Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2024 - 2025

Topologie algébrique des variétés I

Exercices, feuille 2 : Variétés orientables, Cohomologie.

Exercice 1 Soit $n \geq 1$ un entier, et soit M une variété topologique connexe de dimension n.

(1) Montrer que M admet un revêtment double $p : \tilde{M} \to M$ tel que $\tilde{M}$ soit une variété topologique orientable.

(2) Montrer que M est orientable si et seulement si le revêtement double $\tilde{M}$ a deux composantes connexes.

(3) Supposons que le groupe fondamental de M n'a pas de sous-groupe d'indice 2. Montrer que M est orientable. (En particulier, si M est simplement connexe, alors M est orientable.)

Exercice 2 Quelques calculs de cohomologie. Soit $n \geq 1$ un entier.

(1) Calculer les groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des espaces topologiques suivants : $\mathbb{C}P^n$, le tore $S^1 \times S^1$, la bouteille de Klein.

(2) Calculer les groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}P^n$.

(3) Calculer les groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}P^n$.

Exercice 3 Cup-produit. Soit X un espace topologique, dont on note $(C^*(X;R), \delta)$ le complexe de cochaînes singulières à coefficients dans un anneau commutatif R. Montrer les propriétés suivantes du cup-produit au niveau des cochaînes :

(1) (Compatibilité avec le cobord) Pour tout $(a,b) \in C^p(X;R) \times C^q(X;R)$, on a

$$\delta(a \smile b) = \delta a \smile b + (-1)^p a \smile \delta b.$$

(2) (Associativité) Pour tout $(a,b,c) \in C^p(X;R) \times C^q(X;R) \times C^r(X;R)$, on a

$$a \smile (b \smile c) = (a \smile b) \smile c.$$

(3) (Fonctorialité) Soit Y un espace topologique, $g : X \to Y$ une application continue, et $g^\sharp : C^*(Y;R) \to C^*(X;R)$ le morphisme de complexes induit. Alors, pour tout $(a,b) \in C^p(Y;R) \times C^q(Y;R)$, on a

$$g^\sharp(a) \smile g^\sharp(b) = g^\sharp(a \smile b).$$

Soit $h : R \to R'$ un morphisme d'anneaux et $h^\sharp : C^*(X;R) \to C^*(Y;R)$ le morphisme de complexes induit. Alors, pour tout $(a,b) \in C^p(X;R) \times C^q(X;R)$, on a

$$h^\sharp(a \smile b) = h^\sharp(a) \smile h^\sharp(b).$$

(4) Formuler et démontrer les propriétés du cup-produit cohomologique similaires aux propriétés (2) et (3) ci-dessus.

Exercice 4 Anti-commutativité du cup-produit. Soit X un espace topologique. Pour tout entier $k \geq 0$ et pour tout k-simplexe singulier σ, on note $\bar{\sigma}$ le simplexe inversé $\sigma \circ \omega$, où $\omega : T^k \to T^k$ est l'application affine qui envoie tout sommet e_i du k-simplexe standard T^k sur e_{k-i}. Pour tout entier $k \geq 0$, on définit un morphisme $\rho_k : C_k(X) \to C_k(X)$ en posant $\rho(\sigma) = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \bar{\sigma}$.

(1) Montrer que les morphismes ρ_k forment un morphisme de complexes de chaînes

$$\rho : (C_*(X), \partial) \to (C_*(X), \partial).$$

(2) Montrer que ce morphisme de complexes de chaînes est homotope à l'identité.

(3) Montrer que

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{pq} \beta \smile \alpha$$

pour tout $\alpha \in H^p(X; R)$ et tout $\beta \in H^q(X; R)$, où R est un anneau commutatif.

Exercice 5 Cap-produit. Soit X un espace topologique, et soit R un anneau commutatif. Soient $k \geq \ell$ deux entiers positifs ou nuls. Pour tout k-simplexe singulier σ et toute ℓ-cochaîne $c \in C^\ell(X; R)$, on pose

$$(\sigma \frown c) = c\left(\sigma \circ \Delta_{(e_0, \ldots, e_\ell)}\right) \sigma \circ \Delta_{(e_\ell, \ldots, e_k)}.$$

Ceci définit une application bilinéaire

$$\frown : C_k(X; R) \times C^\ell(X; R) \to C_{k-\ell}(X; R).$$

Montrer que, pour tout k-simplexe singulier σ de X et pour toute ℓ-cochaîne singulière $c \in C^\ell(X; R)$, on a

$$\partial(\sigma \frown c) = (-1)^\ell (\partial\sigma \frown c - \sigma \frown \delta c).$$

En particulier, on obtient l'opération du *cap-produit*

$$\frown : H_k(X; R) \times H^\ell(X; R) \to H_{k-\ell}(X; R).$$