0(E)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de E. Alors, l'application $F \to \pi_0(E)$ qui à tout point $x \in F$ associe la composante connexe qui contient x induit une bijection

$$F/\pi_1(B, b_0) \simeq \pi_0(E)$$

entre $\pi_0(E)$ et l'ensemble des orbites de $\pi_1(B, b_0)$ dans F.

Démonstration. L'application $F \to \pi_0(E)$ est surjective. En effet, si $y \in E$ est un point, on peut relier $p(y)$ et b_0 par un chemin $\gamma : I \to B$. Le relèvement $\widetilde{\gamma} : I \to E$ d'origine y de γ a un point de F comme point d'arrivée. Donc, toute composante connexe par arcs de E contient au moins un point de F.

Considérons deux points x et x' de F. S'il existe un chemin $\delta : I \to E$ qui relie x et x', on a $x' = x[p \circ \delta]$. Réciproquement, s'il existe un élément $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$ tel que $x' = x\alpha$, le relèvement d'origine x d'un représentant quelconque de α fournit un chemin entre les points x et x'. □

COROLLAIRE 2.17.
Soit $p : E \to B$ un revêtement dont la base B est connexe par arcs, et soit $b_0 \in B$ un point. L'espace total E de p est connexe par arcs si et seulement si l'action de $\pi_1(B, b_0)$ sur $p^{-1}(b_0)$ est transitive. □

PROPOSITION 2.18.
Soit $p : E \to B$ un revêtement dont l'espace total E est connexe par arcs, et soit $b_0 \in B$ un point. On pose $F = p^{-1}(b_0)$. Alors, pour tout point $x \in F$, l'application de $\pi_1(B, b_0)$ dans F définie par $\alpha \mapsto x\alpha$ induit une bijection

$$p_*(\pi_1(E, x))\backslash\pi_1(B, b_0) \simeq F$$

entre F et l'ensemble des classes à droite de $\pi_1(B, b_0)$ modulo $p_*(\pi_1(E, x))$.

Démonstration. L'énoncé est un corollaire de la Proposition 2.15 et du Corollaire 2.17. □

COROLLAIRE 2.19.
Soit $p : E \to B$ un revêtement dont l'espace total E est connexe par arcs, et soit $b_0 \in B$ un point. Soit n un nombre entier strictement positif. Alors, p est un revêtement à n feuillets si et seulement si, pour tout point $x \in p^{-1}(b_0)$, le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x))$ est d'indice n dans $\pi_1(B, b_0)$. □

2.2 Revêtements reguliers

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux revêtements dont l'espace total est connexe par arcs et qui sont liés aux sous-groupes distingués du groupe fondamental de la base.

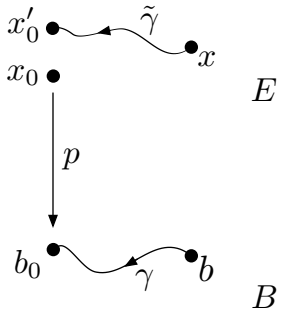
PROPOSITION 2.20.
Soit $p : E \to B$ un revêtement dont l'espace total E est connexe par arcs. Soit $b_0 \in B$ un point, et soit $x_0 \in p^{-1}(b_0)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$ est distingué ;
(2) pour tout point $x \in p^{-1}(b_0)$, le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x))$ coïncide avec $p_*(\pi_1(E, x_0))$;
(3) pour tout point $x \in E$, le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x)) \subset \pi_1(B, p(x))$ est distingué ;
(4) pour tout lacet $\gamma : I \to B$ de base b_0, soit tout relêvement (par rapport à p) de γ est un lacet, soit tout relèvement de γ n'est pas un lacet.

Démonstration. Le Corollaire 2.13 implique que les conditions (1) et (2) sont équivalentes.

La Proposition 2.15 implique que les conditions (2) et (4) sont équivalentes.

Clairement, la condition (3) implique la condition (1). Réciproquement, supposons que le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$ est distingué, considérons un point $x \in E$, et posons $b = p(x)$. Soit $\gamma : I \to B$ un chemin qui relie b et b_0. Considérons le relèvement $\widetilde{\gamma}$ d'origine x de γ.



On pose $x'_0 = \widetilde{\gamma}(1)$. On note $\varphi_\gamma : \pi_1(B, b_0) \to \pi_1(B, b)$ (respectivement, $\varphi_{\widetilde{\gamma}} : \pi_1(E, x'_0) \to \pi_1(E, x)$) l'isomorphisme de changement de point de base le long du chemin γ (respectivement, $\widetilde{\gamma}$). Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E, x'_0) & \xrightarrow{\varphi_{\widetilde{\gamma}}} & \pi_1(E, x) \\ \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ \pi_1(B, b_0) & \xrightarrow{\varphi_\gamma} & \pi_1(B, b) \end{array}$$

En effet, soit $\delta : I \to E$ un lacet de base x'_0. On a

$$\begin{aligned}(p_* \circ \varphi_{\widetilde{\gamma}})([\delta]) &= p_*([\widetilde{\gamma}\delta\widetilde{\gamma}^{-1}]) = [p \circ \widetilde{\gamma}][p \circ \delta][p \circ \widetilde{\gamma}^{-1}] \\ &= [\gamma]\, p_*([\delta])\, [\gamma^{-1}] = (\varphi_\gamma \circ p_*)([\delta]).\end{aligned}$$

Puisque $\varphi_{\widetilde{\gamma}}$ est un isomorphisme, on obtient que

$$\varphi_\gamma(p_*(\pi_1(E, x'_0))) = p_*(\pi_1(E, x)).$$

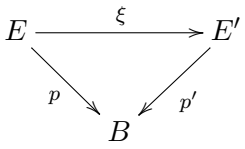
On a $p_*(\pi_1(E, x'_0)) = p_*(\pi_1(E, x_0))$. Donc, $p_*(\pi_1(E, x))$ ne dépend pas du choix de point x de la fibre $p^{-1}(b)$. □

Un revêtement $p : E \to B$ est dit *régulier* si E est connexe par arcs et si l'une des conditions (1) - (4) de la proposition précédente est vérifiée. Dans le cas d'un revêtement régulier $p : E \to B$, pour tout point $x_0 \in E$, la fibre $p^{-1}(b_0)$ au-dessus du point $b_0 = p(x_0)$ s'identifie avec le groupe quotient $\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0))$.

Par exemple, si $p : E \to B$ est un revêtement tel que E est connexe par arcs et le groupe fondamental de B est abélien, alors p est régulier.

2.3 Morphismes de revêtements

Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements ayant même base. Un *morphisme modéré de revêtements* de p sur p' est une application continue $\xi : E \to E'$ telle que l'on ait le diagramme commutatif suivant :



Pour tout revêtement $p : E \to B$, l'application $\mathrm{id}_E : E \to E$ est un morphisme modéré de revêtements, dit *identité*, de p sur p. Si ξ est un morphisme modéré de revêtements de $p : E \to B$ sur $p' : E' \to B$ et si ξ' est un morphisme modéré de revêtements de $p' : E' \to B$ sur $p'' : E'' \to B$, alors $\xi' \circ \xi$ est un morphisme modéré de revêtements, dit *composé*, de p sur p''.

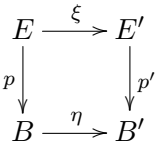
Un *isomorphisme modéré* de revêtements $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ est un morphisme modéré de revêtements ξ de p sur p' tel qu'il existe un morphisme modéré de revêtements ζ de p' sur p vérifiant $\zeta \circ \xi = \mathrm{id}_E$ et $\xi \circ \zeta = \mathrm{id}_{E'}$. Si $E = E'$ et $p = p'$, on parle d'*automorphisme* du revêtement $p : E \to B$. Deux revêtements de même base sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme modéré de revêtements de l'un sur l'autre.

On dit qu'un revêtement $p : E \to B$ est trivial s'il est isomorphe à un revêtement de la forme

$$\mathrm{pr}_B : B \times F \to B,$$

où F est un espace topologique discret non vide.

La notion de morphisme modéré de revêtements, introduite ci-dessus, peut être généralisée de la façon suivante. Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ deux revêtements (dont les bases ne coïncident pas forcement). Un *morphisme de revêtements* de p sur p' est un couple (ξ, η) d'applications continues $\xi : E \to E'$ et $\eta : B \to B'$ telles que le diagramme suivant commute :



Si les bases de revêtements coïncident et l'application η est l'identité, le morphisme (ξ, η) de revêtements est dit *au-dessus de l'identité*. Dans ce cas, $\xi : E \to E'$ est un morphisme modéré de revêtements.

Si (ξ, η) est un morphisme de revêtements de $p : E \to B$ sur $p' : E' \to B'$ et si $b \in B$ est un point, alors l'application ξ envoie la fibre $p^{-1}(b)$ dans la fibre $(p')^{-1}(\eta(b))$.

Proposition 2.21.

Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements ayant même base. Supposons que E' est connexe par arcs et localement connexe. Supposons en plus qu'il existe un morphisme modéré $\xi : E \to E'$ de p sur p'. Alors, ξ est un revêtement.

Démonstration. Soit $x' \in E'$ un point. On pose $b' = p'(x')$. Montrons d'abord que $x' \in \xi(E)$. Soit $x_0 \in E$ un point. On pose $x'_0 = \xi(x_0)$. Puisque E' est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : I \to E'$ qui relie x'_0 et x'. Considérons le relèvement $\widetilde{\gamma} : I \to E$ (par rapport à p) d'origine x_0 de $p' \circ \gamma$. Le chemin $\xi \circ \widetilde{\gamma}$ est un relèvement (par rapport à p') d'origine x'_0 de $p' \circ \gamma$. Donc, $\xi \circ \widetilde{\gamma}$ coïncide avec γ. En particulier, $x' \in \xi(E)$.

Puisque E' est localement connexe, les espaces topologiques B et E sont localement connexes aussi. Considérons un voisinage connexe $U \subset B$ de b' tel que U soit trivialisant pour les deux revêtements p et p'. On note $U_{x'}$ le feuillet de p' au-dessus de U tel que $x' \in U_{x'}$, et on note $\{V_x\}$ la collection des feuillets de p au-dessus de U. Pour tout V_x, l'image $\xi(V_x)$ est connexe ; donc, soit $\xi(V_x) = U_{x'}$, soit $\xi(V_x) \cap U_{x'} = \varnothing$. Par consequent, $\xi^{-1}(U_{x'})$ est une réunion disjointe d'ouverts de la forme V_x, et la restriction de ξ sur chacun de ces ouverts fournit un homéomorphisme avec $U_{x'}$: pour un tel ouvert V, on a $\xi|_V = (p'|_{U_{x'}})^{-1} \circ p|_V$. □

Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements ayant même base. Supposons que les espaces totaux E et E' de ces revêtements sont connexes par arcs. Soient $x_0 \in E$ et $x'_0 \in E'$ des points. On dit que la paire (p, x_0) *domine* la paire (p', x'_0) s'il existe un morphisme modéré $\xi : E \to E'$ de p sur p' tel que $\xi(x_0) = x'_0$.

Proposition 2.22.
Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements ayant même base et des espaces totaux connexes par arcs. Soient $x_0 \in E$ et $x'_0 \in E'$ des points tels que $p(x_0) = p'(x'_0)$. Si la paire (p, x_0) domine la paire (p', x'_0), alors

$$p_*(E, x_0) \subset (p')_*(E', x'_0).$$

Démonstration. Il existe un morphisme modéré $\xi : E \to E'$ de p sur p' tel que $\xi(x_0) = x'_0$. On a $p = p' \circ \xi$. Donc,

$$p_*(\pi_1(E, x_0)) = (p')_*(\xi_*(\pi_1(E, x_0)) \subset (p')_*(\pi_1(E', x'_0)).$$

□

2.4 Relèvement d'applications

Dans cette section, nous allons étudier l'existence de relèvements d'applications à valeurs dans la base d'un revêtement.

Rappelons qu'un espace topologique est dit *localement connexe par arcs* si chacun de ses points admet une base de voisinages connexes par arcs.

Proposition 2.23.
Soient $p : E \to B$ un revêtement, X un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs, et $f : X \to B$ une application continue. Soit $x_0 \in X$ un point. On pose $b_0 = f(x_0)$, et on considère un point $y_0 \in p^{-1}(b_0)$. Alors, il existe un relèvement $\widetilde{f} : X \to E$ de f tel que $\widetilde{f}(x_0) = y_0$ si et seulement si

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, y_0)).$$

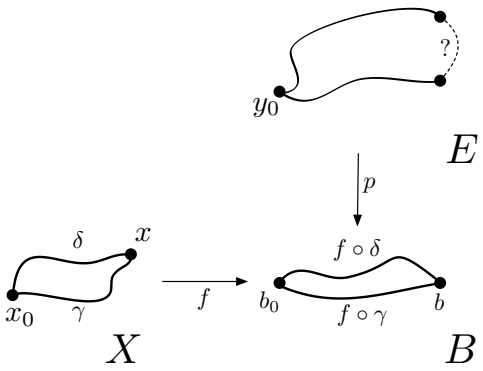
Démonstration. La condition $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, y_0))$ est clairement nécessaire (*cf.* la démonstration de la Proposition 2.22).

Supposons maintenant que $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, y_0))$. Soit $x \in X$ un point. Considérons un chemin $\gamma : I \to X$ qui relie x_0 et x. L'application $f \circ \gamma$ est un chemin qui relie b_0 et $b = f(x)$ dans B. Notons $\widetilde{\gamma}$ le relèvement d'origine y_0 de $f \circ \gamma$. On note $\widetilde{f}(x) = \widetilde{\gamma}(1)$.

Si $\delta : I \to X$ est un autre chemin qui relie x_0 et x, notons $\widetilde{\delta} : I \to E$ le relèvement d'origine y_0 de $f \circ \delta$. On a

$$[(f \circ \gamma)(f \circ \delta)^{-1}] = [f \circ (\gamma\delta^{-1})] \in f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0)).$$

Soit $c : I \to E$ un lacet de base y_0 tel que les lacets $p \circ c$ et $(f \circ \gamma)(f \circ \delta)^{-1}$ soient homotopes. La Proposition 2.8 (relèvement des homotopies) et la Proposition 2.7 (unicité de relèvement d'une origine donnée d'un chemin) impliquent que les chemins $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\delta}$ ont le même point d'arrivée. Donc, $\widetilde{f}(x)$ ne dépend pas du choix de chemin γ.



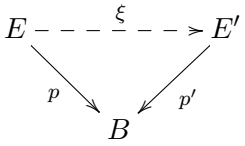
On a $\widetilde{f}(x_0) = y_0$. Il reste à montrer que l'application $\widetilde{f}$ est continue. Considérons un voisinage ouvert $V \subset E$ de $\widetilde{f}(x)$ tel que $U = p(V)$ soit un ouvert de B et $p|_V : V \to U$ soit un homéomorphisme. Soit $W \subset f^{-1}(U)$ un voisinage ouvert connexe par arcs de x. Pour tout point $w \in W$, si $\gamma' : I \to W \subset X$ est un chemin qui relie x et w, alors $\widetilde{f}(w)$ est le point d'arrivée du relèvement d'origine y_0 de $f \circ (\gamma\gamma') = (f \circ \gamma)(f \circ \gamma')$. Par conséquent, $\widetilde{f}(w) \in V$. Donc, l'application $\widetilde{f}$ est continue. □

Corollaire 2.24.

Soient $p : E \to B$ un revêtement, X un espace topologique simplement connexe et localement connexe par arcs, et $f : X \to B$ une application continue. Soit $x_0 \in X$ un point. On pose $b_0 = f(x_0)$, et on considère un point $y_0 \in p^{-1}(b_0)$. Alors, il existe un unique relèvement $\widetilde{f} : X \to E$ de f tel que $\widetilde{f}(x_0) = y_0$. □

Corollaire 2.25.

Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements ayant même base et des espaces totaux connexes par arcs. Supposons que B est localement connexe par arcs. Soient $x_0 \in E$ et $x'_0 \in E'$ des points tels que $p(x_0) = p'(x'_0)$.



Alors, la paire (p, x_0) domine la paire (p', x'_0) si et seulement si

$$p_*(\pi_1(E, x_0)) \subset (p')_*(\pi_1(E', x'_0)).$$

De plus, si la paire (p, x_0) domine la paire (p', x'_0), alors il existe un unique morphisme modéré $\xi : E \to E'$ de p sur p' tel que $\xi(x_0) = x'_0$.

Démonstration. Puisque B est localement connexe par arcs, les espaces totaux E et E' sont aussi localement connexes par arcs. D'après la Proposition 2.22, si la paire (p, x_0) domine la paire (p', x'_0), alors $p_*(\pi_1(E, x_0)) \subset (p')_*(\pi_1(E', x'_0))$.

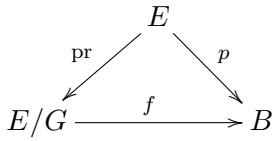
Réciproquement, si $p_*(\pi_1(E,x_0)) \subset (p')_*(\pi_1(E',x'_0))$, le Lemme 2.6 et la Proposition 2.23 impliquent qu'il existe un unique morphisme modéré $\xi : E \to E'$ de p sur p' tel que $\xi(x_0) = x'_0$ (il s'agit du relèvement ξ de p par rapport à p' tel que $\xi(x_0) = x'_0$). □

Une des conséquences de résultats démontrés ci-dessus sur les relèvements d'applications est l'énoncé suivant.

PROPOSITION 2.26.

Soit $p : E \to B$ un revêtement dont l'espace total E est connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $b_0 \in B$ un point. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) le revêtement p est régulier,
(2) le groupe $\mathrm{Aut}(p)$ des automorphismes du revêtement p agit transitivement sur $p^{-1}(b_0)$,
(3) il existe un groupe discret G, une opération totalement discontinue de G sur E et un homéomorphisme $f : E/G \to B$ tels que le diagramme suivant commute :



(ici $\mathrm{pr} : E \to E/G$ est l'application quotient).

Démonstration. On va montrer, d'abord, que les conditions (1) et (2) sont équivalentes. Soient x_0 et x_1 des points de la fibre $p^{-1}(b_0)$. Supposons que p est régulier. On a $p_*(\pi_1(E,x_0)) = p_*(\pi_1(E,x_1))$. D'après le Corollaire 2.25, il existe un automorphisme $\xi : E \to E$ tel que $\xi(x_0) = x_1$. Donc, le groupe $\mathrm{Aut}(p)$ agit transitivement sur $p^{-1}(b_0)$.

Réciproquement, si $\mathrm{Aut}(p)$ agit transitivement sur $p^{-1}(b_0)$, il existe un automorphisme $\xi : E \to E$ de p tel que $\xi(x_0) = x_1$. Donc, $p_*(\pi_1(E,x_0)) \subset p_*(\pi_1(E,x_1))$ et $p_*(\pi_1(E,x_0)) \supset p_*(\pi_1(E,x_1))$. Par conséquent, p est régulier.

Pour démontrer l'implication (2) ⇒ (3), on pose $G = \mathrm{Aut}(p)$ et on munit le groupe G de la topologie discrète. On obtient une opération continue de G sur E. Cette opération est totalement discontinue. En effet, soit $x \in E$ un point, et soit $U \ni p(x)$ un voisinage trivialisant le revêtement p. Alors, le feuillet V au-dessus de U tel que $x \in V$ vérifie la propriété demandée : $(g \cdot V) \cap V = \varnothing$ pour tout élément $g \in G$ différent de l'élément neutre. Donc, l'application quotient $\mathrm{pr} : E \to E/G$ est un revêtement (voir la Proposition 2.5). Il existe une unique application continue $f : E/G \longrightarrow B$ telle que $p = f \circ \mathrm{pr}$. Puisque $\mathrm{Aut}(p)$ agit transitivement sur chaque fibre de p, l'application f est bijective. De plus, f est ouverte. Donc, f est un homéomorphisme.

Pour démontrer l'implication (3) ⇒ (2), supposons qu'il existe un groupe discret G, une opération totalement discontinue de G sur E et un homéomorphisme $f : E/G \to B$ tels que $p = f \circ \mathrm{pr}$. Alors, G est contenu dans $\mathrm{Aut}(p)$ et agit transitivement sur chaque fibre de p. □

Un revêtement régulier $p : E \to B$ d'espace total E connexe par arcs et localement connexe par arcs s'appelle *revêtement galoisien*. Pour un revêtement galosien p, le groupe $\mathrm{Aut}(p)$ s'appelle le *groupe de* GALOIS de p.

PROPOSITION 2.27.

Soit $p : E \to B$ un revêtement galoisien, et soit $x_0 \in E$ un point. On pose $b_0 = p(x_0)$. Alors, le groupe de GALOIS $\mathrm{Aut}(p)$ de p peut être identifié avec le groupe quotient $\pi_1(B,b_0)/p_*(\pi_1(E,x_0))$.

Démonstration. D'après la Proposition 2.18, l'application de $\pi_1(B, b_0)$ dans $F = p^{-1}(b_0)$ définie par $\alpha \mapsto x_0\alpha$ induit une bijection

$$\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0)) \simeq F.$$

D'autre part, pour tout point $x_1 \in F$, il existe un unique élément $g \in \mathrm{Aut}(p)$ tel que $g(x_1) = x_0$, ce qui produit une bijection entre F et $\mathrm{Aut}(p)$. La composée de ces deux bijections est une bijection $\phi : \pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0)) \to \mathrm{Aut}(p)$. En utilisant le fait que, pour tout lacet γ de base b_0 dans B, les automorphismes de p transforment les relèvements de γ en relèvements de γ, on montre que l'application ϕ est un morphisme de groupes : si $\alpha, \beta \in \pi_1(B, b_0)$, alors

$$\phi([\alpha][\beta])(x_0(\alpha\beta)) = x_0 \quad \text{et} \quad (\phi([\beta]) \circ \phi([\alpha]))((x_0\alpha)\beta) = x_0,$$

car $\phi([\alpha])((x_0\alpha)\beta) = x_0\beta$, où $[\alpha]$ et $[\beta]$ sont, respectivement, les classes de α et β, dans $\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0))$. □

2.5 Revêtement image réciprqoque

Soient $p : E \to B$ un revêtement et $f : B' \to B$ une application continue. Le *revêtement image réciproque* de p par rapport à f est l'application $p' : E' \to B'$, où

$$E' = \{(x, b') \in E \times B' \mid f(b') = p(x)\},$$

et p' est la restriction sur E' de la projection $\mathrm{pr}_{B'} : E \times B' \to B'$. Notons g la restriction sur E' de la projection $\mathrm{pr}_E : E \times B' \to E$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{g} & E \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Proposition 2.28.
L'application $p' : E' \to B'$ est un revêtement, et le couple (g, f) est un morphisme de revêtements.

Démonstration. Soit $b'_0 \in B'$ un point. Considérons un voisinage ouvert $U \subset B$ de $f(b'_0)$ tel que U soit un voisinage trivialisant le revêtement p, et notons $\Psi : p^{-1}(U) \to U \times F$ une trivialisation locale de p au-dessus de U, où F est un espace topologique discret. Posons $V = f^{-1}(U)$. C'est un voisinage ouvert de b'_0. L'application $\Psi' : (p')^{-1}(V) \to V \times F$ définie par

$$(x, b') \mapsto (b', (\mathrm{pr}_F \circ \Psi)(x))$$

est un homéomorphisme d'inverse

$$(b', y) \mapsto (\Psi^{-1}(f(b'), y), b')$$

et fournit une trivialisation locale de p' au-dessus de V. □

2.6 Classification de revêtements

Un espace topologique X est dit *semi-localement simplement connexe* si tout point $x \in X$ admet un voisinage $U \subset X$ tel que le morphisme $\mathrm{in}_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ induit par l'inclusion $\mathrm{in} : U \hookrightarrow X$ soit trivial. Un tel voisinage $U \subset X$ est dit *basique*.

PROPOSITION 2.29.
Soit B un espace topologique qui admet un revêtement $p : E \to B$ avec E simplement connexe. Alors, B est semi-localement simplement connexe.

Démonstration. Soit $p : E \to B$ un revêtement de B tel que E soit simplement connexe, et soit $b_0 \in B$ un point. Considérons un voisinage ouvert $U \subset B$ de b_0 tel que U soit un voisinage trivialisant le revêtement p. Soit x_0 le point appartenant à $p^{-1}(b_0)$, et soit $V \subset E$ le feuillet au-dessus de U tel que $x_0 \in V$. L'inclusion $\mathrm{in} : U \hookrightarrow B$ peut être représentée comme application composée $p \circ i \circ (p|_V)^{-1}$, où $i : V \hookrightarrow E$ est l'inclusion de V dans E. Puisque E est simplement connexe, on obtient que le morphisme

$$\mathrm{in}_* : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

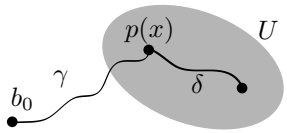
est trivial. □

PROPOSITION 2.30 (Théorème d'existence).
Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors, pour tout point $b_0 \in B$ et pour tout sous-groupe $G \subset \pi_1(B, b_0)$, il existe un revêtement $p : E \to B$ et un point $x_0 \in p^{-1}(b_0)$ tels que E soit connexe par arcs et $p_*(\pi_1(E, x_0)) = G$.

Démonstration. Considérons l'ensemble $\check{E}$ des chemins $\gamma : I \to B$ tels que $\gamma(0) = b_0$. Introduisons une relation d'équivalence $\sim$ sur $\check{E}$: on déclare deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 \in \check{E}$ équivalents si $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ et $[\gamma_1\gamma_2^{-1}] \in G$. Posons $E = \check{E}/\sim$. Pour tout chemin $\gamma \in \check{E}$, on note $[\gamma]_G$ la classe de γ dans E. Pour tout élément $x \in E$, on peut parler du point d'arrivée de x : c'est le point d'arrivée de tous les représentants de x. Considérons l'application $p : E \to B$ qui associe à tout $x \in E$ son point d'arrivée.

On définit maintenant une topologie sur E. Remarquons, d'abord, que tout point de B possède un voisinage ouvert basique et connexe par arcs. En effet, puisque B est localement connexe par arcs, tout voisinage basique U' d'un point donné de B contient un voisinage ouvert U qui est connexe par arcs. Ce voisinage U est aussi basique, car l'inclusion de U dans B est la composée de l'inclusion de U dans U' et de l'inclusion de U' dans B.

Pour tout $x \in E$ et pour tout voisinage ouvert basique $U \subset B$ de $p(x)$ tel que U soit connexe par arcs, on considère le sous-ensemble $U_x \subset E$ formé par les classes des chemins de la forme $\gamma\delta$, où $[\gamma]_G = x$ et δ est un chemin tel que $\delta(I) \subset U$ et $\delta(0) = \gamma(1)$. On va appeler ces sous-ensembles *ensembles principaux*.



Soient $U_x \subset E$ et $V_y \subset E$ deux ensembles principaux tels que $U_x \cap V_y \neq \varnothing$, et soit $z \in U_x \cap V_y$ un point. On a $U_z = U_x$ et $V_z = V_y$. Donc,

$$z \in W_z \subset U_x \cap V_y,$$

où W est un voisinage ouvert basique et connexe par arcs de $p(z)$ tel que $W \subset U \cap V$. Par conséquent, les ensembles principaux forment une base d'une topologie sur E. Munissons E de cette topologie.

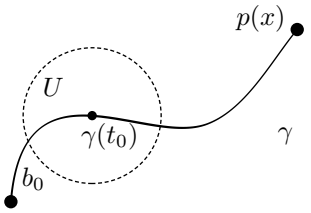
Montrons que l'application p est continue. Soit $b \in B$ un point, et soit $U \ni b$ un voisinage ouvert basique et connexe par arcs. Alors, $p^{-1}(U)$ est la réunion des ensembles U_x, où x parcourt toutes les classes de chemins qui relient b_0 et b. En effet, puisque U est connexe par arcs, si $x' \in p^{-1}(U)$, alors $x' \in U_x$ pour une certaine classe x de chemins qui

relient b_0 et b. Donc, $p^{-1}(U) \subset E$ est un ouvert. Par conséquent, p est continue. De plus, la réunion considérée est disjointe, car, pour deux classes x et y quelconques de chemins qui relient b_0 et b, l'intersection $U_x \cap U_y$ est formée des classes de la forme $[\gamma_1\delta_1]_G = [\gamma_2\delta_2]_G$, où $[\gamma_1]_G = x$, $[\gamma_2]_G = y$, et δ_1, δ_2 sont des chemins à valeurs dans U. Les chemins δ_1 et δ_2 sont homotopes, donc $x = y$.

Soit $x \in E$ un point, et soit U un voisinage ouvert basique et connexe par arcs de $p(x)$. Alors, $p|_{U_x} : U_x \to U$ est une bijection. En effet, pour tout point $b \in U$, il existe un chemin $\delta : I \to B$ qui relie $p(x)$ et b et tel que $\delta(I) \subset U$. On a $b = p([\gamma\delta]_G)$, où $[\gamma]_G = x$, donc l'application $p|_{U_x} : U_x \to U$ est surjective. De plus, la classe $[\gamma\delta]_G$ ne dépend pas du choix de δ, donc $p|_{U_x} : U_x \to U$ est injective.

Vérifions que $p|_{U_x} : U_x \to U$ est une application ouverte. Tout ouvert $W \subset U_x$ est une réunion d'ouverts principaux V_y (pour certain ouverts basiques et connexes par arcs $V \subset U$). Pour chacun de ces ouverts V_y, on a $p|_{U_x}(V_y) = V$. L'image de W par l'application bijective $p|_{U_x} : U_x \to U$ est la réunion des images de V_y. Donc, $p|_{U_x}(W) \subset U$ est un ouvert. On conclut que $p|_{U_x} : U_x \to U$ est un homéomoprphisme. Par conséquent, p est un revêtement.

Il reste à vérifier que E est connexe par arcs et que $p_*(\pi_1(E, x_0)) = G$. Soit $x \in E$ un point, et soit $\gamma : I \to B$ un chemin représentant x. Pour tout $t \in I$, on considère le chemin $\gamma_t : I \to B$ définit par $\gamma_t(s) = \gamma(ts)$. On définit une application $\Gamma : I \to E$ par $\Gamma(t) = [\gamma_t]_G$. On a $\Gamma(0) = [e_{b_0}]_G$ et $\Gamma(1) = x$. Montrons que l'application Γ est continue. Soit $t_0 \in I$, et soit U_y un ensemble principal contenant $\Gamma(t_0)$. On doit vérifier que l'image inverse $\Gamma^{-1}(U_y)$ de U_y contient un voisinage de t_0. C'est un corollaire du fait que $\gamma : I \to B$ est continue : si $T \subset I$ est un voisinage de t_0 tel que $\gamma(T) \subset U$, alors $\Gamma(T) \subset U_y$.



On pose $x_0 = [e_{b_0}]_G \in E$. Pour tout lacet $\gamma : I \to B$ de base b_0, soit $\widetilde{\gamma} : I \to E$ le relèvement unique d'origine x_0 de γ. Le point $\widetilde{\gamma}(1)$ est la classe de γ dans E. Donc, par construction, le stabilisateur de x_0 par l'action de $\pi_1(B, b_0)$ sur $p^{-1}(b_0)$ est le sous-groupe G. Donc, la Proposition 2.15 implique que $p_*(\pi_1(E, x_0)) = G$. □

On obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 2.31 (Classification de revêtements).
Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et soit $b_0 \in B$ un point. L'application qui à tout revêtement $p : E \to B$ avec E connexe par arcs associe la classe de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(B, b_0)$ déterminés par les points de $p^{-1}(b_0)$ établit une bijection entre les classes d'isomorphismes modérés des revêtements $p : E \to B$ avec E connexe par arcs et les classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(B, b_0)$.

Démonstration. Il nous reste à montrer l'injectivité. Soient $p_1 : E_1 \to B$ et $p_2 : E_2 \to B$ des revêtements tels que $(p_1)_*(\pi_1(E_1, x_0)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, y_0))$ pour certains points $x_0 \in E_1$ et $y_0 \in E_2$ vérifiant $p_1(x_0) = b_0$ et $p_2(y_0) = b_0$. Alors, le Corollaire 2.25 implique qu'il existe un isomorphisme modéré de revêtements $\xi : E_1 \to E_2$ de p_1 sur p_2 tel que $\xi(x_0) = y_0$. □

Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et soit $b_0 \in B$ un point. Sous la bijection du Théorème

2.31, la classe de revêtements qui correspond au sous-groupe trivial de $\pi_1(B, b_0)$ (autrement dit, la classe de revêtements de B qui ont un espace total simplement connexe) est celle des *revêtements universels* de B. Considérons un revêtement universel $p : E \to B$ (qui est unique à isomorphisme modéré près). Le revêtement p a la propriété d'universalité suivante. Soit $x_0 \in E$ un point tel que $p(x_0) = b_0$. Alors, le Corollaire 2.25 implique que, pour toute paire (p', x'_0) telle que $p' : E' \to B$ soit un revêtement dont l'espace total E' est connexe par arcs et $x'_0 \in (p')^{-1}(b_0)$, la paire (p, x_0) domine la paire (p', x'_0) : il existe un unique morphisme modéré $\xi : E \to E'$ de p sur p' tel que $\xi(x_0) = x'_0$; de plus, d'après la Proposition 2.21, l'application ξ est un revêtement.

PROPOSITION 2.32.
Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et soit $b_0 \in B$ un point. Soit $p : E \to B$ un revêtement universel de B. Le choix d'un point $x_0 \in p^{-1}(b_0)$ nous permet d'identifier $\pi_1(B, b_0)$ avec le groupe de GALOIS $\mathrm{Aut}(p)$ de p ; voir la Proposition 2.27. Alors, tout revêtement $p' : E' \to B$ tel que E' soit connexe par arc est isomorphe à un revêtement de la forme $E/G \to B$, où $G = p'_*(\pi_1(E', x'_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$ pour un certain point $x'_0 \in (p')^{-1}(b_0)$. Si le revêtement $p' : E' \to B$ est galoisien, alors son groupe de GALOIS est isomorphe à $\pi_1(B, b_0)/G$.

Démonstration. Considérons un point $x'_0 \in (p')^{-1}(b_0)$ et posons $G = p'_*(\pi_1(E', x'_0))$. Puisque G est un sous-groupe du groupe $\pi_1(B, b_0)$ qui est identifié avec $\mathrm{Aut}(E)$, on munit G de la topologie discrète et on obtient une opération totalement discontinue de G sur E. Donc, l'application quotient $\mathrm{pr} : E \to E/G$ est un revêtement (voir la Proposition 2.5). Il existe une unique application continue $f : E/G \longrightarrow B$ telle que $p = f \circ \mathrm{pr}$. L'application f est aussi un revêtement, et $f_*(\pi_1(E/G, \mathrm{pr}(x_0)))$ coïncide avec G. En effet, pour le relèvement $\widetilde{\gamma}$ (par rapport à p) d'un lacet $\gamma : I \to B$ de base b_0 tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$, les points x_0 et $\widetilde{\gamma}(1)$ sont dans la même orbite de l'opération de G si et seulement si $[\gamma] \in G$. Donc, il existe un isomorphisme modéré η de revêtements f et p' tel que $\eta(\mathrm{pr}(x_0)) = x'_0$.
La deuxième affirmation est un corollaire immédiat de la Proposition 2.27. □

2.7 Revêtements associés aux actions

Commençons ce paragraphe par une remarque concernant les morphismes modérés de revêtements.

LEMME 2.33.
Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements ayant même base, et soit $b_0 \in B$ un point. Soit $\xi : E \to E'$ un morphisme modéré de p sur p'. Alors, la restriction de ξ à $p^{-1}(b_0)$ est une application $\pi_1(B, b_0)$-équivariante entre $p^{-1}(b_0)$ et $(p')^{-1}(b_0)$.

Démonstration. Soit $x \in p^{-1}(b_0)$ un point, et soit α un élément du groupe $\pi_1(B, b_0)$. Choisissons un lacet $\gamma : I \to B$ de base b_0 tel que $[\gamma] = \alpha$. Si $\widetilde{\gamma} : I \to E$ est le relèvement de γ (par rapport à p) tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x$, alors $\xi \circ \widetilde{\gamma}$ est le relèvement de γ (par rapport à p') tel que $(\xi \circ \widetilde{\gamma})(0) = \xi(x)$. Donc, $\xi(x\alpha) = (\xi \circ \widetilde{\gamma})(1) = (\xi(x))\alpha$. □

Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et soit $b_0 \in B$ un point. Pour tout ensemble non vide H et toute action à droite de $\pi_1(B, b_0)$ sur H, il existe un revêtement $p : E \to B$ qui « réalise » cette action sur la fibre $p^{-1}(b_0)$. Plus précisément, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 2.34.
Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et soit $b_0 \in B$ un point. Pour tout ensemble non

vide H muni d'une action à droite de $\pi_1(B,b_0)$, il existe un revêtement $p_H : E_H \to B$ et une bijection $\pi_1(B,b_0)$-équivariante $\theta_H : p_H^{-1}(b_0) \to H$. Si H' est un autre ensemble muni d'une action à droite de $\pi_1(B,b_0)$, et si $h : H \to H'$ est une application (respectivement, bijection) $\pi_1(B,b_0)$-équivariante, alors il existe un unique morphisme modéré (respectivement, isomorphisme modéré) de revêtements $\xi : E_H \to E'_{H'}$ de p_H sur $p_{H'}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} p_H^{-1}(b_0) & \xrightarrow{\theta_H} & H \\ {\scriptstyle\xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ p_{H'}^{-1}(b_0) & \xrightarrow{\theta_{H'}} & H' \end{array}$$

Démonstration. Soit $H = \coprod_{i\in\mathcal{O}} H_i$ la partition de H en orbites de l'action de $\pi_1(B,b_0)$. Pour tout $i \in \mathcal{O}$, choisissons un point $x_i \in H_i$ et notons S_i le stabilisateur de x_i dans $\pi_1(B,b_0)$. Soit $p_i : E_i \to B$ le revêtement de B associé au sous-groupe $S_i \subset \pi_1(B,b_0)$ (voir le Théorème 2.31). Posons $E_H = \coprod_{i\in\mathcal{O}} E_i$ (muni de la topologie somme disjointe, c'est-à-dire, la topologie la plus fine pour laquelle toutes les applications canoniques $E_i \to \coprod_{i\in\mathcal{O}} E_i$ sont continues). Soit $p_H : E_H \to B$ l'application dont la restriction sur E_i est p_i pour tout $i \in \mathcal{O}$. L'application $p_H : E_H \to B$ est un revêtement de fibre $\coprod_{i\in\mathcal{O}} p_i^{-1}(b_0)$. On note $\theta_H : p_H^{-1}(b_0) \to H$ l'application dont la restriction sur $p_i^{-1}(b_0)$ coïncide avec la composition des bijections

$$p_i^{-1}(b_0) \simeq S_i\backslash\pi_1(B,b_0) \simeq H_i$$

pour tout $i \in \mathcal{O}$.

Pour démontrer la deuxième affirmation, considérons l'ensemble

$$\mathrm{Mor}(p_H, p_{H'})$$

des morphismes modérés de revêtements de p_H sur $p_{H'}$, l'ensemble

$$\mathrm{Mor}_{\pi_1(B,b_0)}(p_H^{-1}(b_0), p_{H'}^{-1}(b_0))$$

des applications $\pi_1(B,b_0)$-équivariantes de $p_H^{-1}(b_0)$ dans $p_{H'}^{-1}(b_0)$, et l'application

$$\Upsilon : \mathrm{Mor}(p_H, p_{H'}) \to \mathrm{Mor}_{\pi_1(B,b_0)}(p_H^{-1}(b_0), p_{H'}^{-1}(b_0))$$

définie par $\xi \mapsto \xi|_{p_H^{-1}(b_0)}$ (voir le Lemme 2.33).

Montrons que l'application Υ est une bijection. Remarquons d'abord, qu'il est suffisant de montrer ce résultat dans le cas où E_H et $E_{H'}$ sont connexes par arcs. En suite, le Lemme 2.6 implique que Υ est injective. Pour montrer la surjectivité de Υ, considérons une application $\pi_1(B,b_0)$-équivariante $\varrho : p_H^{-1}(b_0) \to p_{H'}^{-1}(b_0)$. Soit $x \in p_H^{-1}(b_0)$. On pose $x' = \varrho(x) \in p_{H'}^{-1}(b_0)$. Vérifions que $(p_H)_*(\pi_1(E_H,x)) \subset (p_{H'})_*(\pi_1(E_{H'},x'))$. Puisque ϱ est $\pi_1(B,b_0)$-équivariante, pour tout $g \in (p_H)_*(\pi_1(E_H,x))$, on a

$$x'g = \varrho(x)g = \varrho(xg) = \varrho(x) = x'.$$

Donc, $g \in (p_{H'})_*(\pi_1(E_{H'},x))$. Par conséquent, il existe un morphisme modéré de revêtements $\xi : E_H \to E_{H'}$ de p_H sur $p_{H'}$ tel que $\xi(x) = x'$ (voir le Corollaire 2.25). Puisque $\xi|_{p_H^{-1}(b_0)}$ et ϱ sont $\pi_1(B,b_0)$-équivariantes, l'action de $\pi_1(B,b_0)$ sur $p_H^{-1}(b_0)$ est transitive et $\xi(x) = \varrho(x)$, on obtient que $\xi|_{p_H^{-1}(b_0)} = \varrho$, ce qui démontre la surjectivité de Υ.

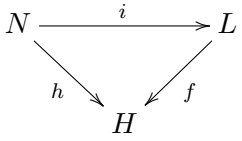
La deuxième affirmation de la proposition est un corollaire de la bijectivité de Υ. □

3 Théorème de van Kampen

3.1 Sommes amalgamées

On fait une petite parenthèse pour rappeler quelques notions de la théorie des groupes.

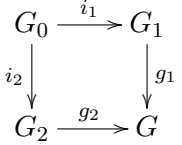
Soit N un ensemble. On appelle *groupe libre engendré par* N un couple (L, i), où L est un groupe et $i : N \to L$ est une application, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout couple (H, h), formé par un groupe H et une application $h : N \to H$, il existe un unique morphisme de groupes $f : L \to H$ tel que $h = f \circ i$.



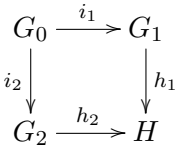
Proposition 2.35.
Un couple (L, i) existe et est unique à isomorphisme près.

Le groupe libre engendré par N est souvent noté $L(N)$. Un groupe est dit *libre* s'il est isomorphe au groupe libre engendré par un certain ensemble N. Le *rang* d'un groupe libre est le cardinal d'un tel ensemble N (on peut vérifier que deux groupes libres $L(N)$ et $L(N')$ sont isomorphes si et seulement si les ensembles N et N' ont le même cardinal).

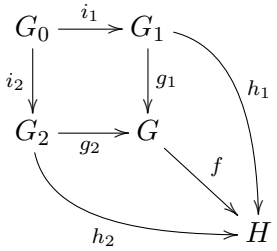
Considérons trois groupes G_0, G_1 et G_3 et deux morphismes $i_1 : G_0 \to G_1$ et $i_2 : G_0 \to G_2$. On appelle *somme amalgamée* de G_1 et G_2 au-dessus de G_0 (au moyen de i_1 et i_2) un groupe G, muni de deux morphismes $g_1 : G_1 \to G$ et $g_2 : G_2 \to G$ qui font commuter le diagramme



tels que le triplet (G, g_1, g_2) ait la propriété universelle suivante : pour tout groupe H muni de deux morphismes $h_1 : G_1 \to H$ et $h_2 : G_2 \to H$ qui font commuter le diagramme



il existe un unique morphisme $f : G \to H$ tel que $f \circ g_1 = h_1$ et $f \circ g_2 = h_2$, autrement dit, tel que le diagramme suivant commute :



PROPOSITION 2.36.
Un triplet (G, g_1, g_2) existe et est unique à isomorphisme près.

Remarquons que l'unicité de triplet (G, g_1, g_2) est immédiate.

On utilise la notation $G_1 *_{G_0} G_2$ pour la somme amalgamée de G_1 et G_2 au-dessus de G_0.

Si le groupe G_0 est trivial, la somme amalgamée $G_1 *_{G_0} G_2$ est le *produit libre* $G_1 * G_2$ de G_1 et G_2.

Supposons que le groupe G_0 est de type fini, et notons $\delta_1, \ldots, \delta_r$ des générateurs de G_0. Supposons en plus que les groupes G_1 et G_2 sont de présentation finie. Considérons une présentation de G_1 donnée par des générateurs

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

et des relations

$$\rho_1, \ldots, \rho_m,$$

et une présentation de G_2 donnée par des générateurs

$$\beta_1, \ldots, \beta_k$$

et des relations

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell.$$

Alors, une présentation de la somme amalgamée $G_1 *_{G_0} G_2$ est donnée par les générateurs

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_k$$

et les relations

$$\rho_1, \ldots, \rho_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_\ell,$$
$$i_1(\delta_1)(i_2(\delta_1))^{-1}, \ldots, i_1(\delta_r)(i_2(\delta_r))^{-1}.$$

Ici, pour tout $j = 1, \ldots, r$, on écrit $i_1(\delta_j)$ à l'aide des générateurs

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n,$$

et on écrit $(i_2(\delta_j))^{-1}$ à l'aide des générateurs

$$\beta_1, \ldots, \beta_k.$$

3.2 Théorème de van Kampen

Soit B un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs. On suppose que B est recouvert par deux ouverts U_1 et U_2 qui sont connexes par arcs et semi-localement simplement connexes. On suppose aussi que l'intersection $U_1 \cap U_2$ est non vide, connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et on choisit un point de base $b_0 \in U_1 \cap U_2$. D'après la Proposition 1.31 (théorème de van Kampen faible), le groupe fondamental $\pi_1(B, b_0)$ est engendré par les images de $\pi_1(U_1, b_0)$ et $\pi_1(U_2, b_0)$ par les morphismes induits par les inclusions $\mathrm{in}_1 : U_1 \hookrightarrow B$ et $\mathrm{in}_2 : U_2 \hookrightarrow B$, respectivement. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_1 \cap U_2, b_0) & \xrightarrow{(i_1)_*} & \pi_1(U_1, b_0) \\ {\scriptstyle (i_2)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{in}_1)_*} \\ \pi_1(U_2, b_0) & \xrightarrow{(\mathrm{in}_2)_*} & \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

où $i_1 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_1$ et $i_2 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_2$ sont des inclusions.

THÉORÈME 2.37 (Théorème de VAN KAMPEN).
Le groupe $\pi_1(B, b_0)$ est isomorphe à la somme amalgamée

$$\pi_1(U_1, b_0) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, b_0)} \pi_1(U_2, b_0)$$

des groupes $\pi_1(U_1, b_0)$ et $\pi_1(U_2, b_0)$ au-dessus de $\pi_1(U_1 \cap U_2, b_0)$.

Démonstration. Par l'unicité de la somme amalgamée, il est suffisant de montrer que $\pi_1(B, b_0)$ vérifie la propriété universelle. Soit H un groupe muni de deux morphismes $h_1 : \pi_1(U_1, b_0) \to H$ et $h_2 : \pi_1(U_2, b_0) \to H$ qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_1 \cap U_2, b_0) & \xrightarrow{(i_1)_*} & \pi_1(U_1, b_0) \\ {\scriptstyle (i_2)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_1} \\ \pi_1(U_2, b_0) & \xrightarrow{h_2} & H \end{array}$$

On veut montrer qu'il existe un morphisme $f : \pi_1(B, b_0) \to H$ tel que $f \circ (\mathrm{in}_1)_* = h_1$ et $f \circ (\mathrm{in}_2)_* = h_2$ (l'unicité d'un tel morphisme est un corollaire de la Proposition 1.31).

Le groupe $\pi_1(U_j, b_0)$, $j = 1, 2$, agit à droite sur H par

$$(\beta, x) \mapsto x \cdot h_j(\beta).$$

Soit $p_j : E_j \to U_j$ un revêtement de U_j de fibre $p_j^{-1}(b_0) = H$ associé à cette action (voir la Proposition 2.34). Puisque $h_1 \circ (i_1)_* = h_2 \circ (i_2)_*$, les fibres au-dessus de b_0 des revêtements $p_1|_{p_1^{-1}(U_1 \cap U_2)}$ et $p_2|_{p_2^{-1}(U_1 \cap U_2)}$ sont en bijection $\pi_1(U_1 \cap U_2, b_0)$-équivariante. Donc, ces revêtements sont isomorphes (voir la Proposition 2.34). Soit $\xi : p_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to p_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ un isomorphisme modéré de revêtements.

On note E l'espace quotient de $E_1 \coprod E_2$ par la relation d'équivalence engendrée par $x \sim \xi(x)$ pour tout $x \in p_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, et on note $\mathrm{pr} : E_1 \coprod E_2 \to E$ l'application quotient. Les applications $p_1 : E_1 \to B$ et $p_2 : E_2 \to B$ vérifient $p_2 \circ \xi = p_1$ sur $p_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ et induisent une application continue $p : E \to B$, qui est un revêtement. De plus, $\mathrm{pr}\,|_{E_1}$ (respectivement, $\mathrm{pr}\,|_{E_2}$) est un isomorphisme modéré de revêtements p_1 et $p|_{E_1}$ (respectivement, p_2 et $p|_{E_2}$).

Le revêtement p définit une action à droite de $\pi_1(B, b_0)$ sur la fibre H au-dessus de b_0 :

$$(\alpha, x) \mapsto x\alpha,$$

où $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$ et $x \in H$. Par les isomorphismes ci-dessus, pour tout $x \in H$, tout $j = 1, 2$ et tout $\beta \in \pi_1(U_j, b_0)$, on a

$$x(\mathrm{in}_j)_*(\beta) = x \cdot h_j(\beta).$$

Notons ε l'élément neutre de H. Considérons l'application

$$f : \pi_1(B, b_0) \to H$$

définie par

$$f(\alpha) = \varepsilon\alpha.$$

En particulier, on a

$$f \circ (\mathrm{in}_1)_* = h_1, \quad f \circ (\mathrm{in}_2)_* = h_2.$$

De plus, f est un morphisme de groupes. En effet, puisque $\pi_1(B, b_0)$ est engendré par $(\mathrm{in}_1)_*(\pi_1(U_1, b_0))$ et $(\mathrm{in}_2)_*(\pi_1(U_2, b_0))$, il est suffisant de vérifier l'égalité

$$f((\mathrm{in}_{j_1})_*(\beta_1) \dots (\mathrm{in}_{j_n})_*(\beta_n)) = f((\mathrm{in}_{j_1})_*(\beta_1)) \dots f((\mathrm{in}_{j_n})_*(\beta_n))$$

pour tout entier $n \geq 1$ et des éléments quelconques $\beta_k \in \pi_1(U_{j_k}, b_0)$, $k = 1, \ldots, n$. On montre facilement cette égalité par récurrence sur n.

Par conséquent, f est le morphisme recherché. □

COROLLAIRE 2.38.

Si $U_1 \cap U_2$ est simplement connexe, alors le groupe $\pi_1(B, b_0)$ est le produit libre $\pi_1(U_1, b_0) * \pi_1(U_2, b_0)$ des groupes $\pi_1(U_1, b_0)$ et $\pi_1(U_2, b_0)$. □

Exemple. Considérons le bouquet $S^1 \bigvee S^1$ de deux cercles, c'est-à-dire, l'espace quotient de $S^1 \coprod S^1$ tel que l'application quotient

$$\mathrm{pr} : S^1 \coprod S^1 \to S^1 \bigvee S^1$$

identifie le point 1 du premier cercle et le point 1 du deuxième cercle. Notons b_0 l'image des deux points identifiés. Soit $a_1 \neq 1$ un point du premier cercle, et soit $a_2 \neq 1$ un point du deuxième cercle. Notons b_1 et b_2 les points correspondants de $S^1 \bigvee S^1$. On pose $U_1 = (S^1 \bigvee S^1) \setminus \{b_1\}$ et $U_2 = (S^1 \bigvee S^1) \setminus \{b_2\}$. Les sous-espaces U_1 et U_2 forment un recouvrement ouvert de $S^1 \bigvee S^1$. Chacun des sous-espaces U_1 et U_2 est homotopiquement équivalent à S^1. De plus, $U_1 \cap U_2$ est contractile. Donc,

$$\pi_1(S^1 \bigvee S^1, b_0) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, le groupe fondamental du bouquet de deux cercles n'est pas abélien et est un groupe libre de rang 2. On montre par récurrence que, pour tout nombre entier $n \geq 1$, le groupe fondamental du bouquet de n cercles est un groupe libre de rang n.

Chapitre 3

Compléments sur l'homotopie

1 Groupes d'homotopie supérieurs

1.1 Cadre général

Soit X et Y deux espaces topologiques. On note $\pi(X, Y)$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues entre X et Y. Il est naturel aussi de considérer des applications continues entre des paires topologiques.

Définition 3.1.
Une *paire topologique* (X, A) est la donnée d'un espace topologique X et d'un sous-espace $A \subset X$. Une application continue entre deux paires topologiques (X, A) et (Y, C) est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(A) \subset C$. Un *triplet topologique* (X, A, B) est la donnée d'un espace topologique X et de deux sous-espaces $A, B \subset X$ tels que $B \subset A$. Une application continue entre deux triplets topologiques (X, A, B) et (Y, C, D) est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(A) \subset C$ et $f(B) \subset D$. Une paire topologique $(X, \{x_0\})$ (où x_0 est un point de X), noté aussi par (X, x_0), s'appelle *espace pointé*.

On étend de façon naturelle les notions d'homotopie et d'équivalence d'homotopie au cas de paires et de triplets topologiques. On utilise la notation $\pi((X, x_0), (Y, y_0))$ pour l'ensemble des classes d'homotopie entre des espaces pointés (X, x_0) et (Y, y_0).

Pour étudier un espace topologique X, il est utile de considérer les ensembles $\pi(X, Y)$ et $\pi(Y, X)$ avec un espace topologique Y bien choisi. On peut aussi envisager cette démarche dans le cadre d'espaces topologiques pointés. Par exemple, pour un espace pointé (X, x_0), on a

$$\pi((S^1, 1), (X, x_0)) = \pi_1(X, x_0).$$

Pour certains choix d'un espace topologique Y, les ensembles $\pi(Y, X)$ admettent une structure naturelle de groupe. C'est le cas des suspensions. Si Z est un espace topologique, la *suspension* ΣZ est le quotient de $Z \times I$ par la relation d'équivalence engendré par $(x, 0) \sim (x', 0)$ et $(x, 1) \sim (x', 1)$. Par exemple, la suspension ΣS^0 est homéomorphe à S^1. Plus généralement, pour tout entier k positif ou nul, la suspension ΣS^k de S^k est homéomorphe à S^{k+1}.

De façon similaire, pour certains choix d'un espace topologique Y, les ensembles $\pi(X, Y)$ admettent une structure naturelle de groupe (c'est le cas, par exemple, des espaces des lacets).

1.2 Définition

On fixe un entier $k \geq 2$.

Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. On note $\Omega_k(X, x_0)$ l'ensemble des applications continues $\sigma : I^k \to X$ telles que $\sigma(\partial I^k) = x_0$, où ∂I^k est la frontière de $I^k \subset \mathbb{R}^k$. On note $\pi_k(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'homotopie relativement à ∂I^k d'applications appartenant à $\Omega_k(X, x_0)$.

Remarquons que $\Omega_k(X, x_0)$ est en bijection avec l'ensemble des applications continues de (S^k, s_0) dans (X, x_0), où s_0 est un point fixé de S^k : on représente S^k comme quotient de I^k par la relation d'équivalence identifiant tous les points de ∂I^k ; le point s_0 est l'image de ∂I^k par la projection canonique. D'habitude, on représente S^k comme sphère unité dans $\mathbb{R}^{k+1}$ et on suppose que $s_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Les applications continues de (S^k, s_0) dans (X, x_0) s'appellent *sphéroïdes* (ou *k-sphéroïdes*). L'ensemble $\pi_k(X, x_0)$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'homotopie des sphéroïdes $(S^k, s_0) \to (X, x_0)$.

L'opération de multiplication sur l'ensemble $\Omega_k(X, x_0)$ est définie de la façon suivante :

$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(t_1, t_2, \ldots, t_k) = \begin{cases} \sigma_1(2t_1, t_2, \ldots, t_k), \text{ si } t_1 \leq 1/2, \\ \sigma_2(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_k), \text{ si } t_1 \geq 1/2. \end{cases}$$

De la même manière que dans le cas du groupe fondamental, on vérifie que cette opération définit une opération de multiplication sur $\pi_k(X, x_0)$, et que l'opération obtenue munit $\pi_k(X, x_0)$ d'une structure de groupe. On dit que $\pi_k(X, x_0)$ est le *k-ème groupe d'homotopie* de X.

Cette définition généralise celle du groupe fondamental. On peut aussi considérer les définitions introduites dans le cas $k = 0$. On obtient l'ensemble $\pi_0(X, x_0)$ des composantes connexes par arcs de X. Cet ensemble n'a pas de structure naturelle de groupe, mais il a un élément priviligié : la composante connexe par arcs qui contient x_0.

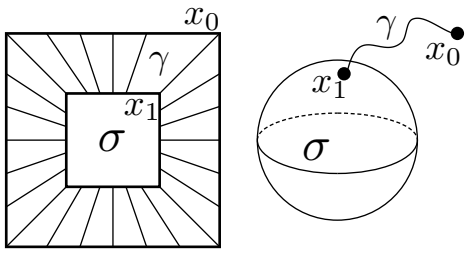
Exercice. Soit (X, x_0) un espace topologique pointé, et soit $k \geq 2$ un entier. Montrer que le groupe $\pi_k(X, x_0)$ est abélien.

1.3 Morphismes induits

Soit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application continue entre des espaces pointés (X, x_0) et (Y, y_0). Pour tout entier $k \geq 2$ et pour toute application $\sigma \in \Omega_k(X, x_0)$, l'application $f \circ \sigma$ appartient à $\Omega_k(Y, y_0)$. De la même façon que dans le cas du groupe fondamental, on montre que cette construction fournit une application $f_* : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0)$ qui est un morphisme de groupes. On dit que le morphisme f_* est induit par f.

PROPOSITION 3.1.
Soit X un espace topologique connexe par arcs, et soient x_0 et x_1 deux points de X. Alors, pour tout entier $k \geq 2$, les groupes $\pi_k(X, x_0)$ et $\pi_k(X, x_1)$ sont isomorphes.

Démonstration. Considérons un chemin $\gamma : I \to X$ tel que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$.

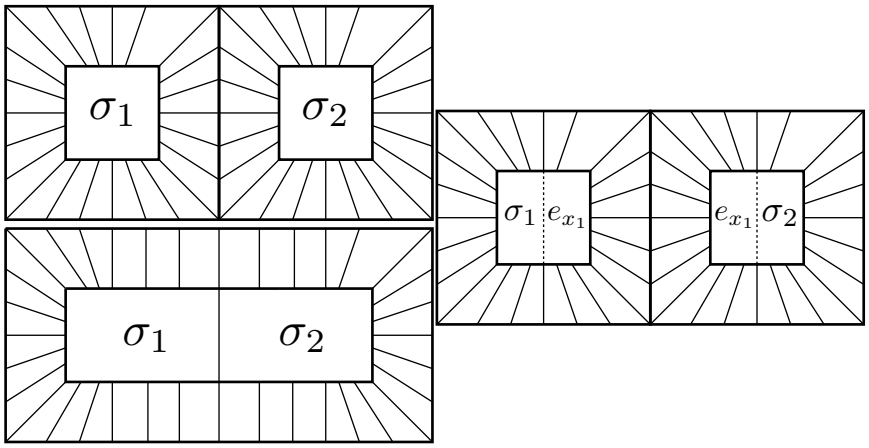


Soit $\sigma \in \Omega_k(X, x_1)$. On définit une application $\sigma' : I^k \to X$ de la façon suivante :

$$\sigma'(t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} \sigma(2t_1 - \frac{1}{2}, \ldots, 2t_k - \frac{1}{2}), \text{ si } \frac{1}{4} \leq t_i \leq \frac{3}{4} \text{ pour tout } i = 1, \ldots, k, \\ \gamma(2 - 4\max\{|t_1 - \frac{1}{2}|, \ldots, |t_k - \frac{1}{2}|\}), \text{ s'il existe } i \text{ tel que } t_i \notin [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]. \end{cases}$$

On a $\sigma' \in \Omega_k(X, x_0)$. De plus, la classe de σ' dans $\pi_k(X, x_0)$ ne dépend que de la classe de σ dans $\pi_k(X, x_1)$. Donc, on obtient une application $\varphi_\gamma : \pi_k(X, x_1) \to \pi_k(X, x_0)$.

On vérifie facilement que φ_γ est un morphisme de groupes.



Si on remplace γ par un chemin homotope, on obtient le même morphisme de groupes. De plus, si $\gamma_1 : [0,1] \to X$ est un chemin tel que $\gamma_1(0) = x_1$, alors $\varphi_{\gamma\gamma_1} = \varphi_{\gamma_1} \circ \varphi_\gamma$. Par conséquent, on obtient que φ_γ est un isomorphisme. □

Si on considère un espace pointé (X, x_0) tel que X soit connexe par arcs, et si on s'intéresse aux groupes d'homotopie $\pi_k(X, x_0)$ à isomorphisme près, on se permet d'écrire $\pi_k(X)$ au lieu de $\pi_k(X, x_0)$.

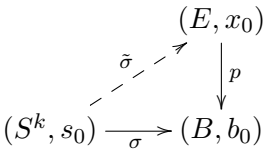
PROPOSITION 3.2.
Soit $p : (E, x_0) \to (B, b_0)$ un revêtement. Alors, le morphisme induit

$$p_* : \pi_k(E, x_0) \to \pi_k(B, b_0)$$

est un isomorphisme pour tout entier $k \geq 2$.

Démonstration. Soit $s_0 \in S^k$ un point.

Surjectivité de p_*. Soit $\sigma : (S^k, s_0) \to (B, b_0)$ un représentant d'un élément de $\pi_k(B, b_0)$.



Il existe un relèvement $\widetilde{\sigma} : (S^k, s_0) \to (E, x_0)$ de σ, car S^k est localement connexe par arcs et simplement connexe (pour $k \geq 2$). La classe de $\widetilde{\sigma}$ dans $\pi_k(E, x_0)$ est dans l'image inverse de l'élément choisi de $\pi_k(B, b_0)$.

Injectivité de p_*. Considérons deux sphéroïdes $\sigma : (S^k, s_0) \to (E, x_0)$ et $\sigma' : (S^k, s_0) \to (E, x_0)$ tels que les sphéroïdes $p \circ \sigma$ et $p \circ \sigma'$ soient homotopes. Soit $H : (S^k \times I, (s_0, 0)) \to (B, b_0)$ une homotopie entre les sphéroïdes $p \circ \sigma$ et $p \circ \sigma'$. L'application H admet un relèvement $\widetilde{H} : (S^k \times I, (s_0, 0)) \to (E, x_0)$, car $S^k \times I$ est localement connexe par arcs et simplement connexe. L'application $\widetilde{H}$ est une homotopie entre les sphéroïdes σ et σ', ce qui démontre l'injectivité de p_*. □

COROLLAIRE 3.3. Le groupe $\pi_k(S^1)$ est trivial pour tout entier $k \geq 2$. □

Exercice. Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ est une équivalence d'homotopie, alors

$$f_* : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0)$$

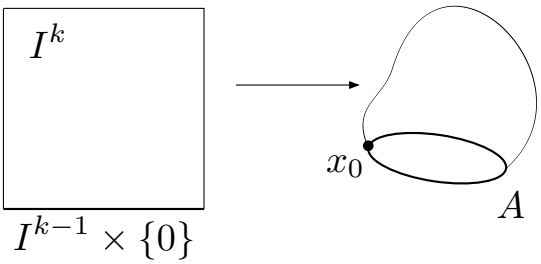
est un isomorphisme pour tout $k \geq 1$.

Exercice (difficile). Calculer les groupes d'homotopie supérieurs de toutes les surfaces connexes compactes (sans bord ou à bord) différentes de S^2 et de $\mathbb{RP}^2$.

1.4 Groupes d'homotopie relatifs

Considérons une paire topologique (X, A) telle que A soit non vide. Soit x_0 un point de A. Fixons un entier $k \geq 1$. Soit $\Omega_k(X, A, x_0)$ l'ensemble des applications continues $\sigma : I^k \to X$ telles que

- $\sigma(t) \in A$ pour tout $t \in I^{k-1} \times \{0\}$;
- $\sigma(t) = x_0$ pour tout $t \in \partial I^k \setminus (\mathring{I}^{k-1} \times \{0\})$, où $\mathring{I}^{k-1}$ est l'intérieur de $I^{k-1} \subset \mathbb{R}^{k-1}$.



L'ensemble des classes d'homotopie de ces applications (on considère des familles à un paramètre d'applications appartenant à $\Omega_k(X, A, x_0)$) est noté $\pi_k(X, A, x_0)$. Remarquons que $\pi_k(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_k(X, x_0)$.

Si $k \geq 2$, on introduit une opération de multiplication sur $\Omega_k(X, A, x_0)$:

$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(t_1, t_2, \ldots, t_k) = \begin{cases} \sigma_1(2t_1, t_2 \ldots, t_k), \text{ si } t_1 \leq 1/2, \\ \sigma_2(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_k), \text{ si } t_1 \geq 1/2, \end{cases}$$

(ici $t = (t_1, \ldots, t_k) \in I$). Cette opération descend à $\pi_k(X, A, x_0)$ et donne une structure de groupe sur cet ensemble. Le groupe obtenu s'appelle le *k-ème groupe d'homotopie* de la paire (X, A) de base x_0.

L'ensemble $\pi_1(X, A, x_0)$ n'a pas de structure naturelle de groupe, mais il a un élément privilégié : la classe de l'application constante qui envoie I dans x_0.

Pour tout entier $k \geq 1$, toute application continue $f : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ entre des triplets (X, A, x_0) et (Y, B, y_0) induit une application $f_* : \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_k(Y, B, y_0)$; l'application f_* est un morphisme de groupes si $k \geq 2$.

1.5 Suite exacte d'homotopie associée à une paire topologique

Considérons à nouveau une paire topologique (X, A) telle que A soit non vide, et soit x_0 un point de A. Soit $k \geq 1$ un entier. Pour toute application $\sigma \in \Omega_k(X, A, x_0)$, la restriction $\sigma_{|I^{k-1} \times \{0\}}$ de σ sur $I^{k-1} \times \{0\}$ fournit une application continue $(I^{k-1}, \partial I^{k-1}) \to (A, x_0)$ qui représente donc une classe dans $\pi_{k-1}(A, x_0)$.

On obtient ainsi une application

$$\partial : \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_{k-1}(A, x_0)$$

qui est un morphisme de groupes si $k \geq 2$.

THÉORÈME 3.4 (Suite exacte d'homotopie associée à une paire).

Soit (X, A) une paire topologique telle que A soit non vide, et soit $x_0 \in A$ un point. On a la suite exacte suivante :

$$\begin{array}{c} \ldots \xrightarrow{\partial} \pi_k(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_k(X, A, x_0) \\ \qquad\qquad \xrightarrow{\partial} \\ \pi_{k-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \\ \qquad\qquad \xrightarrow{j_*} \\ \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0), \end{array}$$

où

$$i : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0) \text{ et } j : (X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$$

sont des inclusions. (Les trois derniers ensembles de la suite n'ont pas de structure naturelle de groupe, mais ils ont chacun un élément privilégié ; pour une application à valeur dans un tel ensemble, on remplace la notion du noyau par l'image inverse de l'élément privilégié.)

Démonstration. Pour tout entier $k \geq 1$, on désigne par J^{k-1} la différence

$$\partial I^k \setminus (\mathring{I}^{k-1} \times \{0\}).$$

Terme $\pi_k(A, x_0)$. On commence par une démonstration de l'exactitude de la suite en $\pi_k(A, x_0)$, où k est un entier positif ou nul :

$$\pi_{k+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_k(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X, x_0)$$

Soit $\sigma : (I^{k+1}, \partial I^{k+1}, J^k) \to (X, A, x_0)$ une application continue. L'application σ peut être vue comme homotopie dans X (relative à ∂I^k) entre $\sigma_{|I^k \times \{0\}}$ et $\sigma_{|I^k \times \{1\}}$. La dernière application est constante : elle envoie tous les points de $I^k \times \{1\}$ sur x_0. Ainsi, $i_* \partial [\sigma]$ est l'élément trivial de $\pi_k(X, x_0)$. Donc, $\operatorname{Im} \partial \subset \operatorname{Ker} i_*$.

Réciproquement, soit $\sigma' : (I^k, \partial I^k) \to (A, x_0)$ une application continue telle que $i_*[\sigma']$ soit l'élément trivial de $\pi_k(X, x_0)$. Alors, il existe une homotopie

$$F : I^k \times I \to X$$

telle que

$$\begin{aligned} F(\cdot, 0) &= \sigma', \\ F(\cdot, 1) &= x_0, \\ F_{|\partial I^k \times I} &= x_0. \end{aligned}$$

L'application F représente une classe dans $\pi_k(X, A, x_0)$, et $\partial [F] = [\sigma']$.

Terme $\pi_k(X, x_0)$. On vérifie l'exactitude de la suite en $\pi_k(X, x_0)$, où k est un entier strictement positif :

$$\pi_k(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_k(X, A, x_0)$$

Soit $\sigma : (I^k, \partial I^k) \to (A, x_0)$ une application continue. Alors, $j_* i_* [\sigma]$ est l'élément trivial de $\pi_k(X, A, x_0)$. En effet, une homotopie entre l'application $i \circ \sigma$, vue comme application

$(I^k, \partial I^k, J^k) \to (X, A, x_0)$, et l'application constante dont la seule valeur est x_0 est donnée par l'application $F : I^k \times I \to X$ définie par

$$F(t_1, \ldots, t_k, t) = (i \circ \sigma)(t_1, \ldots, t_{k-1}, (1-t)t_k + t).$$

Donc, $\operatorname{Im} i_* \subset \operatorname{Ker} j_*$.

Montrons maintenant que $\operatorname{Ker} j_* \subset \operatorname{Im} i_*$. Soit

$$\sigma' : (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$$

une application continue telle que $j_*[\sigma'] = 0$. Il existe une homotopie

$$G : I^k \times I \to X$$

telle que

$$G(\cdot, 0) = \sigma',$$
$$G(\cdot, 1) = x_0,$$

et G envoie $\partial I^k \times I$ dans A et envoie $J^{n-1} \times I$ sur x_0. La rotation autour de $I^{k-1} \times \{0\} \subset I^{k+1}$ produit une homotopie dans X relativement à ∂I^k entre σ' et $G_{|(I^{k-1} \times \{0\}) \times I}$. La dernière application est à valeurs dans A. Donc, la classe $[\sigma'] \in \pi_k(X, x_0)$ appartient à $\operatorname{Im} i_*$.

Terme $\pi_k(X, A, x_0)$. On vérifie maintenant l'exactitude de la suite en $\pi_k(X, A, x_0)$, où k est un entier strictement positif :

$$\pi_k(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_k(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(A, x_0)$$

Soit $\sigma : (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ une application continue. En considérant cette application comme application de $(I^k, \partial I^k, J^{k-1})$ à (X, x_0, x_0), on obtient que l'application composée

$$j \circ \sigma : (I^k, \partial I^k, J^{k-1}) \to (X, A, x_0)$$

a la valeur x_0 en tout point de ∂I^k. Il s'en suit que $\partial[j \circ \sigma]$ est l'élément trivial de $\pi_{k-1}(A, x_0)$, où $[j \circ \sigma]$ est la classe réalisée par $j \circ \sigma$ dans $\pi_k(X, A, x_0)$. Par conséquent, $\operatorname{Im} j_* \subset \operatorname{Ker} \partial$.

Montrons que $\operatorname{Ker} \partial \subset \operatorname{Im} j_*$. Soit $\sigma' : (I^k, \partial I^k, J^{k-1}) \to (X, A, x_0)$ une application continue telle que $\partial[\sigma'] = 0$. Donc, il existe une homotopie

$$H : I^{k-1} \times I \to A$$

telle que

$$H(\cdot, 0) = \sigma'_{|I^{k-1} \times \{0\}},$$
$$H(\cdot, 1) = x_0.$$

On définit une homotopie $F : \partial I^k \times I \to X$ de la façon suivante : $F(t_1, \ldots, t_k, t) = H(t_1, \ldots, t_k)$ si $t_k = 0$ et $F(t_1, \ldots, t_k, t) = x_0$ si $t_k \neq 0$. Considérons l'application $G : (I^k \times \{0\}) \cup (\partial I^k \times I) \to X$ par $G(t_1, \ldots, t_k, t) = \sigma'(t_1, \ldots, t_k)$ si $(t_1, \ldots, t_k, t) \in I^k \times \{0\}$ et $G(t_1, \ldots, t_k, t) = F(t_1, \ldots, t_k, t)$ si $(t_1, \ldots, t_k, t) \in \partial I^k \times I$. Soit

$$P : I^k \times I \to (I^k \times \{0\}) \cup (\partial I^k \times I)$$

la projection de centre $(1/2, \ldots, 1/2, 3/2) \in \mathbb{R}^{k+1}$. L'application $G \circ P$ est une homotopie entre $(G \circ P)_{|I^k \times \{0\}} = \sigma'$ et $(G \circ P)_{|I^k \times \{1\}}$ telle que l'application $(G \circ P)_{|I^k \times \{t\}}$ définit un élément de $\Omega_k(X, A, x_0)$ pour tout $t \in I$. De plus, $(G \circ P)_{|I^k \times \{1\}}$ appartient à $\Omega_k(X, x_0)$. Par conséquent, la classe $[\sigma'] \in \pi_{X,A,x_0}$ appartient à l'image de j_*. □

COROLLAIRE 3.5.
Si A est contractile, alors le morphisme

$$j_* : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(X, A, x_0)$$

est un isomorphisme pour tout entier $k \geq 2$ (c'est une bijection pour $k = 1$). □

Exercice. Soient (X, A) et (Y, B) des paires topologiques, et soient $x_0 \in A$ et $y_0 \in B$ des points. Soit $g : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ une application continue. Alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots \pi_k(A, x_0) & \longrightarrow & \pi_k(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_k(X, A, x_0) & \longrightarrow & \pi_{k-1}(A, x_0) & \longrightarrow & \pi_{k-1}(X, x_0) \ldots \\
\downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\
\ldots \pi_k(B, y_0) & \longrightarrow & \pi_k(Y, y_0) & \longrightarrow & \pi_k(Y, B, y_0) & \longrightarrow & \pi_{k-1}(B, y_0) & \longrightarrow & \pi_{k-1}(Y, y_0) \ldots
\end{array}$$

DÉFINITION 3.2. On dit que (X, A) est une *paire de* BORSUK si, pour toute application continue $F : X \to Y$, toute homotopie $f_t : A \to Y$ telle que $f_0 = F_{|A}$ admet une extension à une homotopie $F_t : X \to Y$ telle que $F_0 = F$. (Cette propriété s'appelle *propriété d'extension des homotopies.*)

THÉORÈME 3.6 (BORSUK). Si X est un CW-complexe et $A \subset X$ est un sous-complexe de X, alors (X, A) est une paire de BORSUK.

Exercice. Démontrer le théorème de Borsuk (on pourrait s'inspirer de la dernière partie de la démonstration du Théorème 3.4).

Pour une paire topologique (X, A), on note X/A l'espace quotient de X par la relation d'équivalence engendrée par l'identification de tous les points de A.

PROPOSITION 3.7. Soit (X, A) une paire de Borsuk telle que A soit contractile. Alors, la projection canonique $p : X \to X/A$ est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Puisque A est contractile, il existe une homotopie $f_t : A \to A$ $(t \in I)$ telle que $f_0 = \mathrm{id}_A$ et $f_1(A) = \{x_0\}$. Puisque (X, A) est une paire de Borsuk, il existe une homotopie $F_t : X \to X$ telle que $F_0 = \mathrm{id}_X$ et $F_{t\ |A} = f_t$ pour tout $t \in I$. On a $F_1(A) = \{x_0\}$. Donc, il existe une application continue $q : X/A \to X$ telle que $F_1 = q \circ p$. Par construction, $q \circ p$ est homotope à id_X.

Montrons que $p \circ q$ est homotope à $\mathrm{id}_{X/A}$. On a $F_t(A) \subset A$ pour tout $t \in I$. Donc, $(p \circ F_t)(A) = \{x_0\}$. Par conséquent, il existe une homotopie $h_t : X/A \to X/A$ telle que $p \circ F_t = h_t \circ p$ pour tout $t \in I$. Il reste à remarquer que $h_0 = \mathrm{id}_{X/A}$ et $h_1 = p \circ q$. □

2 Applications cellulaires

2.1 Approximation cellulaire

Soient X et Y des CW-complexes. Une application continue $f : X \to Y$ est dite *cellulaire*, si, pour tout entier $n \geq 0$, l'image $f(X_n)$ de n-squelette X_n de X est contenue dans le n-squelette Y_n de Y. Le but de cette section est de montrer que toute application continue entre deux CW-complexes est homotope à une application cellulaire. En fait, nous allons démontrer un énoncé un peu plus fort.

THÉORÈME 3.8 (Théorème d'approximation cellulaire).
Soient X et Y des CW-complexes, et soit $f : X \to Y$ une application continue telle que $f_{|X'} : X' \to Y$ est cellulaire pour un certain sous-complexe $X' \subset X$. Alors, il existe une application cellulaire $g : X \to Y$ telle que g soit homotope à f relativement à X'.

Puisque toute composante connexe par arcs de Y contient au moins un point de Y_0, toute application continue de X dans Y est homotope à une application qui envoie X_0 dans Y_0. Donc, le Théorème 3.8 implique l'énoncé ci-dessus : toute application continue entre deux CW-complexes est homotope à une application cellulaire.

Démonstration du Théorème 3.8. Supposons que la restriction de f sur $X' \cup X_{m-1}$ est cellulaire pour un certain entier $m \geq 1$. Soit $e^m \subset X$ une cellule de dimension m telle que e^m ne soit pas contenue dans X'. Puisque l'adhérence $\overline{e}^m$ de e^m est compacte, l'image $f(e^m)$ a une intersection non vide avec un nombre fini de cellules de Y. Choisissons une cellule ε^n de dimension maximale parmi ces cellules. Si la dimension n de ε^n est inférieure ou égale à m, alors la restriction de f sur e^m n'a pas besoin d'être modifiée et on peut passer à une autre cellule. Considérons le cas $n > m$.

Supposons d'abord que $\varepsilon^n \setminus f(e^m) \neq \varnothing$. Soit y un point de $\varepsilon^n \setminus f(e^m)$. Notons $\varphi : D^m \to X$ et $\psi : D^n \to Y$ des applications caractéristiques des cellules e^m et ε^n, respectivement. On pose $z = \psi^{-1}(y)$. Notons $p_z : D^n \setminus \{z\} \to S^{n-1}$, où $S^{n-1} \subset D^n$ est le bord de D^n, la projection de centre z, et soit $g_t : D^n \setminus \{z\} \to D^n \setminus \{z\}$, $t \in I$, l'homotopie rectiligne entre l'identité de $D^n \setminus \{z\}$ et p_z. On considére une homotopie $H : \overline{e}^m \times I \to Y$, où $\overline{e}^m$ est l'adhérence de la cellule e^m dans X, telle que $H_{|(\overline{e}^m \times \{0\})} = f_{|\overline{e}^m}$ et $h_t = H_{|(\overline{e}^m \times \{t\})}$, $t \in I$, soit définie de la façon suivante :

- si $x \in \overline{e}^m$ et $x \notin f^{-1}(\varepsilon^n)$, alors $h_t(x) = f(x)$ pour tout $t \in I$;
- si $x \in \overline{e}^m$ et $x \in f^{-1}(\varepsilon^n)$, alors $h_t(x) = \psi(g_t(\psi^{-1}(f(x))))$ pour tout $t \in I$.

On peut prolonger H sur $(X' \cup X_m \cup \overline{e}^m) \times I$ en posant $H(x,t) = f(x)$ pour tout $x \in X' \cup X_m$ et tout $t \in I$. Ensuite, d'après le théorème de BORSUK, l'homotopie obtenue peut être prolongée à une homotopie $\widetilde{H} : X \times I \to Y$ relative à $X' \cup X_m \cup e^m$.

Si $\varepsilon^n \setminus f(e^m) = \varnothing$, on peut utiliser le lemme ci-dessous pour réduire ce cas au cas précédent.

En répétant plusieurs fois des homotopies décrites, on obtient une application continue $f_1 : X \to Y$ telle que f et f' soient homotopes relativement à $X' \cup X_m$ et

$$f_1(X' \cup X_m \cup e^m) \subset Y_m.$$

Remarquons que cette procédure peut être appliquée à toutes les cellules de dimension donnée de façon simultanée. Donc, le raisonnement pas récurrence donne une démonstration du théorème dans le cas où le CW-complexe X est de dimension finie. Pour terminer la démonstration dans le cas où X est de dimension infinie, on utilise le fait qu'un sous-ensemble de X est fermé si et seulement si, pour toute cellule de X, l'intersection du sous-ensemble avec l'adhérence de la cellule (dans X) est fermée dans cette adhérence.

Il nous reste à démontrer le lemme suivant.

LEMME 3.9.
Soient $m < n$ deux entiers strictement positifs. Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, et soit $\xi : U \to \mathring{D}^n$ une application continue vérifiant la propriété suivante : il existe un disque fermé $d^n \subset \mathring{D}^n$ de dimension n tel que $V = \varphi^{-1}(d^n) \subset U$ soit un sous-ensemble compact. Alors, il existe une application continue $\eta : U \to \mathring{D}^n$, homotope à ξ, telle que

$$\xi_{|(U \setminus V)} = \eta_{|(U \setminus V)} \quad \text{et} \quad d^n \setminus \eta(U) \neq \varnothing.$$

Ce lemme est démontré dans la section suivante. □

COROLLAIRE 3.10.
Soient $k < n$ des entiers strictement positifs. Alors, le groupe $\pi_k(S^n)$ est trivial.

Démonstration. La sphère S^n admet une décomposition cellulaire formée par deux cellules : une cellule de dimension 0 et une cellule de dimension n. Il reste à appliquer le Théorème 3.8. □

2.2 Approximation simpliciale

Les constructions de cette section sont basées sur la notion de subdivision barycentrique d'un complexe simplicial.

La subdivision barycentrique d'un simplexe est définie de façon recursive. La subdivision barycentrique d'un point est formée du point lui-même. Si $\delta \subset \mathbb{R}^n$ est un simplexe, la subdivision barycentrique de δ est le complexe simplical géométrique formé par les simplexes des subdivisions barycentriques des faces de codimension ≥ 1 de δ, ainsi que par les cônes, ayant pour sommet le barycentre de δ, au-dessus de ces simplexes. La subdivision barycentrique d'un complexe simplicial géométrique fini $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}^m$ est formée par les simplexes des subdivisions barycentriques de tous les simplexes de $\mathcal{K}$.

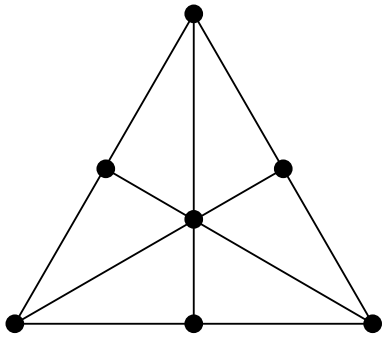


FIGURE 3.1 – Subdivision barycentrique

Exercice. Soient $k \leq n$ deux entiers strictement positifs. Soit δ' un k-simplexe de la subdivision barycentrique d'un k-simplexe $\delta \subset \mathbb{R}^n$. Alors, $\mathrm{diam}(\delta') \leq \frac{k}{k+1}\mathrm{diam}(\delta)$, où $\mathrm{diam}(\delta')$ et $\mathrm{diam}(\delta)$ sont les diamètres de δ' et δ, respectivement.

Exercice. Soit $m \geq 1$ un entier. Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un sous-ensemble ouvert, et soit $V \subset U$ un sous-ensemble compact. Alors, il existe un complexe simplicial géométrique fini $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}^m$ tel que $V \subset |\mathcal{K}| \subset U$.

Maintenant, nous sommes prêts pour la démonstration du Lemme 3.9.

Démonstration du Lemme 3.9. Soient d_1, d_2, d_3 et d_4 les disques dans $\mathbb{R}^n$ de même centre que d^n est de rayons $r/5$, $2r/5$, $3r/5$ et $4r/5$, respectivement, où r est le rayon de d^n.

Soit $\mathcal{K}$ un complexe simplicial géométrique fini dans $\mathbb{R}^m$ tel que $V \subset |\mathcal{K}| \subset U$. En utilisant les subdivisions barycentriques successives de $\mathcal{K}$, on peut supposer que le diamètre de l'image par ξ de tout simplexe de $\mathcal{K}$ est strictement inférieur à $r/5$.

Soit $\mathcal{K}_1$ le sous-complexe de $\mathcal{K}$ formé par tous les simplexes δ de $\mathcal{K}$ tels que $\xi(\delta) \cap d_4 \neq \varnothing$. Considérons l'application $\xi_1 : |\mathcal{K}_1| \to d^5$ telle que ξ_1 coïncide avec ξ sur les sommets de $\mathcal{K}_1$ et ξ_1 soit affine sur chaque simplexe de $\mathcal{K}_1$. Les applications $\xi_{|\,|\mathcal{K}_1|}$ et ξ_1 sont homotopes (ce qui est certifié par l'homotopie rectiligne), et l'image de ξ_1 est contenue dans d_4. On note ξ_t, $t \in I$, l'homotopie rectiligne entre $\xi_{|\,|\mathcal{K}_1|}$ et ξ_1.

Considérons l'application $\eta : U \to \mathring{D}^n$ définie de la façon suivante :

$$\eta(x) = \begin{cases} \xi(x), \text{ si } \xi(x) \notin d_3 \\ \xi_1(x), \text{ si } \xi(x) \in d_2 \\ \xi_{3-\frac{5r(x)}{r}}, \text{ si } \xi(x) \in d_3 \setminus d_2, \end{cases}$$

où $r(x)$ est la distance entre $\xi(x)$ et le centre du disque d^n. L'application η est continue et coïncide avec ξ sur $U \setminus V$. De plus, les applications ξ et η sont homotopes. Finalement, l'intersection $\eta(U) \cap d_1$ est formée d'une collection finie de morceaux d'espaces affines de dimension $\leq m$. Donc, il existe un point $y \in d_1$ tel que y ne soit pas contenu dans l'image de η. □

Il existe une version simpliciale du théorème d'approximation cellulaire (cette version simpliciale n'est pas un cas particulier du théorème d'approximation cellulaire).

Soient $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ deux complexes simpliciaux géométriques finis, et soit $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ une application continue. On dit que f est une *application simpliciale* si elle envoie de façon affine tout simplexe de $\mathcal{K}$ sur un simplexe de $\mathcal{L}$ (en particulier, l'image de chaque sommet de $\mathcal{K}$, c'est-à-dire, l'image de chaque 0-simplexe de $\mathcal{K}$, est un sommet de $\mathcal{L}$).

Si $\mathcal{K}$ est un complexe simplicial géométrique fini, un *raffinement* $\mathcal{K}^{raf}$ de $\mathcal{K}$ est un complexe simplicial géométrique fini $\mathcal{K}^{raf}$ tel que $|\mathcal{K}^{raf}| = |\mathcal{K}|$ et tout simplexe de $\mathcal{K}$ soit une réunion de certains simplexes de $\mathcal{K}^{raf}$. Un exemple de raffinement est donné par la subdivision barycentrique.

Théorème 3.11 (Approximation simpliciale).
Soient $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ deux complexes simpliciaux géométriques finis, et soit $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ une application continue. Alors, il existe un raffinement $\mathcal{K}^{raf}$ de $\mathcal{K}$ et une application simpliciale $f_1 : |\mathcal{K}^{raf}| \to |\mathcal{L}|$ tels que f et f_1 soient homotopes. De plus, si V est l'ensemble des sommets de $\mathcal{K}$ qui sont envoyés par f sur des sommets de $\mathcal{L}$, alors l'application simpliciale f_1 peut être choisie de telle façon que f et f_1 soient homotopes relativement à V.

Démonstration. Notons $\mathcal{L}^{bar}$ la subdivision barycentrique de $\mathcal{L}$. En utilisant les subdivisions barycentriques successives de $\mathcal{K}$, on peut supposer que, pour tout simplexe σ de $\mathcal{L}$ et tout sommet v de $\mathcal{L}$ tel que $v \notin \delta$, l'image par f de tout simplexe de $\mathcal{K}$ a l'intersection vide soit avec δ, soit avec l'étoile $E^{bar}(v)$ de v dans $\mathcal{L}^{bar}$ (l'*étoile* d'un sommet d'un complexe simplicial géométrique est la réunion de tous les simplexes du complexe qui contiennent ce sommet).

On définit une application f_1 à valeurs dans $|\mathcal{L}|$ d'abord sur les sommets de $\mathcal{K}$. Si w est un sommet de $\mathcal{K}$, l'image $f(w)$ appartient à $E^{bar}(v)$ pour un certain sommet v de $\mathcal{L}$. On pose $f_1(w) = v$ (dans le cas où on a plusieurs sommets v possibles, on choisit un des ces sommets de façon arbitraire). Ensuite, on prolonge l'application f_1 sur $|\mathcal{K}|$ de manière affine pour chaque simplexe de $\mathcal{K}$. L'application f_1 est simpliciale par construction. De plus, les applications f et f_1 sont homotopes. En effet, si un point x appartient à un simplexe λ de $\mathcal{K}$ et $f(x)$ appartient à un simplexe δ de $\mathcal{L}$, alors $f_1(x) \in \delta$ (sinon, on aurait un sommet w de λ tel que $f(w) \in E^{bar}(v)$ pour un certain sommet v qui n'appartient pas à δ). Donc, les applications f et f_1 sont reliées par l'homotopie rectiligne. □

3 Fibrations localement triviales

Définition 3.3.
Un quadruplet (E, B, F, p), où E, B et F sont des espaces topologiques non vides et $p : E \to B$ est une application continue, est une *fibration localement triviale* si, pour

tout $b \in B$, il existe un voisinage U de b et un homéomorphisme

$$\psi : p^{-1}(U) \to U \times F$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & U \times F \\ & {\scriptstyle p_{|p^{-1}(U)}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathrm{pr_U}} & \\ & U & \end{array}$$

Par abus de langage, une telle application $p : E \to B$ s'appelle aussi une fibration localement triviale. Les espaces E et B s'appellent, respectivement, l'*espace total* et la *base* de fibration.

Exemples.

(1) Si B et F sont des espaces topologiques non vides, alors la projection

$$\mathrm{pr_B} : B \times F \to B$$

est une fibration localement triviale. Une telle application s'appelle *fibration triviale standard*. On introduit de façon naturelle la notion d'isomorphisme pour les fibrations localement triviales de base B. Toute fibration localement triviale de base B isomorphe à une fibration triviale standard est dite *triviale*.

(2) Tout revêtement de base connexe est une fibration localement triviale.

(3) La projection du ruban de Möbius sur son cercle central est une fibration non triviale.

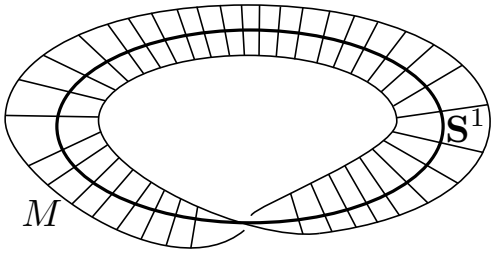


Figure 3.2 – Projection du ruban de Möbius sur son cercle central

(4) La fibration de Hopf est également non triviale. C'est la fibration localement triviale

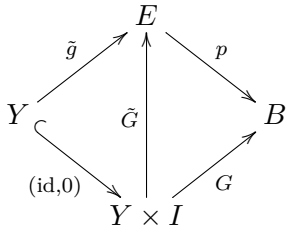
$$(S^3, S^2, S^1, p),$$

où l'application $p : S^3 \to S^2$ est définie de la manière suivante. On représente S^3 comme

$$S^3 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = 1 \right\},$$

on identifie S^2 avec $\mathbb{CP}^1$, et on considère l'application $p(z_1, z_2) = (z_1 : z_2)$. Il est facile à vérifier que c'est une fibration localement triviale dont les fibres sont homéomorphes à S^1. Elle s'appelle la *fibration de* Hopf.

Définition 3.4.



Soit $p : E \to B$ une application continue entre deux espaces topologiques non vides E et B. On dit que p est une *fibration de* Serre, si, pour tout CW-complexe Y, toute application continue $\tilde{g} : Y \to E$ et toute homotopie

$$G : Y \times I \to B$$

telle que

$$G_{|Y\times\{0\}} = p \circ \tilde{g},$$

l'homotopie G admet un relèvement

$$\tilde{G} : Y \times I \to E$$

tel que

$$p \circ \tilde{G} = G \text{ et } \tilde{G}_{|Y\times\{0\}} = \tilde{g}.$$

Si la propriété ci-dessus est vérifiée pour tout espace topologique non vide Y, on dit que $p : E \to B$ est une *fibration de* Hurewicz. Toute fibration localement triviale est une fibration de Serre. C'est un cas particulier de l'énoncé suivant.

Proposition 3.12 (Propriété de relèvement et d'extension d'homotopie).

Soit $p : E \to B$ une fibration localement triviale, Y un CW-complexe, et $Y' \subset Y$ un sous-complexe. Soit $\widetilde{g} : Y \to E$ une application continue, $G : Y \times I \to B$ une homotopie telle que $G_{|Y\times\{0\}} = p \circ \widetilde{g}$, et $\widetilde{G}' : Y' \times I \to E$ une homotopie telle que $p \circ \widetilde{G}' = G_{|Y'\times I}$ et $\widetilde{G}'_{|Y'\times\{0\}} = \widetilde{g}_{|Y'}$. Alors, il existe une homotopie $\widetilde{G} : Y \times I \to E$ telle que

$$p \circ \widetilde{G} = G, \quad \widetilde{G}_{|Y'\times I} = \widetilde{G}' \quad \text{et} \quad \widetilde{G}_{|Y\times\{0\}} = \widetilde{g}.$$

La démonstration de cette proposition, ainsi que celle de l'énoncé suivant, est laissée en exercice.

Proposition 3.13.

Soit $p : (E, x_0) \to (B, b_0)$ une fibration localement triviale. On pose $F = p^{-1}(b_0)$. Alors,

$$p_* : \pi_k(E, F, x_0) \to \pi_k(B, b_0)$$

est un isomorphisme pour tout $k \geq 2$ (et c'est une bijection pour $k = 1$).

Corollaire 3.14 (Suite exacte de fibration). Soit $p : (E, x_0) \to (B, b_0)$ une fibration localement triviale. On pose $F = p^{-1}(b_0)$. Alors, on a la suite exacte suivante :

$$\ldots \xrightarrow{\partial'} \pi_k(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(E, x_0) \xrightarrow{j'_*} \pi_k(B, b_0) \xrightarrow{\partial'} \pi_{k-1}(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

où j' est la composée de l'inclusion $j : (E, x_0, x_0) \to (E, F, x_0)$ et de l'application $p : (E, F, x_0) \to (B, x_0, x_0)$ (autrement dit, $j'_* = p_*$ est induit par $p : (E, x_0) \to (B, b_0)$), et ∂' est la composée de l'inverse de l'isomorphisme de la Proposition 3.13 et du morphisme ∂ de la suite exacte d'homotopie associée à la paire (E, F). □

En utilisant la suite exacte du Corollaire 3.14 dans le cas de la fibration de Hopf, on obtient les isomorphismes suivants :

$$\pi_2(S^2) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1)$$

et lorsque $k \geq 3$,

$$\pi_k(S^3) \xrightarrow{\sim} \pi_k(S^2).$$

En effet, on a la suite exacte

$$\begin{array}{c} \ldots \xrightarrow{\partial'} \pi_k(S^1, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(S^3, x_0) \xrightarrow{j'_*} \pi_k(S^2, b_0) \xrightarrow{\partial'} \pi_{k-1}(S^1, x_0) \\ \ldots \xrightarrow{i_*} \ldots \\ \pi_2(S^3, x_0) \xrightarrow{j'_*} \pi_2(S^2, b_0) \xrightarrow{\partial'} \pi_1(S^1, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(S^3, x_0) \xrightarrow{j'_*} \ldots \end{array}$$

(Ici, $p : S^3 \to S^2$ est la fibration de Hopf, $x_0 \in S^3$ est un point, $b_0 = p(x_0)$, et S^1 est identifié avec la fibre $p^{-1}(b_0)$.)

Pour tout entier $k \geq 3$, les groupes $\pi_k(S^1, x_0)$ et $\pi_{k-1}(S^1, x_0)$ sont triviaux. Donc,

$$j'_* : \pi_k(S^3, x_0) \to \pi_k(S^2, b_0)$$

est un isomorphisme. Les groupes $\pi_2(S^3, x_0)$ et $\pi_1(S^3, x_0)$ sont triviaux. Donc,

$$\partial' : \pi_2(S^2, b_0) \to \pi_1(S^1, x_0)$$

est aussi un isomorphisme.

Pour déterminer le groupe $\pi_n(S^n)$ pour les entiers $n \geq 3$, on peut utiliser le théorème de Freudenthal.

Pour toute application continue $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques, on peut considérer la *suspension* Σf de f. C'est l'application $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ entre les suspensions de X et Y définie par

$$\Sigma f(x, \tau) = (f(x), \tau)$$

pour tout $x \in X$ et tout $\tau \in I$ (on utilise la même notation $(\cdot, \tau)$ pour l'image de $(\cdot, \tau)$ par la projection canonique).

Soient n et k deux entiers strictement positifs. La suspension de tout sphéroïde

$$\sigma : (S^k, s_0) \to (S^n, x_0)$$

peut être interpretée comme sphéroïde

$$\Sigma\sigma : (S^{k+1}, (s_0, 1/2)) \to (S^{n+1}, (x_0, 1/2)).$$

Cette construction fournit un morphisme $\pi_k(S^n, x_0) \to \pi_{k+1}(S^{n+1}, (x_0, 1/2))$ qui s'appelle *morphisme de suspension.*

Théorème 3.15 (Freudenthal).
Soient n et k deux entiers strictement positifs. Le morphisme de suspension

$$\pi_k(S^n, x_0) \to \pi_{k+1}(S^{n+1}, (x_0, 1/2))$$

est un isomorphisme si $k \leq 2n-2$ et est un épimorphisme si $k = 2n-1$.

Démonstration. L'énoncé est immédiat si $k < n$. Supposons que $n \leq k \leq 2n-1$. Soit $\rho : (S^{k+1}, (s_0, 1/2)) \to (S^{n+1}, (x_0, 1/2))$ un $(k+1)$-sphéroïde. On va montrer qu'il existe un k-sphéroïde $\sigma : (S^k, s_0) \to (S^n, x_0)$ tel que les sphéroïdes $\Sigma\sigma$ et ρ soient homotopes. Considérons des triangulations des sphères S^{k+1} et S^{n+1} telles que

- $(s_0, 1/2)$ soit un sommet de la triangulation de S^{k+1} ;
- $(x_0, 1/2)$ soit un sommet de la triangulation de S^{n+1} ;
- le pôle nord N (l'image de $S^n \times \{1\}$ dans ΣS^n) et le pôle sud S (l'image de $S^n \times \{0\}$ dans ΣS^n) de S^{n+1} appartiennent chacun à l'intérieur d'un simplexe de dimension $n+1$ de la triangulation de S^{n+1} ;
- pour un point $q \in \rho^{-1}(S^{n+1} \setminus \{N, S\})$ appartenant à l'intérieur d'un simplexe Δ de dimension $k+1$ de la triangulation de S^{k+1}, la projection stéréographique de centre q identifie la triangulation de S^{k+1}, privée du simplexe Δ, avec un complexe simplicial géométrique dans $\mathbb{R}^{k+1}$.

Par la suite, on suppose que $S^{k+1} \setminus \{q\}$ est identifié avec $\mathbb{R}^{k+1}$ par la projection stéréographique. D'après le théorème d'approximation simpliciale (Théorème 3.11), on peut supposer (en raffinant, si nécessaire, la triangulation de S^{k+1}) que l'application ρ est simpliciale. On pose $K_N = \rho^{-1}(N)$ et $K_S = \rho^{-1}(S)$. Chacun des sous-ensembles $K_N, K_S \subset S^{k+1} \setminus \{q\} \simeq \mathbb{R}^{k+1}$ est naturellement subdivisé en polytopes convexes (les intersections de K_N et K_S avec les simplexes de la triangulation de S^{k+1}). En raffinant ces subdivisions de K_N et K_S, on représente K_N et K_S comme supports de complexes simpliciaux géométriques finis $\mathcal{K}_N$ et $\mathcal{K}_S$.

Le lemme suivant concerne les complexes simpliciaux géométriques finis et est facile à démontrer.

Lemme 3.16.
Soit m un entier strictement positif, et soient $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ des complexes simpliciaux géométriques finis de dimensions d_1 et d_2, respectivement, dans $\mathbb{R}^m$. On pose $K_1 = |\mathcal{K}_1|$ et $K_2 = |\mathcal{K}_2|$.

(1) Si $d_1 + d_2 < m$, alors, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une translation $t_v : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de vecteur v de norme inférieure à ε telle que $K_1 \cap t_v(K_2) = \varnothing$.
(2) Si $d_1 + d_2 < m-1$, les complexes simpliciaux $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ ne sont pas *enlacés*, c'est-à-dire, il existe une homotopie $H : \mathbb{R}^m \times I \to \mathbb{R}^m$ telle que
   - pour tout $t \in I$, l'application $h_t = H|_{\mathbb{R}^m \times \{t\}}$ est un homéomorphisme qui est l'identité à l'extérieur d'une certaine boule $B \subset \mathbb{R}^m$;
   - l'application $h_0 = H|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}}$ coïncide avec l'identité de $\mathbb{R}^m$;
   - les images de K_1 et K_2 par $h_1 = H|_{\mathbb{R}^m \times \{1\}}$ peuvent être séparées par un hyperplan de $\mathbb{R}^m$.

Puisque N et S appartiennent chacun à l'intérieur d'un simplexe de dimension $n+1$ de la triangulation de S^{n+1}, les dimensions d_N et d_S de $\mathcal{K}_N$ et $\mathcal{K}_S$ sont inférieures ou égales à $(k+1)-(n+1)$. Puisque $2(k-n) < k$, le Lemme 3.16 implique que les complexes simpliciaux $\mathcal{K}_N$ et $\mathcal{K}_S$ ne sont pas enlacés dans $\mathbb{R}^{k+1}$. Par conséquent, il existe une homotopie $H : S^{k+1} \times I \to S^{k+1}$ (on peut la supposer relative à $\{(s_0, 1/2)\}$), telle que

- pour tout $t \in I$, l'application $h_t = H|_{S^{k+1}\times\{t\}}$ est un homéomorphisme ;
- l'application $h_0 = H|_{S^{k+1}\times\{0\}}$ coïncide avec l'identité de S^{k+1} ;
- les images de K_N et K_S par $h_1 = H|_{\mathbb{R}^m\times\{1\}}$ peuvent être séparées par un équateur $E \subset S^{k+1}$ (autrement dit, $h_1(K_N)$ est contenu dans une des deux demi-sphères de $S^{k+1} \setminus E$, et $h_1(K_S)$ est contenu dans l'autre demi-sphère) ; on peut supposer que E est l'image de $S^k \times \{1/2\}$ dans ΣS^k et que $h_1(K_N)$ (respectivement, $h_1(K_S)$) est contenu dans la demi-sphère supérieure (respectivement, inférieure).

Pour tout nombre réel $0 < \delta < 1$, on note V_δ (respectivement, U_δ) l'image de $S^n \times [0;\delta[$ (respectivement, $S^n\times]1-\delta;1]$) dans ΣS^n. Si $\delta > 0$ est suffisamment petit, les voisinages U_δ et V_δ de N et S, respectivement, vérifient $(\rho \circ h_1^{-1})(E) \subset S^{n+1} \setminus (U_\delta \cup V_\delta)$. Fixons un tel nombre δ. Considérons une homotopie $G : S^{n+1} \times I \to S^{n+1}$ relative à $\{(x_0, 1/2)\}$ et formée d'applications $g_t : S^{n+1} \to S^{n+1}$, $t \in I$, telles que g_0 est l'identité,

$$g_1(U_\delta) = U_{1/2}, \quad \text{et} \quad g_1(V_\delta) = V_{1/2}.$$

Le $(k+1)$-sphéroïde $g_1 \circ \rho \circ h_1^{-1}$ est homotope au $(k+1)$-sphéroïde ρ. L'application $f_0 = g_1 \circ \rho \circ h_1^{-1}$ envoie l'équateur E sur l'équateur E' (l'image de $S^n \times \{1/2\}$ dans ΣS^n) de S^{n+1} et les demi-sphères supérieure et inférieure de S^{k+1} sur les demi-sphères supérieure et inférieure de S^{n+1}, respectivement. Donc, l'application f_0 est homotope, relativement à $\{(s_0, 1/2)\}$, à la suspension de la restriction de f_0 sur E (vue comme application à valeurs dans E') : pour tout $t \in I$, on considère l'application $f_t : \Sigma S^k \to \Sigma S^n$ définie par

$$f_t(x,\tau) = \begin{cases} f_0(x, 1/2), & \text{si } \tau \in [\frac{1-t}{2}; \frac{1+t}{2}], \\ f_0(x, \frac{\tau}{1-t} - \frac{t}{1-t}), & \text{si } \tau \in [\frac{1+t}{2}; 1], \\ f_0(x, \frac{\tau}{1-t}), & \text{si } \tau \in [0, \frac{1-t}{2}]. \end{cases}$$

L'application f_1 est la suspension de la restriction de f_0 sur E. Ceci montre que le morphisme de suspension

$$\pi_k(S^n, x_0) \to \pi_{k+1}(S^{n+1}, (x_0, 1/2))$$

est surjectif (sous l'hypothèse $k \leq 2n-1$).

Il reste à montrer que, sous l'hypothèse $n \leq k \leq 2n-2$, le morphisme de suspension

$$\pi_k(S^n, x_0) \to \pi_{k+1}(S^{n+1}, (x_0, 1/2))$$

est injectif. On considère deux k-sphéroïdes $\sigma_1, \sigma_2 : (S^k, s_0) \to (S^n, x_0)$ tels que les $(k+1)$-sphéroïdes $\Sigma\sigma_1$ et $\Sigma\sigma_2$ soient homotopes. Soit $F' : S^{k+1} \times I \to S^{n+1}$ une homotopie entre les $(k+1)$-sphéroïdes $\Sigma\sigma_1$ et $\Sigma\sigma_2$. On veut modifier l'homotopie F' de telle façon que le résultat soit formé d'applications qui sont des suspensions de k-sphéroïdes appartenant à $\Omega_k(S^n, x_0)$. Cela peut être réalisé en utilisant des arguments similaires à ceux présentés ci-dessus (en remplaçant S^{k+1} par $S^{k+1} \times I$). Les détails sont laissés en exercice. □

Le théorème de Freudenthal implique que, étant donné un entier $\ell \geq 0$, le groupe $\pi_{n+\ell}(S^n)$ ne dépend pas (à isomorphisme près) du choix d'un entier $n \geq \ell + 2$. Ce groupe s'appelle le *ℓ-ème groupe d'homotopie stable des sphères.*

Théorème 3.17 (Brouwer-Hopf).
Pour tout entier $n \geq 1$, le groupe $\pi_n(S^n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Démonstration. On sait déjà que les groupes $\pi_1(S^1)$ et $\pi_2(S^2)$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}$. De plus, d'après le théorème de Freudenthal, les groupes $\pi_n(S^n)$ et $\pi_{n+1}(S^{n+1})$ sont isomorphes si $n \geq 2$. □

Corollaire 3.18.
La sphère S^n n'est pas contractile pour tout entier $n \geq 0$. □

Corollaire 3.19.
Soit $m > n \geq 0$ des entiers. Alors, $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^m$.

Démonstration. Nous avons déjà démontré cet énoncé pour $n \leq 2$ (voir la Proposition 1.34). On refait la démonstration de la Proposition 1.34 en remplaçant le groupe fondamental par π_{n-1}. Soit $n \geq 2$. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est un homéomorphisme, on obtient un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$, ce qui est impossible car $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a le type d'homotopie de S^{n-1} (donc, le groupe $\pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$) et $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$ a le type d'homotopie de S^{m-1} (donc, le groupe $\pi_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\})$ est trivial). □

Un des corollaires des calculs ci-dessus est le résultat surprénant suivant : le groupe $\pi_3(S^2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. En effet, on a

$$\mathbb{Z} \simeq \pi_3(S^3) \xrightarrow{\sim} \pi_3(S^2).$$

En général, on a des informations variées concernant les groupes d'homotopie des sphères, mais aucune liste complète de ces groupes dans le cas des sphères de dimension $n \geq 2$ n'est connue.

Deuxième partie

Homologie

Chapitre 4

Homologie singulière

1 Définitions

À tout espace topologique X, on va associer deux suites de nouveaux groupes : les groupes d'homologie $H_k(X)$ et les groupes de cohomologie $H^k(X)$ (ici $k \geq 0$ est un entier).

Les groupes d'homotopie précédemment étudiés sont faciles à définir, mais sont souvent difficiles à calculer (c'est, par exemple, le cas de groupes d'homotopie des sphères). Les groupes d'homologie sont plus difficiles à définir, mais ils sont plus faciles à calculer. Une autre différence réside dans le fait que les groupes d'homologie et les groupes de cohomologie sont définis pour les espaces topologiques non pointés.

1.1 Simplexes singuliers

Pour tout entier $k \geq 0$, le *k-simplexe standard* T^k est le k-simplexe déterminé par les $k+1$ points $e_0 = (1, 0, \ldots, 0), e_1 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_k = (0, \ldots, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$.

Soient k et n deux nombres entiers positifs ou nuls. Pour $k+1$ points $a_0, \ldots, a_k$ arbitraires de $\mathbb{R}^n$, notons $\Delta_{(a_0,\ldots,a_k)}$ l'unique application affine de T^k dans l'enveloppe convexe de $a_0, \ldots, a_k$ telle que $\Delta_{(a_0,\ldots,a_k)}(e_i) = a_i$ pour tout entier $0 \leq i \leq k$.

La définition suivante généralise la notion de chemin.

Définition 4.1. Soit X un espace topologique. Un *k-simplexe singulier de X* est une application continue

$$\sigma : T^k \to X.$$

Une *k-chaîne singulière* dans X est une combinaison finie formelle

$$\sum_i n_i \sigma_i$$

de k-simplexes singuliers σ_i avec des coefficients entiers n_i. On note $C_k(X)$ l'ensemble des k-chaînes singulières dans X. Cet ensemble est naturellement muni d'une opération d'addition. On obtient un groupe abélien (c'est le groupe abélien libre engendré par tous les k-simplexes singuliers de X).

DÉFINITION 4.2.
Pour tout entier $k \geq 1$, le *morphisme de bord* ∂_k (noté aussi simplement ∂) est le morphisme

$$\partial_k : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$$

définie de la façon suivante :

$$\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(\sigma \circ \Delta_{(e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k)} \right)$$

pour tout k-simplexe singulier σ de X, où $(e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_k)$ désigne le k-uplet obtenu du $(k+1)$-uplet $(e_0, \ldots, e_k)$ par la suppression du terme e_i.

La somme $\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(\sigma \circ \Delta_{(e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k)} \right)$ est une $(k-1)$-chaîne singulière dans X ; on peut voir l'application $\Delta_{(e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k)}$ comme application

$$\Delta_{(e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k)} : T^{k-1} \to T^k$$

qui a pour image la i-ème face de codimension 1 de T^k.

LEMME 4.1.
Pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0.$$

Démonstration. Soit σ un $(k+1)$-simplexe singulier de X. On a

$$\begin{aligned}
(\partial_k \circ \partial_{k+1})(\sigma) &= \partial_k \left(\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \left(\sigma \circ \Delta_{(e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_{k+1})} \right) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{0 \leq j < i} (-1)^i (-1)^j \left(\sigma \circ \Delta_{(e_0,\ldots,\widehat{e_j},\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_{k+1})} \right) \\
&\quad - \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{i < j \leq k+1} (-1)^i (-1)^j \left(\sigma \circ \Delta_{(e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,\widehat{e_j},\ldots,e_{k+1})} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Exemples.

(1) Les 0-simplexes singuliers de X peuvent être identifiés avec les points de X.

(2) Les 1-simplexes singuliers de X sont les chemins. Pour tout 1-simplexe singulier σ dans X, le bord $\partial\sigma$ est $\sigma(0,1) - \sigma(1,0)$.

(3) Si σ est un 2-simplexe singulier de X, alors

$$\partial\sigma = (\sigma \circ \Delta_{((0,1,0),(0,0,1))}) - (\sigma \circ \Delta_{((1,0,0),(0,0,1))}) + (\sigma \circ \Delta_{((1,0,0),(0,1,0))}).$$

Le résultat du Lemme 4.1 peut être formulé de la façon suivante.

PROPOSITION 4.2.
La suite

$$\ldots \longrightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X)$$

vérifie la propriété $\operatorname{Im}\partial_{k+1} \subset \operatorname{Ker}\partial_k$ pour tout entier $k \geq 1$. □

DÉFINITION 4.3.
Pour tout entier $k \geq 1$, on pose

$$H_k(X) = \operatorname{Ker}\partial_k / \operatorname{Im}\partial_{k+1}.$$

De plus, on pose $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$. Les groupes obtenus $H_k(X)$ s'appellent les *groupes d'homologie* (*singulière*) de X. Ces groupes sont aussi notés $H_k(X;\mathbb{Z})$ pour souligner que les coefficients des chaînes singulières considérées sont entiers. Par convention, pour $k < 0$, on pose $H_k(X) = 0$.

Pour tout entier $k \geq 1$, les éléments de $Z_k(X) = \operatorname{Ker}\partial_k$ sont les *k-cycles singuliers de X*. Les éléments de $C_0(X)$ sont appelés aussi les *0-cycles singuliers de X*. Pour tout entier $k \geq 0$, les éléments de $B_k(X) = \operatorname{Im}\partial_{k+1}$ sont les *k-bords singuliers de X*. On dit que deux k-cycles singuliers de X sont *homologues* si leur différence est un k-bord singulier.

DÉFINITION 4.4.
Si $H_k(X)$ est de type fini, alors

$$H_k(X) \simeq \mathbb{Z}^r \oplus H,$$

où H est un groupe fini. Le nombre r s'appelle le k-ème nombre de BETTI de X et est noté $b_k(X)$.

1.2 Complexes de chaînes

DÉFINITION 4.5.
Un *complexe de chaînes* (de groupes abéliens) est une suite

$$\ldots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

où C_k est un groupe abélien pour tout entier $k \geq 0$ et ∂_k est un morphisme pour tout entier $k \geq 1$, tel que $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ pour tout entier $k \geq 1$.

DÉFINITION 4.6.
Soit $\mathcal{C}$ un complexe de chaînes

$$\ldots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

Si k est un entier strictement positif, alors le k-ème *groupe d'homologie* de $\mathcal{C}$ est

$$H_k(\mathcal{C}) = \operatorname{Ker}\partial_k / \operatorname{Im}\partial_{k+1};$$

de plus, on pose $H_0(\mathcal{C}) = C_0/\operatorname{Im}\partial_1$.

DÉFINITION 4.7.
Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux complexes de chaînes. Un morphisme $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de complexes de chaînes est une collection $\{\varphi_k\}_{k\geq 0}$ de morphismes $\varphi_k : C_k \to C'_k$ tels que le diagramme

suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{lccccccc} \mathcal{C}: & \ldots \longrightarrow & C_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} \ldots \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{k+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_k} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{k-1}} & \\ \mathcal{C}': & \ldots \longrightarrow & C'_{k+1} & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & C'_k & \xrightarrow{\partial'_k} & C'_{k-1} & \xrightarrow{\partial'_{k-1}} \ldots \end{array}$$

Tout morphisme $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de complexes de chaînes induit des morphismes des groupes d'homologie

$$H_k(\mathcal{C}) \to H_k(\mathcal{C}')$$

pour tout entier $k \geq 0$. En effet,

$$\varphi_k(\operatorname{Ker} \partial_k) \subset \operatorname{Ker} \partial'_k \text{ et } \varphi_k(\operatorname{Im} \partial_{k+1}) \subset \operatorname{Im} \partial'_{k+1}.$$

On obtient ainsi une application entre les quotients $H_k(\mathcal{C})$ et $H_k(\mathcal{C}')$, et cette application est un morphisme de groupes.

1.3 Applications continues

Si $f : X \to Y$ est une application continue entre deux espaces topologiques X et Y et si $\sigma : T^k \to X$ est un k-simplexe singulier de X, alors $f \circ \sigma : T^k \to Y$ est un k-simplexe singulier de Y. Donc, pour tout entier $k \geq 0$, on obtient un morphisme $\varphi_k : C_k(X) \to C_k(Y)$. Il est immédiat que la collection $\{\varphi_k\}_{k\geq 0}$ obtenue de morphismes est un morphisme de complexes de chaînes. Ce morphisme est noté $f_\sharp$.

Pour tout entier $k \geq 0$, le morphisme $f_\sharp$ de complexes de chaînes induit un morphisme

$$f_{*k} : H_k(X) \to H_k(Y)$$

(souvent noté simplement f_*).

L'énoncé suivant est immédiat.

LEMME 4.3.
Soient X, Y et Z des espaces topologiques. Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux applications continues, alors, pour tout entier $k \geq 0$, on a $(g \circ f)_{*k} = g_{*k} \circ f_{*k}$. De plus, pour tout entier $k \geq 0$, l'application $\mathrm{id}_{*k} : H_k(X) \to H_k(X)$, où $\mathrm{id} : X \to X$ est l'identité de X, est l'identité de $H_k(X)$. □

Par conséquent, les groupes d'homologie sont des invariants topologiques : si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme entre deux espaces topologiques X et Y, alors

$$f_{*k} : H_k(X) \to H_k(Y)$$

est un isomorphisme pour tout entier $k \geq 0$.

1.4 Premiers calculs

Groupes d'homologie d'un point. Si $X = \{x\}$ est un espace topologique formé d'un seul point, alors il y a un unique k-simplexe σ_k de X pour tout entier $k \geq 0$. Donc, dans le complexe de chaînes

$$\ldots \longrightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \ldots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X)$$

tous les groupes sont isomorphes à $\mathbb{Z}$. Si $k \geq 1$ est un entier, le morphisme de bord ∂_k est donné par

$$\partial_k \sigma_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \underbrace{\sigma_k \circ \Delta_{(e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k)}}_{\sigma_{k-1}} = \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \right) \sigma_{k-1}.$$

Donc, cette somme est nulle si k est impair et est égale à σ_{k-1} si k est pair. Par conséquent, on obtient le complexe suivant :

$$\ldots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

Ainsi, si X est un singleton, alors le groupe $H_0(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et $H_k(X) = 0$ pour tout entier $k \geq 1$.

Groupe $H_0(X)$ lorsque X est connexe par arcs. Soit X un espace topologique connexe par arcs. Montrons que le groupe $H_0(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. En effet, $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$, et les 0-chaînes singulières dans X sont des combinaisons finies formelles $\sum_i n_i\sigma_i$, où les 0-simplexes singuliers σ_i peuvent être identifiés avec des points de X.

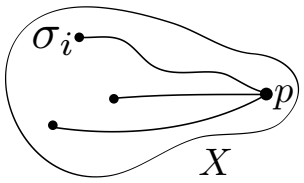


FIGURE 4.1 – Calcul de $H_0(X)$ lorsque X est connexe par arcs

Choissisons un point $p \in X$. Comme le bord de tout 1-simplexe singulier σ de X est de la forme $\sigma(0,1) - \sigma(1,0)$, la somme des coefficients de tout élément de $\operatorname{Im}\partial_1$ est égale à 0. De plus, tout élément $\sum_i n_i\sigma_i$ de $C_0(X)$ est homologue à $(\sum_i n_i)p$. Par conséquent, $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

1.5 Groupes d'homologie réduits

Il est parfois commode de considérer des complexes de chaînes ayant quelques groupes non triviaux C_k avec $k < 0$. En particulier, on peut introduire la notion d'un complexe de chaînes augmenté.

DÉFINITION 4.8.

Soit X un espace topologique. Le complexe de chaînes singulières *augmenté* est le complexe de chaînes

$$\ldots \longrightarrow C_k(X) \longrightarrow C_{k-1}(X) \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_1(X) \longrightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

où

$$\ldots \longrightarrow C_k(X) \longrightarrow C_{k-1}(X) \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_1(X) \longrightarrow C_0(X)$$

est le complexe de chaînes singulières de X et le morphisme *d'augmentation* $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ est défini par $n_i\sigma_i \mapsto \sum_i n_i$ (on peut considérer le groupe $C_{-1}(X) = \mathbb{Z}$ comme groupe abélien libre engendré par l'unique (-1)-simplexe singulier $\varnothing$).

Les groupes d'homologie de ce complexe s'appellent les *groupes d'homologie singulière réduits* de X, notés $\tilde{H}_k(X)$. Si $k \geq 1$, alors $\tilde{H}_k(X)$ coïncide avec $H_k(X)$.

Si X est un espace topologique connexe par arcs, alors $\tilde{H}_0(X) = 0$. Si X est un singleton, alors tous les groupes d'homologie singulière réduits de X sont triviaux.

1.6 Homotopie de complexes de chaînes

DÉFINITION 4.9.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux complexes de chaînes, et soient Φ et Ψ deux morphismes entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$:

$$\begin{array}{lccccccc} C: & \ldots \longrightarrow & C_{k+1} & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & C_{k-1} & \longrightarrow \ldots \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{k+1}}\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{k+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_k}\ \downarrow{\scriptstyle \psi_k} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{k-1}}\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{k-1}} & \\ C': & \ldots \longrightarrow & C'_{k+1} & \longrightarrow & C'_k & \longrightarrow & C'_{k-1} & \longrightarrow \ldots \end{array}$$

Une *homotopie de complexes de chaînes* entre Φ et Ψ est une collection de morphismes

$$D_k : C_k \to C'_{k+1},$$

où k parcourt les entiers positifs ou nuls, tels que

$$D_{k-1} \circ \partial_k + \partial'_{k+1} \circ D_k = \varphi_k - \psi_k$$

pour tout entier $k \geq 0$ (on pose $D_{-1} = 0$).

$$\begin{array}{lccccccc} C: & \ldots \longrightarrow & C_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} & \longrightarrow \ldots \\ & & \downarrow\ \swarrow{\scriptstyle D_k}\ \downarrow & & \downarrow\ \swarrow{\scriptstyle D_{k-1}}\ \downarrow & & \downarrow\ \swarrow\ \downarrow & \\ C': & \ldots \longrightarrow & C'_{k+1} & \xrightarrow[\partial'_{k+1}]{} & C'_k & \xrightarrow[\partial'_k]{} & C'_{k-1} & \longrightarrow \ldots \end{array}$$

S'il existe une homotopie entre deux morphismes Φ et Ψ de complexes de chaînes, on dit que Φ et Ψ sont homotopes.

LEMME 4.4.

Soient Φ et Ψ deux morphismes homotopes entre deux complexes de chaînes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Alors, Φ et Ψ induisent les mêmes morphismes des groupes d'homologie.

Démonstration. Considérons une homotopie $\{D_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, entre Φ et Ψ. Soit $k \geq 0$ un entier, et soit $\alpha \in C_k$ un cycle. On a

$$(D_{k-1} \circ \partial_k)(\alpha) = 0.$$

Donc,

$$\varphi_k(\alpha) - \psi_k(\alpha) = (\partial'_{k+1} \circ D_k)(\alpha)$$

est bien un bord. □

PROPOSITION 4.5.

Soient X et Y deux espaces topologiques, et soient $g, h : X \to Y$ deux applications homotopes. Alors, les applications $g_\sharp$ et $h_\sharp$ entre les complexes de chaînes $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}(Y)$ sont homotopes.

En particulier, les applications induites $g_{*k} : H_k(X) \to H_k(Y)$ et $h_{*k} : H_k(X) \to H_k(Y)$ coïncident pour tout entier $k \geq 0$.

Démonstration. Soit

$$H : X \times I \to Y$$

une homotopie entre g et h, et soit $k \geq 0$ un entier. Pour tout k-simplexe singulier $\sigma : T^k \to X$, on considère l'application

$$H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) : T^k \times I \to Y.$$

Pour définir une triangulation de $T^k \times I$, on note $a_0, \ldots, a_k$ les sommets

$$e_0 \times \{0\}, \ldots, e_k \times \{0\}$$

de $T^k \times \{0\}$. De même, on note $b_0, \ldots, b_k$ les sommets

$$e_0 \times \{1\}, \ldots, e_k \times \{1\}$$

de $T^k \times \{1\}$. La triangulation contient $k+1$ simplexes T'_i de dimension $k+1$, où i parcourt les entiers entre 0 et k. Tout simplexe T'_i est l'enveloppe convexe de b_0, …, b_i, a_i, …, a_k. Autrement dit, pour tout entier i compris entre 0 et k, on a

$$T'_i = \{(t_0, \ldots, t_k, \tau) \in T^k \times I \mid t_0 + \ldots + t_{i-1} \leq \tau \leq t_0 + \ldots + t_i\}.$$

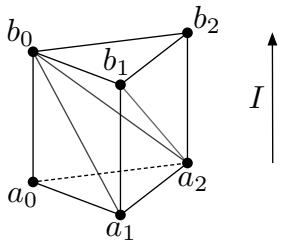


FIGURE 4.2 – Triangulation de $T^k \times I$

On obtient $k+1$ simplexes singuliers

$$\sigma'_i = H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \Delta_{(b_0,\ldots,b_i,a_i,\ldots,a_k)}$$

de Y, où $i = 0$, …, k. On pose maintenant

$$D_k(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma'_i.$$

On obtient de cette façon une collection d'applications $\{D_k\}$ (comme d'habitude, $D_{-1} = 0$) qui est une homotopie entre $g_\sharp$ et $h_\sharp$. En effet, pour tout k-simplexe singulier σ de X, on a

$$\begin{aligned}
\partial'_{k+1} \circ D_k(\sigma) &= \partial'_{k+1} \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma'_i \right) \\
&= \partial'_{k+1} \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \Delta_{(b_0,\ldots,b_i,a_i,\ldots,a_k)} \right) \\
&= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \Delta_{(b_0,\ldots,\widehat{b_j},\ldots,b_i,a_i,\ldots,a_k)} \\
&\quad - \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \Delta_{(b_0,\ldots,b_i,a_i,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_k)}, \\
D_{k-1} \circ \partial_k(\sigma) &= D_{k-1} \left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sigma \circ \Delta_{(e_0,\ldots,\widehat{e_j},\ldots,e_k)} \right) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \Delta_{(b_0,\ldots,b_i,a_i,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_k)} \\
&\quad - \sum_{i>j} (-1)^{i+j} H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \Delta_{(b_0,\ldots,\widehat{b_j},\ldots,b_i,a_i,\ldots,a_k)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}(D_{k-1}\circ\partial_k+\partial'_{k+1}\circ D_k)(\sigma) &= \sum_{i=0}^{k} H\circ(\sigma\times\mathrm{id})\circ\Delta_{(b_0,\dots,b_{i-1},a_i,\dots,a_k)}\\ &\quad-\sum_{i=0}^{k} H\circ(\sigma\times\mathrm{id})\circ\Delta_{(b_0,\dots,b_i,a_{i+1},\dots,a_k)}\\ &= g_\sharp(\sigma)-h_\sharp(\sigma).\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 4.6. Soient X et Y deux espaces topologiques qui ont le même type d'homotopie. Alors, les groupes $H_k(X)$ et $H_k(Y)$ sont isomorphes pour tout entier $k\geq 0$.

On connaît donc les groupes d'homologie des espaces topologiques contractiles.

2 Groupes d'homologie relatifs

2.1 Groupes d'homologie associés à une paire topologique

Soit (X,A) une paire topologique telle que X soit non vide. On a deux complexes de chaînes $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(X)$, ainsi que le morphisme $i_\sharp$ entre $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(X)$ induit par l'inclusion $i:A\hookrightarrow X$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \longrightarrow & C_{k+1}(A) & \longrightarrow & C_k(A) & \longrightarrow & C_{k-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \longrightarrow & C_k(X) & \longrightarrow & C_{k-1}(X) & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Ce morphisme permet de voir $C_k(A)$ comme sous-groupe de $C_k(X)$ pour tout entier $k\geq 0$. On considère ainsi le quotient

$$C_k(X,A)=C_k(X)/C_k(A).$$

C'est un groupe abélien libre engendré par tous les k-simplexes de X dont l'image n'est pas entièrement contenue dans A.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \longrightarrow & C_{k+1}(A) & \longrightarrow & C_k(A) & \longrightarrow & C_{k-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \longrightarrow & C_k(X) & \longrightarrow & C_{k-1}(X) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & & C_{k+1}(X,A) & & C_k(X,A) & & C_{k-1}(X,A) & & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots
\end{array}$$

Les groupes $C_k(X, A)$ forment, en fait, un complexe de chaînes. Les morphismes de bord $\partial_k^{(X,A)}$ de ce complexe sont définis de la façon suivante.

$$\begin{array}{ccc} C_k(A) & \xrightarrow{\partial_k^A} & C_{k-1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_k(X) & \xrightarrow{\partial_k^X} & C_{k-1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_k(X,A) & \dashrightarrow & C_{k-1}(X,A) \end{array}$$

Soit $k \geq 1$ un entier, et soit $a \in C_k(X, A)$. Choisissons un représentant b de a dans $C_k(X)$, et posons $\partial_k^{(X,A)}(a)$ égal à la classe de $\partial_k^X(b)$ dans le quotient $C_{k-1}(X, A)$.

$$\begin{array}{ccc} b & \longmapsto & \partial_k^X(b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & \dashmapsto & \partial_k^{(X,A)}(a) \end{array}$$

Si b' est un autre représentant de a dans $C_k(X)$, alors la différence $b - b'$ est dans $C_k(A)$. Donc, $\partial_k^X(b - b') \in C_{k-1}(A)$, et la classe de $\partial_k^X(b - b')$ dans le quotient $C_{k-1}(X, A)$ est nulle. Par conséquent, le morphisme $\partial_k^{(X,A)}$ est correctement défini.

$$\begin{array}{ccc} b - b' & \longmapsto & \partial_k^A(b - b') \\ \downarrow & & \downarrow \\ b - b' & \longmapsto & \partial_k^X(b - b') \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

De plus, $\partial_k^{(X,A)} \circ \partial_{k+1}^{(X,A)} = 0$ pour tout entier $k \geq 1$ puisque $\mathcal{C}(X)$ est un complexe de chaînes.

On obtient un complexe de chaînes $\mathcal{C}(X, A)$ et un morphisme $j_\sharp$ entre les complexes de chaînes $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}(X, A)$. On a le diagramme commutatif suivant, où les trois lignes horizontales sont des complexes de chaînes et les colonnes sont des suites exactes courtes (les diagrammes avec ces propriétés s'appellent *suites exactes courtes de complexes de chaînes*) :

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(A) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^A} & C_k(A) & \xrightarrow{\partial_k^A} & C_{k-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^X} & C_k(X) & \xrightarrow{\partial_k^X} & C_{k-1}(X) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X,A) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^{(X,A)}} & C_k(X,A) & \xrightarrow{\partial_k^{(X,A)}} & C_{k-1}(X,A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots \end{array}$$

Définition 4.10.
Pour tout entier $k \geq 0$, on pose

$$H_k(X, A) = \operatorname{Ker} \partial_k^{(X,A)} / \operatorname{Im} \partial_{k+1}^{(X,A)}.$$

Les groupes obtenus s'appellent les *groupes d'homologie singulière relatifs* associés à la paire topologique (X, A).

Si $A = \varnothing$, alors les groupes $H_k(X, A)$ coïncident avec $H_k(X)$ pour tout entier $k \geq 0$.

Exercice. Calculer le groupe $H_0(X, A)$ lorsque X est connexe par arcs et A est non vide, puis dans le cas général.

2.2 Suite exacte homologique associée à une paire topologique (X, A)

Considérons une paire topologique (X, A) telle que A soit non vide. Le morphisme $i_\sharp$ entre les complexes de chaînes $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(X)$ induit des morphismes $i_* : H_k(A) \to H_k(X)$, $k \geq 0$. Le morphisme $j_\sharp$ entre les complexes de chaînes $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}(X, A)$ induit des morphismes $j_* : H_k(X) \to H_k(X, A)$, $k \geq 0$.

Pour tout entier $k \geq 1$, nous allons définir un morphisme $d : H_k(X, A) \to H_{k-1}(A)$ de la façon suivante.

Soit α un élément de $H_k(X, A)$. Choisissons un représentant $a \in C_k(X, A)$ de α. Par définition, l'image de a par $\partial_k^{(X,A)}$ est nulle. Soit b un représentant de a dans $C_k(X)$. Alors, $\partial_k^X(b)$ a un antécédent dans $C_{k-1}(A)$ puisque la classe de $\partial_k^X(b)$ dans $C_{k-1}(X, A)$ est nulle. On désigne par c cet antécédent dans $C_{k-1}(A)$. Remarquons que c est un cycle. On pose $d(\alpha)$ égal à la classe de c dans $H_{k-1}(A)$.

Il nous faut vérifier que l'élément obtenu de $H_{k-1}(A)$ ne dépend pas des deux choix effectués de représentants. Soit b' un autre représentant de a dans $C_k(X)$. Alors, $b - b'$ appartient à $C_k(A)$, et ainsi son image par ∂_k^A est un bord dans $C_{k-1}(A)$. Considérons maintenant un autre représentant a' de α dans $C_k(X, A)$. La différence $a' - a$ s'écrit sous la forme $\partial_{k+1}^{(X,A)}(e)$ pour un certain élément $e \in C_{k+1}(X, A)$. L'image par ∂_{k+1}^X d'un représentant de e dans $C_{k+1}(X)$ est un représentant de $a - a'$ dans $C_k(X)$ et a une image nulle dans $C_{k-1}(X)$.

La démonstration de l'énoncé suivant est un exercice très utile.

Théorème 4.7.
La suite

$$\ldots \longrightarrow H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j_*} H_k(X, A) \xrightarrow{d} H_{k-1}(A) \longrightarrow \ldots$$

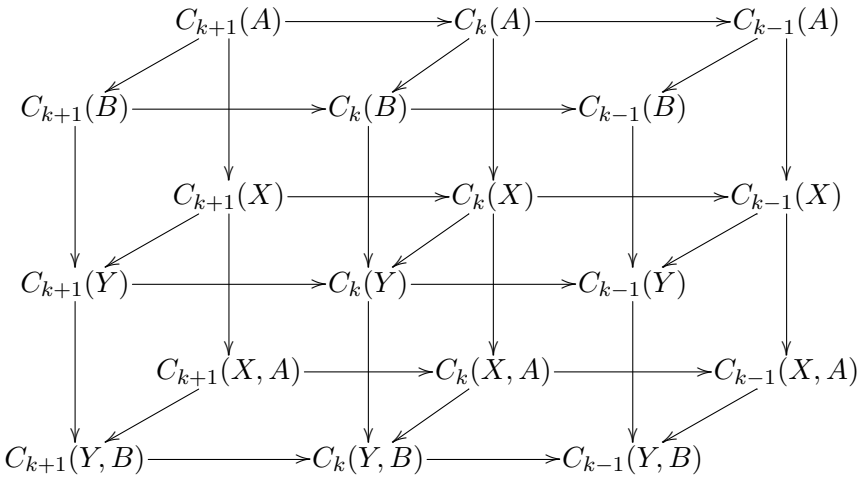
est exacte.

Remarque. L'énoncé de ce théorème peut être généralisé : toute suite exacte courte de complexes de chaînes fournit une suite exacte longue de leurs groupes d'homologie. La construction de cette suite exacte longue est complètement similaire à la construction ci-dessus.

Soit $f : (X, A) \to (Y, B)$ une application continue entre deux paires topologiques (X, A) et (Y, B). En utilisant le diagramme commutatif ci-dessous, on définit les morphismes

$$f_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$$

pour tout entier $k \geq 0$:



De plus, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots H_k(A) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X,A) & \longrightarrow & H_{k-1}(A) & \longrightarrow & H_{k-1}(X)\dots \\
\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\
\dots H_k(B) & \longrightarrow & H_k(Y) & \longrightarrow & H_k(Y,B) & \longrightarrow & H_{k-1}(B) & \longrightarrow & H_{k-1}(Y)\dots
\end{array}$$

Corollaire 4.8.

Soit $g : (X, A) \to (Y, B)$ une application continue telle que $g : X \to Y$ et $g_{|A} : A \to B$ soient des équivalences d'homotopie. Alors, $g_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$ est un isomorphisme pour tout entier $k \geq 0$.

Démonstration. Soit $k \geq 1$ un entier (le cas $k = 0$ est un exercice facile). On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_k(A) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X,A) & \longrightarrow & H_{k-1}(A) & \longrightarrow & H_{k-1}(X) \\
\downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\
H_k(B) & \longrightarrow & H_k(Y) & \longrightarrow & H_k(Y,B) & \longrightarrow & H_{k-1}(B) & \longrightarrow & H_{k-1}(Y)
\end{array}$$

Les quatre morphismes indiqués par les flèches verticales différentes de la flèche au milieu sont des isomorphismes. Donc, d'après le lemme des cinq, $g_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$ est aussi un isomorphisme. □

Exercice. Soient (X, A) et (Y, B) des paires topologiques, et soient $g : (X, A) \to (Y, B)$ et $h : (X, A) \to (Y, B)$ des applications continues homotopes. Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, les morphismes $g_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$ et $h_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$ induits par g et h, respectivement, coïncident.

Exercice. Montrer que l'inclusion $(X, \varnothing) \hookrightarrow (X, A)$ induit les morphismes $j_* : H_k(X) \to H_k(X, A)$ définis ci-dessus (pour tout entier $k \geq 0$).

Exercice. Soit X un espace topologique non vide, et soit $x_0 \in X$ un point. Montrer que le groupe $H_k(X, x_0)$ est isomorphe à $\tilde{H}_k(X)$ pour tout entier $k \geq 0$.

Exercice. Soit (X, A, B) un triplet topologique $(B \subset A \subset X)$. On peut construire une suite homologique associée au triplet (X, A, B) de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \longrightarrow & H_k(A,B) & \xrightarrow{i_*} & H_k(X,B) & \xrightarrow{j_*} & H_k(X,A) & \longrightarrow & H_{k-1}(A,B) \longrightarrow \ldots \\ & & & & & & \searrow^{d} & & \uparrow \\ & & & & & & & & H_{k-1}(A) \end{array}$$

où $i : (A, B) \hookrightarrow (X, B)$ et $j : (X, B) \hookrightarrow (X, A)$ sont des inclusions, et le morphisme indiqué par la flèche verticale est induit par l'inclusion $(A, \varnothing) \hookrightarrow (A, B)$. Montrer que la suite obtenue est exacte.

Exercice. Déduire de la suite exacte homologique associée à un triplet approprié la suite exacte de groupes d'homologie singulière réduits associée à une paire topologique (X, A) :

$$\ldots \longrightarrow \tilde{H}_k(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_k(X) \xrightarrow{j_*} H_k(X, A) \xrightarrow{d} \tilde{H}_{k-1}(A) \longrightarrow \ldots$$

3 Théorème d'excision

On considère un triplet topologique (X, A, V) vérifiant la condition $\overline{V} \subset \mathring{A}$. Le but principal de cette section est de démontrer l'énoncé suivant.

Théorème 4.9 (Excision).
Pour tout entier $k \geq 0$, l'inclusion

$$i : (X \setminus V, A \setminus V) \hookrightarrow (X, A)$$

induit un isomorphisme

$$i_* : H_k(X \setminus V, A \setminus V) \to H_k(X, A) \ .$$

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ une collection de sous-ensembles de X telle que les intérieurs $\mathring{U}_i$ de ces sous-ensembles forment un recouvrement ouvert de X. Pour tout entier $k \geq 0$, considérons le sous-groupe

$$C_k^{\mathcal{U}}(X) \subset C_k(X)$$

formé par les k-chaînes singulières

$$\sum_j n_j \sigma_j$$

telles que, pour tout k-simplexe singulier σ_j, l'image $\sigma_j(T^k)$ de σ_j soit contenue dans un certain sous-ensemble U_i.

On a alors un morphisme ι entre les complexes de chaînes $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}$ et $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \longrightarrow & C_{k+1}^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & C_k^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & C_0^{\mathcal{U}}(X) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \ldots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \longrightarrow & C_k(X) & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & C_0(X) \end{array}$$

Proposition 4.10.
Le morphisme ι est une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes (c'est-à-dire, il existe un morphisme ρ entre les complexes de chaînes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}$ tel que $\rho \circ \iota$ soit homotope à l'identité de $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}$ et $\iota \circ \rho$ soit homotope à l'identité de $\mathcal{C}$). En particulier, ι induit des isomorphismes des groupes d'homologie des deux complexes.

3.1 Démonstration de la Proposition 4.10

3.1.1 Subdivision barycentrique d'une chaîne affine

Soit $n \geq 1$ un entier, et soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ une partie convexe. On introduit les k-chaînes affines dans Ω en considérant les k-simplexes affines de Ω qui sont les applications affines $\sigma : T^k \to \Omega$. Une *k-chaîne affine* dans Ω est alors une combinaison finie formelle $\sum n_j \sigma_j$ de k-simplexes affines de Ω.

On obtient un complexe $A\mathcal{C}(\Omega)$ de chaînes affines augmenté de Ω :

$$\ldots \xrightarrow{\partial} AC_{k+1}(\Omega) \xrightarrow{\partial} AC_k(\Omega) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} AC_0(\Omega) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \simeq AC_{-1}(\Omega)$$

Le complexe $A\mathcal{C}(\Omega)$ est un sous-complexe du complexe $\mathcal{C}(\Omega)$ de chaînes singulières augmenté de Ω.

Si v_0, …, v_k sont des points de Ω, on note $[v_0, \ldots, v_k]$ le simplexe affine $\Delta_{(v_0,\ldots,v_k)}$. Pour tout point $p \in \Omega$ et pour tout entier $k \geq -1$, on a le morphisme

$$p\colon \left| \begin{array}{c} AC_k(\Omega) \to AC_{k+1}(\Omega) \\ [v_0, \ldots, v_k] \mapsto [p, v_0, \ldots, v_k]. \end{array} \right.$$

Si $\sigma = [v_0, \ldots, v_k]$, on a

$$\partial[p, v_0, \ldots, v_k] = \underbrace{[v_0, \ldots, v_k]}_{\sigma} - p\partial\sigma,$$

autrement dit,

$$\partial p + p\partial = \mathrm{id}\,.$$

Dans ce cadre, la *subdivision barycentrique* est le morphisme de complexes de chaînes, $S : A\mathcal{C}(\Omega) \to A\mathcal{C}(\Omega)$, défini par récurrence de la manière suivante : $s_{-1}(\varnothing) = \varnothing$, et, pour tout entier $k \geq 0$ et pour tout k-simplexe affine σ de Ω, on a

$$s_k(\sigma) = p_\sigma(s_{k-1}(\partial\sigma)),$$

où p_σ est l'image par σ du barycentre de T^k. Remarquons que $s_0(\sigma_0) = \sigma_0$ pour tout 0-simplexe affine σ_0 de Ω.

La collection $S = \{s_k\}_{k\geq -1}$ est bien un morphisme de complexes de chaînes. On vérifie cette affirmation facilement par récurrence. L'identité $s_{k-1}\partial = \partial s_k$ est immédiate si $k = 0$. Si $k \geq 1$ est un entier, alors pour tout k-simplexe affine σ de Ω, on a

$$\partial s_k(\sigma) = \partial p_\sigma(s_{k-1}\partial\sigma) = s_{k-1}\partial\sigma - p_\sigma\partial(s_{k-1}\partial\sigma).$$

Par récurrence, puisque $\partial\sigma$ est une $(k-1)$-chaîne affine, on a

$$\partial s_k(\sigma) = s_{k-1}\partial\sigma - p_\sigma s_{k-2}(\partial\partial\sigma) = s_{k-1}\partial\sigma.$$

Proposition 4.11. Le morphisme S est homotope à l'identité.

Démonstration. Considérons la famille D de morphismes $\{D_k\}_{k\geq -1}$, où

$$D_k : AC_k(\Omega) \to AC_{k+1}(\Omega),$$

est defini par récurrence de la façon suivante : $D_{-1} = 0$ et, pour tout entier $k \geq 0$ et pour tout k-simplexe affine σ de Ω, on a

$$D_k\sigma = p_\sigma(\sigma - D_{k-1}\partial\sigma).$$

On va montrer que $\partial D + D\partial = \mathrm{id} - S$. Cette identité est vraie pour $k = -1$. Pour tout entier $k \geq 0$, par récurrence, on a

$$\begin{aligned}\partial D_k(\sigma) &= \partial(p_\sigma(\sigma - D_{k-1}\partial\sigma)) \\ &= \sigma - D_{k-1}\partial\sigma - p_\sigma\partial(\sigma - D_{k-1}\partial\sigma) \\ &= \sigma - D_{k-1}\partial\sigma - p_\sigma(\partial\sigma - \partial D_{k-1}\partial\sigma) \\ &= \sigma - D_{k-1}\partial\sigma - p_\sigma(s_{k-1}\partial\sigma + D_{k-2}\partial\partial\sigma) \\ &= \sigma - D_{k-1}\partial\sigma - s_k(\sigma).\end{aligned}$$

□

Maintenant, on peut oublier $AC_{-1}(\Omega)$, ce qui ne posera pas de problème car $D_{-1} = 0$.

3.1.2 Subdivision barycentrique d'une chaîne singulière

Soit $k \geq 0$ un entier, et soit σ un k-simplexe singulier de X. L'application σ induit un morphisme $\sigma_\sharp$ entre les complexes de chaînes $A\mathcal{C}(T^k)$ et $\mathcal{C}(X)$. On peut, donc, définir la subdivision barycentrique de σ : c'est la k-chaîne singulière $\sigma_\sharp s_k(\mathrm{id} : T^k \to T^k)$. Cela produit un morphisme de complexes de chaînes $S : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$, la subdivision barycnetrique dans le cadre des chaînes singulières On utilise aussi les notations s_k pour les morphismes qui forment S.

Pour tout entier $k \geq 0$ et pour tout k-simplexe singulier σ de X, on peut aussi associer à σ la $(k+1)$-chaîne singulière $\sigma_\sharp D_k(\mathrm{id} : T^k \to T^k)$. Cela produit une collection de morphismes $C_k(X) \to C_{k+1}(X)$, $k \geq 0$. On note D cette collection, et on note D_k ses morphismes.

Exercice. Montrer que D est une homotopie entre S et id.

On peut itérer les subdivisions barycentriques, ce qui donne les compositions S^m pour tous les entiers $m \geq 1$. On pose S^0 égal à l'identité. Pour tout entier $m \geq 0$, une homotopie entre id et S^m est donnée par

$$D^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} DS^i.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\partial D^{(m)} + D^{(m)}\partial &= \sum_{i=0}^{m-1} \left(\partial DS^i + DS^i\partial\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \left(\partial DS^i + D\partial S^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \left(\partial D + D\partial\right) S^i \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (\mathrm{id} - S)S^i = \mathrm{id} - S^m.\end{aligned}$$

3.1.3 Utilisation de subdivisions barycentriques

Maintenant, nous sommes prêts pour la démonstration de la Proposition 4.10.

Démonstration (Proposition 4.10)**.** On a $X = \bigcup \mathring{U}_i$. D'après le premier exercice de la section 2.2 de la première partie, pour tout entier $k \geq 0$ et pour tout k-simplexe singulier

σ de X, on peut trouver un entier $m \geq 0$ tel que $S^m(\sigma) \subset C_k^{\mathcal{U}}(X)$. On associe à σ le plus petit des nombres m vérifiant la propriété ci-dessus, et on note m_σ ce nombre. Pour tout entier $k \geq 0$, on considère le morphisme

$$\mathbb{D}: \left| \begin{array}{l} C_k(X) \to C_{k+1}(X) \\ \qquad \sigma \mapsto D^{(m_\sigma)}(\sigma). \end{array} \right.$$

Pour tout k-simplexe singulier σ de X, on a

$$\partial D^{(m_\sigma)}(\sigma) + D^{(m_\sigma)}\partial(\sigma) = \sigma - S^{m_\sigma}(\sigma),$$

d'où

$$\partial\mathbb{D}(\sigma) + \mathbb{D}\partial(\sigma) = \sigma - \underbrace{\left(S^{m_\sigma}(\sigma) + D^{(m_\sigma)}\partial(\sigma) - \mathbb{D}\partial(\sigma)\right)}_{\rho_k(\sigma)}.$$

On vérifie facilement que $\rho_k(\sigma)$ ainsi défini vérifie $\rho_k(\sigma) \in C^{\mathcal{U}}(X)$.

On obtient un morphisme de complexes de chaînes $\rho : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X)$. Par construction, la composition $\iota \circ \rho$ est homotope à l'identité de $\mathcal{C}(X)$. De plus, $\rho \circ \iota$ est l'identité de $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X)$, car $m_\sigma = 0$ pour tout k-simplexe $\sigma \in C_k^{\mathcal{U}}(X)$. □

3.2 Démonstration du théorème d'excision

On pose $B = X \setminus V$, et on obtient un recouvrement $\mathcal{U} = \{A, B\}$ de X. Ce recouvrement vérifie les hypothèses de la Proposition 4.10. Dans les notations introduites ci-dessus, on a $\partial\mathbb{D} + \mathbb{D}\partial = \mathrm{id} - \iota \circ \rho$ et $\rho \circ \iota = \mathrm{id}$. Tous ces morphismes envoient les chaînes singulières de A sur des chaînes singulières de A. Donc, quand on passe au quotient par les chaînes singulières de A, on obtient des morphismes qui vérifient la même relation.

En particulier, les inclusions

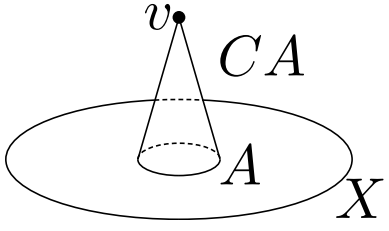
$$C_k^{\mathcal{U}}(X)/C_k(A) \hookrightarrow C_k(X)/C_k(A)$$

induisent des isomorphismes des groupes d'homologie (pour tous les entiers $k \geq 0$). Il reste à remarquer que l'on a l'isomorphisme canonique $C_k(B)/C_k(B \cap A) \to C_k^{\mathcal{U}}(X)/C_k(A)$ pour tout entier $k \geq 0$. □

3.3 Corollaires du théorème d'excision

Pour tout espace topologique A, on peut considérer le *cône* CA de A : c'est l'espace quotient de $A \times I$ par la relation d'équivalence qui identifie tous les points $(a, 1) \in A \times I$, $a \in A$. L'image dans CA des points $(a, 1) \in A \times I$, $a \in A$, par la projection canonique s'appelle le *sommet* du cône CA.

Si (X, A) est une paire topologique, on note $X \cup CA$ l'espace quotient de la réunion disjointe de X et CA par la relation d'équivalence qui, pour tout point $a \in A$, identifie les points $a \in X$ et $(a, 0) \in CA$.



PROPOSITION 4.12.
Soit (X, A) une paire topologique. Alors, pour tout entier $k \geq 0$, l'inclusion $(X, A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$ induit un isomorphisme

$$H_k(X, A) \to H_k(X \cup CA, CA).$$

De plus, pour tout entier $k \geq 0$, on a

$$H_k(X \cup CA, CA) \simeq H_k(X \cup CA, v) \simeq \tilde{H}_k(X \cup CA),$$

où v est le sommet du cône CA.

Démonstration. Soit $k \geq 0$ un entier. Le fait que l'inclusion $(X, A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$ induit un isomorphisme

$$H_k(X, A) \to H_k(X \cup CA, CA)$$

est un corollaire du théorème d'excision (appliqué au triplet $(X \cup CA, CA, \{v\})$) et de l'invariance homotopique des groupes d'homologie.

Le deuxième isomorphisme est, à nouveau, un corollaire de l'invariance homotopique des groupes d'homologie. Finalement, le dernier isomorphisme est un corollaire du troisième exercice de la section 2.2. □

Si (X, A) est une paire topologique, on note par X/A l'espace quotient de X par la relation d'équivalence qui identifie tous les points de A.

PROPOSITION 4.13.
Soit (X, A) une paire de BORSUK. Alors, pour tout entier $k \geq 0$, la projection

$$p : X \to X/A$$

produit un isomorphisme

$$H_k(X, A) \to H_k(X/A, A/A) \simeq \tilde{H}_k(X/A).$$

Démonstration. En utlisant la Proposition 3.7 de la première partie, on obtient que la projection canonique

$$X \cup CA \to (X \cup CA)/CA \simeq X/A$$

est une équivalence d'homotopie. Il reste à utiliser la Proposition 4.12. □

Soit $n \geq 1$ un entier. Rappelons que l'on considère la sphère S^{n-1} comme bord du disque unité fermé $D^n \subset \mathbb{R}^n$. L'espace quotient D^n/S^{n-1} est homéomorphe à S^n.

Comme corollaire de l'énoncé ci-dessus, on obtient l'affirmation suivante.

COROLLAIRE 4.14 (Groupes d'homologie singulière des sphères).
Soit $n \geq 1$ un entier. On a

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ si } k = 0 \text{ ou } k = n, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

De plus,

$$H_k(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \text{ si } k = 0, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, en termes des groupes d'homologie réduits, on a

$$\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ si } k = n, \\ 0, \text{ sinon,} \end{cases}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

Démonstration. On écrit la suite exacte de groupes d'homologie réduits associée à la paire topologique (D^n, S^{n-1}) :

$$\ldots \longrightarrow \tilde{H}_k(D^n) \longrightarrow H_k(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_{k-1}(D^n) \longrightarrow \ldots$$

Pour tout entier $k \geq 1$, les groupes $\tilde{H}_k(D^n)$ et $\tilde{H}_{k-1}(D^n)$ sont triviaux, ce qui implique que le morphisme

$$H_k(D^n, S^{n-1}) \to \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$$

est un isomorphisme. D'après la Proposition 4.13, on a

$$H_k(D^n, S^n) \simeq \tilde{H}_k(D^n/S^{n-1}) \simeq \tilde{H}_k(S^n)$$

pour tout entier $k \geq 0$. Il s'en suit que

$$\tilde{H}_k(S^n) \simeq \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$$

pour tout entier $k \geq 1$. On peut maintenant déduire l'énoncé du corollaire du fait que $\tilde{H}_0(S^n)$ est trivial pour tout entier $n \geq 1$ et du fait que

$$\tilde{H}_k(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ si } k = 0, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

3.4 Suite de Mayer-Vietoris

Soit X un espace topologique non vide, et soient A et B des sous-ensembles de X tels que $A \cap B \neq \varnothing$ et les intérieurs de A et B forment un recouvrement ouvert de X. On pose $\mathcal{U} = \{A, B\}$.

On a une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \longrightarrow C(A \cap B) \xrightarrow{(c,-c)} C(A) \oplus C(B) \xrightarrow{d+e} C^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

(la somme directe de complexes de chaînes est définie de façon naturelle). Le morphisme $C(A \cap B) \to C(A) \oplus C(B)$ est construit à l'aide des inclusions $A \cap B \hookrightarrow A$ et $A \cap B \hookrightarrow B$. Le morphisme $C(A) \oplus C(B) \to C^{\mathcal{U}}(X)$ est construit à l'aide des inclusions $A \hookrightarrow X$ et $B \hookrightarrow X$. Cette suite fournit une suite exacte longue de groupes d'homologie :

$$\ldots \longrightarrow H_k(A \cap B) \xrightarrow{\alpha_k} H_k(A) \oplus H_k(B) \xrightarrow{\beta_k} H_k(X) \xrightarrow{\gamma_k} H_{k-1}(A \cap B) \longrightarrow \ldots$$

La suite exacte obtenue s'appelle la *suite de* Mayer-Vietoris.

Exercice. Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, le morphisme γ_k peut être décrit de la manière suivante : $H_k(X) \to H_k(X, A) \simeq H_k(B, A \cap B) \to H_{k-1}(A \cap B)$, où l'identification au milieu est fournie par le théorème d'excision, et les morphismes à gauche et à droite proviennent des suites exactes longues associées aux paires (X, A) et $(B, A \cap B)$, respectivement.

Exercice. À l'aide de la suite exacte de Mayer-Vietoris, calculer à nouveau les groupes d'homologie singulière des sphères.

Chapitre 5

Homologie cellulaire

1 Complexes cellulaires

1.1 Homologie des bouquets de sphères

Soit $n \geq 0$ un entier, et soit J un ensemble quelconque. On considère le bouquet

$$\bigvee_{j \in J} S^n$$

de n-sphères indexées par J.

On affirme que

$$\tilde{H}_k\left(\bigvee_{j \in J} S^n\right) = \begin{cases} \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}, \text{ si } k = n \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Plus généralement, on a l'énoncé suivant.

Proposition 5.1.

Soit (X_j, x_j), $j \in J$, une collection d'espaces pointés. Supposons que chaque paire (X_j, x_j) de la collection est une paire de Borsuk. Considérons le bouquet correspondant $\bigvee_{j \in J} X_j$ (ce bouquet est le quotient de la réunion disjointe des espaces X_j par la relation d'équivalence qui identifie tous les points x_j). Alors, pour tout entier $k \geq 0$, on a

$$\tilde{H}_k\left(\bigvee_{j \in J} X_j\right) = \bigoplus_{j \in J} \tilde{H}_k(X_j).$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la relation

$$\bigvee_{j \in J} X_j = \coprod_{j \in J} X_j / \coprod_{j \in J} \{x_j\},$$

la suite exacte longue homologique associée à la paire $(\coprod_{j \in J} X_j, \coprod_{j \in J} x_j)$ et la Proposition 4.13. □

1.2 Complexes de chaînes cellulaires

Soit X un CW-complexe.

LEMME 5.2.
Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$H_k(X_n, X_{n-1}) = \begin{cases} \bigoplus_{n\text{-cellules de } X} \mathbb{Z}, \text{ si } k = n \\ 0, \text{ sinon,} \end{cases}$$

(on pose $X_\ell = \varnothing$ si $\ell < 0$).

Démonstration. On a

$$H_k(X_n, X_{n-1}) \simeq \tilde{H}_k(X_n/X_{n-1}) \simeq \tilde{H}_k\left(\bigvee_{n\text{-cellules de } X} S^n\right).$$

□

Pour tout entier $n \geq 0$, le groupe $H_n(X_n, X_{n-1})$ est le groupe abélien libre engendré par les n-cellules de X.

On considère la suite

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_k(X_k, X_{k-1}) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2}) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

où, pour tout entier $k \geq 1$, le morphisme

$$\partial : H_k(X_k, X_{k-1}) \to H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2})$$

provient de la suite exacte du triplet (X_k, X_{k-1}, X_{k-2}). On a bien $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ pour tout entier $k \geq 2$. En effet,

$$\begin{array}{ccccc} H_k(X_k, X_{k-1}) & & & & \\ \downarrow & \searrow^{\partial_k} & & & \\ H_{k-1}(X_{k-1}) & \longrightarrow & H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2}) & & \\ & \searrow^{0} & \downarrow & \searrow^{\partial_{k-1}} & \\ & & H_{k-2}(X_{k-2}) & \longrightarrow & H_{k-2}(X_{k-2}, X_{k-3}). \end{array}$$

On obtient un complexe de chaînes $\mathcal{C}^{CW}(X)$ qui s'appelle le *complexe de chaînes cellulaires de* X :

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(X^k, X^{k-1}) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(X^{k-1}, X^{k-2}) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \ldots$$

Voici sa version augmentée :

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & H_k(X_k, X_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_k} & H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2}) & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & \ldots & & \\ & & & & & \searrow^{\partial_1} & & & \\ H_0(X_0) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & & & & & & \end{array}$$

On aimerait maintenant avoir une meilleure description des morphismes de bord dans le complexe des chaînes cellulaires de X.

Définition 5.1.

Soit $n \geq 0$ un entier, et soit $f : S^n \to S^n$ une application continue. On a $\tilde{H}_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. Donc, le morphisme induit

$$f_* : \tilde{H}_n(S^n) \to \tilde{H}_n(S^n)$$

par f, vu comme morphisme $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, est la multiplication par un certain nombre entier d. Ce nombre d s'appelle le *degré* de f.

Si $f : S^n \to S^n$ est un homéomorphisme, alors le degré $\deg f$ de f est égal à ± 1.

Remarquons qu'un isomorphisme

$$H_k(X_k, X_{k-1}) \simeq \bigoplus_{e_i^k} \mathbb{Z},$$

où e_i^k parcourt les k-cellules de X, dépend du choix d'un homémorphisme entre X_k/X_{k-1} et $\bigvee_{e_i^k} S^k$. Cela amène à considérer certaines classes d'équivalence d'applications caractéristiques de cellules. Ces classes d'équivalence s'appellent *orientations* de cellules.

Si $\varphi_i^k : D^k \to X$ est une application caractéristique d'une k-cellule e_i^k de X, alors on a un homéomorphisme

$$\widetilde{\varphi_i^k} : D^k/S^{k-1} \longrightarrow \overline{e_i^k}/\mathrm{Fr}(e_i^k) \subset X_k/X_{k-1},$$

où $\mathrm{Fr}(e_i^k)$ est la frontière de e_i^k.

Définition 5.2.

Deux applications caractéristiques $\varphi_i^k, \psi_i^k : D^k \to X$ d'une même cellule e_i^k de X sont dites *équivalentes* si la composition $\widetilde{\varphi_i^k} \circ \widetilde{\psi_i^k}^{-1}$

$$\widetilde{\varphi_i^k} \circ \widetilde{\psi_i^k}^{-1} : D^k/S^{k-1} \longrightarrow \overline{e_i^k}/\mathrm{Fr}(e_i^k) \longrightarrow D^k/S^{k-1}$$

est de degré 1.

On dira que le choix d'une des deux classes d'équivalence est le choix d'une *orientation* de la cellule.

Supposons que toutes les cellules de X soient orientées. Une k-chaîne cellulaire de X est une somme formelle finie

$$\sum_j n_j e_j^k,$$

et par convention, si on change l'orientation choisie de e_j^k, on remplace n_j par $-n_j$.

Soit $k \geq 1$ un entier. Supposons que X admet une k-cellule σ et une $(k-1)$-cellule τ. Soit $\varphi : D^k \to X$ une application caractéristique de σ telle que φ correspond à l'orientation choisie de σ, et soit $\psi : D^{k-1} \to X$ une application caractéristique de τ telle que ψ correspond à l'orientation choisie de τ. On a

$$\varphi_{|S^{k-1}} : S^{k-1} \to X^{k-1} \to X^{k-1}/\left(X^{k-2} \bigcup_{\tau' \neq \tau} \tau'\right) \simeq \overline{\tau}/\mathrm{Fr}(\tau) \to S^{k-1},$$

où τ' parcourt toutes les $(k-1)$-cellules de X différentes de τ, et la dernière application est un homéomorphisme ψ^{-1}. Le *coefficient d'incidence* $[\sigma : \tau]$ entre σ et τ est le degré de l'application composée obtenue $S^{k-1} \to S^{k-1}$.

La proposition suivante est un exercice très utile.

PROPOSITION 5.3.
Soit σ une k-cellule de X, où $k \geq 1$ est un entier. Alors

$$\partial\sigma = \sum_{\tau} [\sigma : \tau]\tau,$$

où τ parcourt les $(k-1)$-cellules de X. (Remarquons que, par la définition de CW-complexe, la somme ci-dessus qui exprime $\partial\sigma$ ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.) □

THÉORÈME 5.4.
Soit X un CW-complexe. Alors, les groupes d'homologie des complexes $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}^{CW}(X)$ sont isomorphes.

Démonstration. On montre d'abord que le k-ème groupe d'homologie de $\mathcal{C}^{CW}(X)$ est isomorphe à $H_k(X_{k+1}, X_{k-2})$ pour tout entier $k \geq 0$.

La suite exacte du triplet (X_{k+1}, X_k, X_{k-2}) nous donne la suite exacte

$$H_{k+1}(X_{k+1}, X_k) \longrightarrow H_k(X_k, X_{k-2}) \longrightarrow H_k(X_{k+1}, X_{k-2}) \longrightarrow H_k(X_{k+1}, X_k)$$

On complète cette suite en le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H_k(X_{k-1}, X_{k-2}) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
H_{k+1}(X_{k+1}, X_k) & \longrightarrow & H_k(X_k, X_{k-2}) & \longrightarrow & H_k(X_{k+1}, X_{k-2}) & \longrightarrow & H_k(X_{k+1}, X_k) \\
 & \searrow^{\partial_{k+1}} & \downarrow & & & & \\
 & & H_k(X_k, X_{k-1}) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2}) & & & &
\end{array}$$

(La suite verticale est un morceau de la suite exacte du triplet (X_k, X_{k-1}, X_{k-2}).) Le diagramme se reécrit de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
C_{k+1}^{CW}(X) & \xrightarrow{\gamma} & H_k(X_k, X_{k-2}) & \xrightarrow{\alpha} & H_k(X_{k+1}, X_{k-2}) & \longrightarrow & 0 \\
 & \searrow^{\partial_{k+1}} & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & & & \\
 & & C_k^{CW}(X) & & & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial_k} & & & & \\
 & & C_{k-1}^{CW}(X) & & & &
\end{array}$$

Cela donne les isomorphismes

$$\begin{aligned}
H_k(X_{k+1}, X_{k-2}) &\simeq H_k(X_k, X_{k-2})/\operatorname{Im}\gamma \\
&\simeq \beta(H_k(X_k, X_{k-2}))/\beta(\operatorname{Im}\gamma) \\
&\simeq \operatorname{Ker}\partial_k/\operatorname{Im}\partial_{k+1}.
\end{aligned}$$

Maintenant, on va montre que $H_k(X_{k+1}, X_{k-2}) \simeq H_k(X_{k+1})$ pour tout entier $k \geq 0$.

On considère les triplets (X_{k+1}, X_i, X_{i-1}) pour $i \in \{0, \ldots, k-2\}$. On a la suite exacte

$$H_k(X_i, X_{i-1}) \longrightarrow H_k(X_{k+1}, X_{i-1}) \longrightarrow H_k(X_{k+1}, X_i) \longrightarrow H_{k-1}(X_i, X_{i-1})$$

Puisque $H_k(X_i, X_{i-1}) = H_{k-1}(X_i, X_{i-1}) = 0$, on en déduit que

$$H_k(X_{k+1}, X_{i-1}) \simeq H_k(X_{k+1}, X_i).$$

Ainsi,

$$H_k(X_{k+1}, X_{k-2}) \simeq H_k(X_{k+1}, X_{-1}) = H_k(X_{k+1}).$$

Finalement, on va montrer que $H_k(X_{k+1}) \simeq H_k(X)$ pour tout entier $k \geq 0$.
On considère les paires (X_i, X_{i-1}) pour les entiers $i \geq k+2$. On a la suite exacte

$$H_{k+1}(X_i, X_{i-1}) \longrightarrow H_k(X_{i-1}) \longrightarrow H_k(X_i) \longrightarrow H_k(X_i, X_{i-1})$$

Puisque $H_{k+1}(X_i, X_{i-1}) = H_k(X_i, X_{i-1}) = 0$, on obtient les isomorphismes $H_k(X_{i-1}) \simeq H_k(X_i)$. Il s'en suit que $H_k(X_{k+1}) \simeq H_k(X_{k+m})$ pour tout entier $m \geq 1$. Si X est un CW-complexe de dimension finie, ceci termine la démonstration. Sinon, on peut utiliser le fait que toute chaîne singulière de X est une chaîne singulière de X_N pour un certain entier N. □

COROLLAIRE 5.5. Soit X un CW-complexe, et soit $n \geq 0$ un entier. On suppose que X a un nombre fini de n-cellules, et on note c_n ce nombre. Alors, le n-ème nombre de BETTI $b_n(X)$ de X vérifie l'inégalité suivante :

$$b_n(X) \leq c_n.$$

En particulier, si X est de dimension m, alors $H_k(X) = 0$ pour tout entier $k > m$. □

Exercice. Soit X un CW-complexe fini. Pour tout entier $n \geq 0$, notons c_n le nombre de n-cellules de X. Alors,

$$\sum_n (-1)^n b_n(X) = \sum_n (-1)^n c_n.$$

La somme alternée $\sum_n (-1)^n b_n(X)$ qui apparaît dans l'exercice s'appelle la *caractéristique d'*EULER-POINCARÉ de X.

1.3 Exemples de calculs

Soit $n \geq 0$ un entier. Calculons les groupes d'homologie de $\mathbb{CP}^n$. L'espace projectif $\mathbb{CP}^n$ admet une décomposition cellulaire formée par $n+1$ cellules : une cellule dans chaque dimension paire entre 0 et $2n$. Pour cette décomposition cellulaire, le complexe de chaînes cellulaires est de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \ldots & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & 2n & & 2n-1 & & \ldots & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 \end{array}$$

(les seuls groupes non nuls appraîsent dans les dimensions 0, 2, ..., $2n$). On obtient

$$H_k(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ si } 0 \leq k \leq 2n \text{ est pair,} \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exercice. Soit $n \geq 0$ un entier. Calculer les groupes d'homologie de $\mathbb{R}P^n$.

2 Homologie simpliciale

Soit X un complexe simplicial fini. On peut le voir comme CW-complexe fini et considérer les groupes d'homologie cellulaire de ce CW-complexe.

On numèrote tous les sommets de X. Pour tout entier $k \geq 0$ et pour tout k-simplexe σ^k de X, on a un homéomorphisme $T^k \to \sigma^k$ qui respecte les ordres des sommets. Cet homéomorphisme est une application caractéristique de la k-cellule qui coïncide avec l'intérieur de σ^k, ce qui donne, en particulier, une orientation de cette cellule.

Exercice. Montrer que les morphismes de bord du complexe de chaînes cellulaires de X peuvent être décrits explicitement de la façon suivante : pour tout entier $k \geq 0$ et pour tout k-simplexe σ^k de X, on a

$$\partial\sigma^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \Gamma_i(\sigma^k),$$

où $\Gamma_i(\sigma^k)$ désigne la i-ème face de codimension 1 de σ^k.

Le complexe de chaînes obtenu s'appelle le *complexe classique* de X. Les groupes d'homologie de ce complexe s'appellent les *groupes d'homologie simpliciale* de X. Le complexe classique de X se plonge naturellement dans le complexe de chaînes singulières de X et, comme nous avons vu, cette inclusion induit des isomorphismes des groupes d'homologie.

Chapitre 6

Homologie avec des coefficients différents de $\mathbb{Z}$ et cohomologie

1 Coefficients arbitraires

Soit X un espace topologique. Si G est un groupe abélien, on peut considérer les chaînes dans X à coefficients dans G.

Définition 6.1.
Soit X un espace topologique, et soit G un groupe abélien. Soit $k \geq 0$ un entier. Une *k-chaîne singulière dans X à coefficients dans G* est une combinaison formelle finie

$$\sum_i g_i \sigma_i,$$

où $g_i \in G$ et σ_i est un k-simplexe singulier de X pour tout i.

On définit les morphismes de bord, ainsi que les cycles et les bords exactement comme dans le cas $G = \mathbb{Z}$. On obtient le complexe $\mathcal{C}(X; G)$ de chaînes singulières de X à coefficients dans G et les groupes d'homologie $H_k(X; G)$ de ce complexe.

Les *groupes d'homologie réduits à coefficients dans G*, notés $\tilde{H}_k(X; G)$, sont définis à l'aide du morphisme d'augmentation $\varepsilon : C_0(X; G) \to G$ qui est donné par la somme des coefficients.

Pour une paire topologique (X, A), on définit également les *groupes d'homologie relatifs* $H_k(X, A; G)$ de (X, A) à coefficients dans G de la manière complètement similaire au cas $G = \mathbb{Z}$.

Les résultats formulés et démontrés ci-dessus concernant les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ont leurs analogues naturels pour les groupes d'homologie à coefficients dans G.

2 Groupes de cohomologie

Définition 6.2.
Soit X un espace topologique, et soit G un groupe abélien. Soit $k \geq 0$ un entier. Une *k-cochaîne de X à coefficients dans G* est une fonction qui associe à tout k-simplexe singulier de X un élément de G.

Autrement dit, le groupe $C^k(X; G)$ des k-cochaînes de X à coefficients dans G est $\mathrm{Hom}(C_k(X), G)$.

Les groupes $C^k(X; G)$ forment le complexe $\mathcal{C}^\bullet(X; G)$ de cochaînes singulières de X à

coefficients dans G :

$$\mathcal{C}^\bullet : \qquad \cdots \xleftarrow{\delta} C^{k+1}(X;G) \xleftarrow{\delta} C^k(X;G) \xleftarrow{\delta} \ldots \xleftarrow{\delta} C^1(X;G) \xleftarrow{\delta} C_0(X;G)$$

Les morphismes de cobord δ sont définis de la façon suivante : si c est une k-cochaîne singulière à coefficients dans G et σ est un $(k+1)$-simplexe singulier de X, alors on pose

$$(\delta c)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i c\left(\sigma \circ \Delta_{(e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_{k+1})}\right).$$

Si $a \in C_k(X)$ est une k-chaîne singulière et $c \in C^k(X;G)$ est une k-cochaîne à coefficients dans G, on peut calculer la valeur de c en a. On note $\langle c, a\rangle$ le résultat. On a

$$\langle \delta c, a\rangle = \langle c, \partial a\rangle.$$

Ceci implique que $\delta^2 = 0$, c'est-à-dire, on obtient, effectivement, un complexe. Les groupes d'homologie du complexe de cochaînes $\mathcal{C}^\bullet(X;G)$ s'appellent les *groupes de cohomologie de X à coefficients dans G* et sont notés $H^k(X;G)$. Les éléments du noyau de δ s'appellent les *cocycles*, et les éléments de l'image de δ s'appellent les *cobords*.

Remarque. Si on considère les complexes augmentés, alors, dans le cas du complexe de cochaînes, on obtient le morphisme $\varepsilon' : G \to C^0(X;G)$ qui à tout élément $g \in G$ associe l'application constante g.

Soit (X, A) une paire topologique. Pour définir les groupes de cohomologie relatifs $H^k(X, A; G)$, on utilise la suite exacte courte de complexes

$$0 \longleftarrow \mathcal{C}^\bullet(A;G) \longleftarrow \mathcal{C}^\bullet(X;G) \longleftarrow \mathcal{C}^\bullet(X, A;G) \longleftarrow 0$$

où, pour tout entier $k \geq 0$, le groupe $C^k(X, A; G) \subset C^k(X;G)$ est formé des k-cochaînes singulières de X à coefficients dans G qui s'annulent sur toutes les k-chaînes de A.

On obtient la suite exacte longue cohomologique associée à la paire (X, A) :

$$\ldots \longrightarrow H^k(A;G) \longrightarrow H^{k+1}(X, A;G) \longrightarrow H^{k+1}(X;G) \longrightarrow H^{k+1}(A;G) \longrightarrow \ldots$$

Si $f : X \to Y$ est une application continue entre deux espaces topologiques X et Y, alors, pour tout entier $k \geq 0$, on a les morphismes induits

$$f_* : H_k(X;G) \to H_k(Y;G),$$
$$f^* : H^k(Y;G) \to H^k(X;G).$$

Pour les groupes d'homologie/cohomologie à coefficients dans G, on a la propriété d'invariance d'homotopique : si $f : X \to Y$ et $f' : X \to Y$ sont des applications continues homotopes, alors $f_* = f'_*$ et $f^* = (f')^*$. L'énoncé similaire est vrai aussi dans le cas des groupes d'homologie/cohomologie relatifs à coefficients dans G.

Si X est un espace topologique et $h : G_1 \to G_2$ est un morphisme de groupes abéliens, alors, pour tout entier $k \geq 0$, on a les morphismes induits

$$h_* : H_k(X;G_1) \to H_k(X;G_2),$$
$$h^* : H^k(X;G_1) \to H^k(X;G_2).$$

Si X est un espace topologique et

$$0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$$

est une suite exacte courte de groupes abéliens, on obtient une suite exacte courte de complexes de chaînes

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(X;G_1) \longrightarrow \mathcal{C}(X;G_2) \longrightarrow \mathcal{C}(X;G_3) \longrightarrow 0,$$

qui donne une suite exacte longue pour les groupes d'homologie. De façon similaire, on obtient une suite exacte longue pour les groupes de cohomologie. Ces considérations mènent aux formules qui portent le nom de *formules des coefficients universels*. On ne précise pas ces formules ici.

Exercices.

(1) Soit X un espace topologique formé d'un seul point, et soit G un groupe abélien. Montrer que $H_0(X;G) = G$ et $H_k(X;G) = 0$ pour tout entier $k > 0$. Montrer aussi que $H^0(X;G) = G$ et $H^k(X;G) = 0$ pour tout entier $k > 0$.

(2) Soit G un groupe abélien. Calculer les groupes de cohomologie des sphères à coefficients dans G.

(3) Pour les CW-complexes, définir les groupes de cohomologie cellulaire.

(4) Pour les complexes simpliciaux finis, définir les groupes de cohomologie simpliciale.

(5) Soit G un groupe abélien. Pour tout entier $n \geq 0$, calculer les groupes d'homologie et les groupes de cohomologie de $\mathbb{CP}^n$ à coefficients dans G.

(6) Pour tout entier $n \geq 0$, calculer les groupes d'homologie et de cohomologie de $\mathbb{RP}^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(7) Pour tout entier $n \geq 0$, calculer les groupes de cohomologie de $\mathbb{RP}^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

3 Multiplication

Dans cette section, on suppose que G est un anneau commutatif (par exemple $\mathbb{Z}$). Soit X un espace topologique, et soient $k \geq 0$ et $\ell \geq 0$ des entiers. Nous allons définir l'opération

$$\smile : H^k(X;G) \times H^\ell(X;G) \to H^{k+\ell}(X;G)$$

qui s'appelle le *cup-produit*.

Définition 6.3.
Soient $c \in C^k(X;G)$, $d \in C^\ell(X;G)$, et soit σ un $(k+\ell)$-simplexe singulier de X. On pose

$$(c \smile d)(\sigma) = c\left(\sigma \circ \Delta_{(e_0,\ldots,e_k)}\right) d\left(\sigma \circ \Delta_{(e_k,\ldots,e_{k+\ell})}\right).$$

Ceci définit une application bilinéaire

$$\smile : C^k(X;G) \times C^\ell(X;G) \to C^{k+\ell}(X;G).$$

Exercice. Montrer que, pour tout $c \in C^k(X;G)$ et tout $d \in C^\ell(X;G)$, on a

$$\delta(c \smile d) = \delta c \smile d + (-1)^k c \smile \delta d.$$

En particulier, si c et d sont des cocycles, alors $c \smile d$ est aussi un cocycle. Si de plus au moins un de cocycles c et d est un cobord, alors $c \smile d$ est aussi un cobord. Par conséquent, si c et d sont des cocycles, alors la classe du cocycle $c \smile d$ dans $H^{k+\ell}(X;G)$ ne dépend que des classes de c et d dans $H^k(X;G)$ et $H^\ell(X;G)$, respectivement. On obtient ainsi l'opération du *cup-produit*

$$\smile : H^k(X;G) \times H^\ell(X;G) \to H^{k+\ell}(X;G).$$

Exercices. Soit X un espace topologique, soit G un anneau commutatif, et soient k_1, k_2, k_3 des nombres entiers positifs ou nuls.

(1) Soient $\alpha_i \in H^{k_i}(X;G)$, $i = 1,2,3$. Montrer que

$$\alpha_1 \smile (\alpha_2 \smile \alpha_3) = (\alpha_1 \smile \alpha_2) \smile \alpha_3.$$

(2) Soient $\alpha_i \in H^{k_i}(X;G)$, $i = 1,2$. Montrer que

$$\alpha_1 \smile \alpha_2 = (-1)^{k_1 k_2} \alpha_2 \smile \alpha_1.$$

(3) Soit $h : G_1 \to G_2$ un morphisme d'anneaux commutatifs, et soient $\alpha_i \in H^{k_i}(X;G_1)$, $i = 1,2$. Montrer que

$$h^*(\alpha_1 \smile \alpha_2) = h^*(\alpha_1) \smile h^*(\alpha_2).$$

(4) Soit Y un espace topologique, et soit $f : Y \to X$ une application continue. Soient $\alpha_i \in H^{k_i}(X;G)$, $i = 1,2$. Montrer que

$$f^*(\alpha_1 \smile \alpha_2) = f^*(\alpha_1) \smile f^*(\alpha_2).$$

4 Homologie des variétés

4.1 Orientation d'une variété topologique

Soit $n \geq 1$ un entier.

Définition 6.4.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un point. Une *orientation* de $\mathbb{R}^n$ en x est le choix d'un des deux générateurs du groupe $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z}$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On peut choisir un disque ouvert B de rayon fini et de dimension n tel que $x \in B$ et $y \in B$. L'invariance homotopique des groupes d'homologie nous donne les isomorphismes

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\}).$$

Donc, les orientations en x et y peuvent être comparées. Une orientation de $\mathbb{R}^n$ est un choix cohérent d'orientations en tous les points de $\mathbb{R}^n$.

Maintenant, soit M une variété topologique de dimension n.

Définition 6.5.
Soit $x \in M$. Une *orientation locale* de M en x est le choix d'un générateur du groupe $H_n(M, M \setminus \{x\})$. (Si U est un voisinage ouvert de x tel que $U \simeq \mathbb{R}^n$, alors, d'après le théorème d'excision, on a $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(U, U \setminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z}$.)

Si $x \in M$ est un point, U un voisinage ouvert de x tel que $U \simeq \mathbb{R}^n$, et $V \subset U$ un voisinage ouvert de x tel que V correspond sous l'identification $U \simeq \mathbb{R}^n$ à une boule ouverte de rayon fini de $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout point $y \in V$, les orientations locales de M en x et y peuvent être comparées en utilisant les isomorphismes

$$H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(M, M \setminus V) \simeq H_n(M, M \setminus \{y\}).$$

Définition 6.6.
On dit qu'une variété topologique M est *orientable* si on peut choisir des orientations locales $x \mapsto \mu_x$ en tous les points $x \in M$ (ici μ_x est un générateur de $H_n(M, M \setminus \{x\})$) pour que la condition suivante soit vérifiée : tout point $x \in M$ admet un voisinage ouvert $U \simeq \mathbb{R}^n$ et un voisinage ouvert $V \subset U$ correspondant sous l'identification $U \simeq \mathbb{R}^n$ à une boule ouverte de rayon fini de $\mathbb{R}^n$ tels que les orientations locales de M en tous les points de V soient cohérentes. Si M est orientable, un choix cohérent d'orientations locales en tous les points de M s'appelle une *orientation de* M.

Exercice. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que la sphère S^n et l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ sont orientables. Montrer que l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ est orientable si et seulement si n est impair.

Proposition 6.1.
Toute variété topologique M de dimension $n \geq 1$ admet un revêtement double $\tilde{M} \to M$ tel que $\tilde{M}$ soit une variété topologique orientable.

Démonstration. On considère l'ensemble

$$\tilde{M} = \{\mu_x \,|\, x \in M \text{ et } \mu_x \text{ est une orientation locale en } x\}\,.$$

L'application $\tilde{M} \to M$ définie par $\mu_x \mapsto x$ vérifie la propriété suivante : tout point de M a exactement deux antécédents.

Une base de topologie sur $\tilde{M}$ est donnée par la collection de sous-ensemble $V(\mu_V) \subset \tilde{M}$, où

- $V \subset M$ est sous-ensemble ouvert pour lequel il existe un sous-ensemble ouvert $U \subset M$ tel que $U \simeq \mathbb{R}^n$ et $V \subset U$ correspond sous l'identification $U \simeq \mathbb{R}^n$ à une boule ouverte de rayon fini de $\mathbb{R}^n$,
- μ_V est un générateur de $H_n(M, M \setminus V)$, et
- $V(\mu_V)$ est formé par $\mu_x \in \tilde{M}$ tels que $x \in V$ et μ_x est l'image de $\mu_V \in H_n(M, M \setminus V)$ par l'isomorphisme $H_n(M, M \setminus V) \simeq H_n(M, M \setminus \{x\})$.

On vérifie facilement que les sous-ensembles $V(\mu_V)$ forment une base de topologie de $\tilde{M}$, que $\tilde{M}$ muni de cette topologie est une variété topologique, que l'application $\tilde{M} \to M$ est un revêtement double et que $\tilde{M}$ est orientable. □

Exercice. Soit M une variété topologique connexe. Montrer que M est orientable si et seulement si le revêtement double $\tilde{M}$ a deux composantes connexes. En particulier, si M est simplement connexe, alors M est orientable.

On peut légèrement généraliser la notion d'orientation d'une variété topologique. Soit R un anneau commutatif unitaire. Soit M une variété topologique, et soit $x \in M$ un point. On a un isomorphisme $H_n(M, M \setminus \{x\}\,; R) \simeq R$ de R-modules. Une *R-orientation locale* de M en x est un choix d'un élément inversible de $H_n(M, M \setminus \{x\}\,; R)$. Une R-orientabilité (et, dans le cas des variétés R-orientables, une R-orientation) est définie de la façon complètement similaire à celle indiquée ci-dessus.

Plus formellement, on peut construire une variété topologique M_R muni d'une application continue surjective $M_R \to M$ telle que, pour tout point $x \in M$, les antécédents de $x \in M$ sont les éléments de $H_n(M, M \setminus \{x\}\,; R)$; la construction est complètement similaire à la construction présentée dans la démonstration de la Proposition 6.1. Une R-orientation de M est une section continue de $M_R \to M$ telle que l'image de la section ne contient que des éléments inversibles.

Exercice.

(1) Soit M une variété topologique orientable, et soit R un anneau commutatif unitaire. Montrer que M est R-orientable.

(2) Montrer que toute variété topologique est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-orientable.

La démonstration du théorème suivant est laissée en exercice.

THÉORÈME 6.2. Soit M une variété topologique compacte connexe de dimension $n \geq 1$, et soit R un anneau commutatif unitaire.

- Si M est R-orientable, alors l'application $H_n(M;R) \to H_n(M, M \setminus \{x\}\,; R)$ est un isomorphisme pour tout point $x \in M$.
- On a $H_k(M;R) = 0$ pour tout entier $k > n$.

Une des conséquences du Théorème 6.2 est le fait que, pour tout anneau commutatif unitaire R et pour toute variété topologique compacte connexe R-orientable M de dimension $n \geq 1$, il existe un élément de $H_n(M;R)$ tel que l'image de cet élément dans $H_n(M, M \setminus \{x\}\,; R)$ est un inversible pour tout point $x \in M$. Un tel élément s'appelle une *R-classe fondamentale de M*, notée $[M]$.

Soit M une variété topologique compacte et connexe. Une telle variété a une unique $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-classe fondamentale. Si M est orientable, alors M a deux $\mathbb{Z}$-classes fondamentales.

4.2 Isomorphisme de Poincaré

Soit X un espace topologique, et soit G un anneau commutatif. Soient $\ell \geq 0$ et $k \geq \ell$ des entiers. Nous commençons cette section par la définition de l'opération

$$\frown : H_k(X;G) \times H^\ell(X;G) \to H_{k-\ell}(X;G)$$

qui s'appelle le *cap-produit*.

DÉFINITION 6.7.
Soit σ un k-simplexe singulier de X, et soit $c \in C^\ell(X;G)$. On pose

$$(\sigma \frown c) = c\left(\sigma \circ \Delta_{(e_0,\dots,e_\ell)}\right) \sigma \circ \Delta_{(e_\ell,\dots,e_k)}.$$

Ceci définit une application bilinéaire

$$\frown : C_k(X;G) \times C^\ell(X;G) \to C_{k-\ell}(X;G).$$

Exercice. Montrer que, pour tout k-simplexe singulier σ de X et pour toute ℓ-cochaîne singulière $c \in C^\ell(X;G)$, on a

$$\partial(\sigma \frown c) = (-1)^\ell(\partial\sigma \frown c - \sigma \frown \delta c).$$

En particulier, on obtient l'opération du *cap-produit*

$$\frown : H_k(X;G) \times H^\ell(X;G) \to H_{k-\ell}(X;G).$$

THÉORÈME 6.3 (Isomorphisme de Poincaré).
Soit R un anneau commutatif unitaire, et soit M une variété topologique compacte connexe R-orientable de dimension $n \geq 1$. Alors, l'application

$$P : H^\ell(M;R) \to H_{n-\ell}(M;R)$$

définie par

$$P(\alpha) = [M] \frown \alpha$$

est un isomorphisme pour tout entier ℓ compris entre 0 et n (ici $[M]$ est une R-classe fondamentale de X).

Idée de la démonstration. On considère seulement le cas $R = \mathbb{Z}$, et on suppose que M admet une triangulation finie $\mathcal{T}$. Puisque M est orientable, les orientations des n-simplexes de $\mathcal{T}$ peuvent être choisies de façon cohérente. Une n-chaîne $\sum m_i\sigma_i$, où σ_i parcourt tous les n-simplexes de $\mathcal{T}$, est alors un cycle si et seulement si tous les entiers m_i sont égaux. Ainsi, le groupe $H_n(M) \simeq \mathbb{Z}$ est engendré par la classe de $\sum \sigma_i$, où σ_i parcourt tous les n-simplexes de $\mathcal{T}$.

Considérons la subdivision barycentrique de $\mathcal{T}$. A chaque ℓ-simplexe σ de $\mathcal{T}$, on associe la réunion σ^* de tous les $(n-\ell)$-simplexes de la subdivision barycentrique qui intersectent σ seulement en son centre. On montre que σ^* est homéomorphe à un disque de dimension $n-\ell$, et on obtient une décomposition cellulaire $\mathcal{S}$ de M en cellules de la forme σ^*, chacune des cellules étant associée à un simplexe de $\mathcal{T}$. Les cellules σ^* sont naturellement oriéntées. On a la correspondance suivante : à toute ℓ-cochaîne simplciale c de la triangulation $\mathcal{T}$, on associe la $(n-\ell)$-chaîne cellulaire $\sum m_i\sigma_i^*$ de $\mathcal{S}$, où $m_i = c(\sigma_i)$ pour tout n-simplexe σ_i de $\mathcal{T}$. Cette correspondance identifie (à signe de morphismes de bord près) le complexe de cochaînes simpliciales de $\mathcal{T}$ et le complexe de chaînes cellulaires de $\mathcal{S}$. On peut vérifier que les isomorphismes ainsi obtenus pour les groupes de cohomologie/homologie sont donnés par

$$P(\alpha) = [M] \frown \alpha.$$

□

Dans les notations de la démonstration du Théorème 6.3, pour une ℓ-chaîne simpliciale $c_1 = \sum_i m_i\sigma_i$ et une $(n-\ell)$-chaîne cellulaire $c_2 = \sum_j l_j\sigma_j^*$, on peut considérer leur *indice d'intersection*

$$\phi(c_1, c_2) = \sum_{i,j} \delta_{i,j} m_i l_j,$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

On vérifie facilement que si c' est une ℓ-chaîne simpliciale et c'' est une $(n-\ell+1)$-chaîne cellulaire (ici $1 \leq \ell \leq n$ est un entier), alors

$$\phi(\partial c', c'') = \pm\phi(c', \partial c'').$$

On obtient, donc, une forme bilinéaire (appelée *forme d'intersection*)

$$\varphi : H_\ell(M) \times H_{n-\ell}(M) \to \mathbb{Z}.$$

Exercice. Soient n et ℓ des entiers tels que $0 \leq \ell \leq n$. Montrer que

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = (-1)^{\ell(n-\ell)}\varphi(\alpha_2, \alpha_1)$$

pour tout $\alpha_1 \in H_\ell(M;\mathbb{Z})$ et tout $\alpha_2 \in H_{n-\ell}(M;\mathbb{Z})$.

La démonstration de l'énoncé suivant est laissée en exercice.

Théorème 6.4 (Dualité de Poincaré).
Soit M une variété topologique compacte connexe orientable de dimension $n \geq 1$. Soit $0 \leq \ell \leq n$ un entier. Alors, pour tout morphisme $\alpha : H_\ell(M;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, il existe une classe $\alpha' \in H_{n-\ell}(M;\mathbb{Z})$ tel que $\alpha(\beta) = \varphi(\beta, \alpha')$ pour tout $\beta \in H_\ell(M;\mathbb{Z})$. De plus, une telle classe α' est unique à un élément de torsion près.