Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2024 - 2025

Topologie algébrique des variétés I

Exercices, feuille 3

Exercice 1 Soit M une variété connexe compacte non orientable de dimension 3. Montrer que le groupe $H_1(M)$ est infini. (On peut utiliser le fait que M admet une structure de CW-complexe fini.)

Exercice 2 Quelques calculs de cohomologie. Soit $n \geq 1$ un entier.

(1) Calculer l'anneau de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des espaces topologiques suivants : le tore $S^1 \times S^1$, la bouteille de Klein.

(2) Calculer l'anneau de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}P^n$.

(3) Calculer l'anneau de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{C}P^n$.

Exercice 3 Montrer que $\mathbb{C}P^2$ n'est pas homotopiquement équivalent à $S^2 \vee S^4$.

Exercice 4 Soit M une variété topologique connexe de dimension n. Montrer que le groupe $H^n_c(M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ si M est orientable, et que le groupe $H^n_c(M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si M n'est pas orientable.

Exercice 5 (a) Montrer que la variété topologique $S^2 \times S^2$ est orientable. On munit $S^2 \times S^2$ d'une orientation.

(b) Montrer que le groupe $H^2(S^2 \times S^2)$ est sans torsion.

(c) Calculer la signature de $S^2 \times S^2$.

Exercice 6 (a) Soit $k \geq 1$ un entier, et soit M une variété topologique compacte de dimension $4k$. On suppose que M admette une structure de CW-complexe fini et que M soit orientable et orientée. Montrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ et la signature $\sigma(M)$ de M sont de même parité.

(b) Soit N une variété topologique compacte. On suppose qu'il existe une variété topologique compacte X à bord vérifiant les propriétés suivantes :
— le bord ∂X de X soit homéomorphe à N ;
— X admette une structure de CW-complexe fini pour laquelle le bord ∂X de X devient un sous-complexe.

Montrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(N)$ de N est paire.

Exercice 7 Soit $n \geq 1$ un entier, et soit M une variété topologique connexe compacte de dimension n. Supposons que M admette une structure de CW-complexe fini.

(a) Montrer l'affirmation suivante : si la variété M est orientable, alors le groupe $H_{n-1}(M)$ est sans torsion.

(b) Montrer l'affirmation suivante : si la variété M est non orientable, alors le sous-groupe de torsion de $H_{n-1}(M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) Supposons que la variété M est orientable, $n = 4$ et $H_1(M) = 0$. Montrer que tous les groupes d'homologie $H_i(M)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, sont sans torsion.

(d) Donner un exemple d'une variété topologique N connexe compacte orientable de dimension 4 telle que le groupe $H_2(N)$ ait au moins un élément de torsion non trivial.