Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2024 - 2025

Topologie algébrique des variétés I

Exercices, feuille 1 : Groupes d'homologie

Exercice 1 Soit X un espace topologique.

(1) On suppose dans cette question que X est un point. Déterminer $H_n(X;\mathbb{Z})$ pour tout entier $n \geq 0$.

(2) On suppose que X est connexe par arcs. Montrer que $H_0(X;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

(3) On suppose toujours X connexe par arcs et on considère une application continue $f : X \to Y$ de X vers un autre espace connexe par arcs Y. Montrer que f induit un isomorphisme

$$f_* : H_0(X;\mathbb{Z}) \to H_0(Y;\mathbb{Z}).$$

Exercice 2 Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques.

(1) Montrer que $H_0(X, A) = 0$ si et seulement si A rencontre toutes les composantes connexes par arcs de X.

(2) Montrer que $H_1(X, A) = 0$ si et seulement si l'application $H_1(A) \to H_1(X)$ est surjective et toute composante connexe par arcs de l'espace X contient au plus une composante connexe par arcs de A.

(3) Dans cette question, on suppose que A est un point. Montrer qu'on a des isomorphismes $H_n(X, A) \simeq \tilde{H}_n(X)$ pour tout entier $n \geq 0$.

(4) Montrer que l'inclusion $A \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homologie si et seulement si les groupes d'homologie relatifs de la paire (X, A) sont tous nuls.

(5) Supposons que A est un rétracte de X. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, l'application $H_n(A) \to H_n(X)$ induite par l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est injective.

Exercice 3 Soit X un espace topologique non vide. On rappelle que la *suspension* ΣX de X est l'espace quotient $CX/(X \times \{0\})$, où $CX = (X \times [0;1])/(X \times \{1\})$ est le cône de X. Calculer les groupes d'homologie singulière de ΣX en fonction des groupes d'homologie singulière de X.

Exercice 4 Théorème de Hurewicz. Soit X un espace topologique non vide. On note $C_2(X;\mathbb{Z})$ le groupe des 2-chaînes singulières de X. On rappelle qu'un chemin $\gamma : [0,1] \to X$ peut être vu comme un 1-simplexe singulier de X, qui sera un 1-cycle si et seulement si γ est un lacet.

(1) Considérons un chemin constant dans X. Montrer qu'il est le bord d'une 2-chaîne singulière.

(2) Soient $\alpha : [0,1] \to X$ et $\beta : [0,1] \to X$ des chemins tels que $\alpha(1) = \beta(0)$, de sorte qu'on puisse considérer le chemin $\alpha\beta$ obtenu par concaténation. Montrer qu'il existe une 2-chaîne singulière $c \in C_2(X;\mathbb{Z})$ telle que $\alpha\beta = \alpha + \beta + \partial c$.

(3) Soient $\alpha' : [0,1] \to X$ et $\beta' : [0,1] \to X$ des chemins homotopes. Montrer que $\alpha' - \beta'$ est le bord d'une 2-chaîne singulière.

(4) On fixe un point $x_0 \in X$. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes bien défini

$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X;\mathbb{Z})$$

envoyant la classe d'homotopie d'un lacet de base x_0 sur la classe d'homologie du 1-cycle correspondant. Ce morphisme est appelé le *morphisme de Hurewicz*.

(5) On suppose maintenant que X est connexe par arcs. Montrer qu'alors ce morphisme induit un isomorphisme entre $H_1(X;\mathbb{Z})$ et l'abélianisé de $\pi_1(X,x_0)$ (c'est-à-dire, le quotient de $\pi_1(X,x_0)$ par le sous-groupe engendré par tous les commutateurs $[x,y]=xyx^{-1}y^{-1}$).

Exercice 5 Degré d'une application. Soit $n\geq 1$ un entier, et soit $f:S^n\to S^n$ une application continue. On rappelle que le *degré* de f est le nombre entier $\deg(f)$ tel que, pour tout $z\in H_n(S^n;\mathbb{Z})$, on ait $f_*(z)=\deg(f)z$.

(1) Montrer l'énoncé suivant : si $\deg(f)\neq 0$, alors f est surjective. La réciproque est-elle vraie ?

(2) Montrer que le degré de $f:S^n\to S^n$ est égal au degré de sa suspension $\Sigma f:S^{n+1}\to S^{n+1}$.

(3) Pour cette question, on suppose que $f:S^n\to S^n$ est sans point fixe. Montrer que $\deg f=(-1)^{n+1}$.

(4) Pour cette question, on suppose n impair. Montrer qu'il existe sur S^n un champ de vecteurs tangents continu ne s'annulant pas.

(5) Montrer le théorème de la « boule chevelue » : tout champ de vecteurs tangents continu sur S^n avec n pair s'annule en au moins un point.

Exercice 6 Espaces projectifs. Calculer l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des espaces suivants :

(1) $\mathbb{C}P^n$ et $\mathbb{R}P^n$, $n\geq 0$.

(2) l'espace $\mathbb{C}P^\infty=\cup_{n\geq 0}\mathbb{C}P^n$, muni de la topologie telle que $\mathcal{U}$ soit un ouvert de $\mathbb{C}P^\infty$ si et seulement si l'intersection $\mathcal{U}\cap\mathbb{C}P^n$ est un ouvert de $\mathbb{C}P^n$ pour tout entier $n\geq 0$.

Exercice 7 Homologie de surfaces topologiques.

(1) Calculer les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'une surface orientable S_g de genre $g\geq 0$, obtenue comme somme connexe de g copies du tore $S^1\times S^1$.

(2) Calculer les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'une surface non-orientable V_g de genre $g\geq 1$, obtenue comme somme connexe de g copies du plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$.

Exercice 8 Homologie avec coefficients. Soit G un groupe abélien, et soit X un espace topologique non vide. Pour tout entier $k\geq 0$, on note $C_k(X;G)$ l'ensemble des combinaisons finies formelles $\sum_i g_i\sigma_i$ de k-simplexes singuliers σ_i de X avec des coefficients $g_i\in G$. Cet ensemble est naturellement muni d'une structure de groupe abélien. La notion de bord d'un k-simplexe singulier s'étend à ce groupe par linéarité, et on définit ainsi le complexe des k-chaînes singulières $(C_*(X;G),\partial)$ à coefficients dans G, dont on note $H_*(X;G)$ les groupes d'homologie.

(1) Calculer les groupes d'homologie à coefficients dans G de $\mathbb{C}P^n$.

(2) Calculer les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}P^n$.

(3) Trouver deux espaces topologiques qui ont les mêmes groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Q}$, mais pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

(4) Trouver deux espaces topologiques qui ont les mêmes groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mais pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 9 Caractéristique d'Euler-Poincaré. Soit X un CW-complexe fini. Pour tout entier $k\geq 0$, on note c_k le nombre de k-cellules de X. La *caractéristique d'Euler-Poincaré* de X est l'entier $\chi(X)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i c_i$.

(1) Soit F un corps. Montrer que $\chi(X)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\dim_F H_i(X;F)$.

(2) Calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré des surfaces S_g et V_g.

(3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les entiers g et h pour qu'il existe un revêtement de S_g par S_h.

(4) On suppose que le CW-complexe fini X s'écrit comme l'union de deux sous-complexes A et B. Montrer que $\chi(X)=\chi(A)+\chi(B)-\chi(A\cap B)$.

(5) Soient Y et Z des CW-complexes finis. Expliquer comment $Y\times Z$ peut être muni d'une structure de CW-complexe fini, et montrer que $\chi(Y\times Z)=\chi(Y)\chi(Z)$.