Université Paris Diderot
M1 Mathématiques
Analyse réelle
Année 09/10

Travaux Dirigés : feuille 4

Exercice 1

Soient K un espace métrique compact, F un espace de Banach et A une partie de $(\mathcal{C}(K,F), \| \ \|_\infty)$ d'adhérence compacte. Montrer que $\bigcup_{x\in K} A(x)$ est d'adhérence compacte dans F.

(On pourra utiliser l'exercice 2 de la feuille 2).

Exercice 2 : caractérisation des parties précompactes de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$

Soit $I = [0,1]$. On munit $E_0 = \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ de la norme : $\|u\|_{E_0} = \sup_{x\in I} |u(x)|$.

On note $\mathcal{P}$ le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de E_0 formé des fonctions polynomiales à coefficients complexes et, pour tout $A > 0$, L_A la partie de $\mathcal{P}$ définie par :

$$L_A = \{p \in \mathcal{P}, |p(0)| + \|p'\|_{E_0} \leq A\}.$$

1. Montrer que, pour tout $A > 0$, L_A est précompact dans E_0.
2. Soit H une partie précompacte de E_0.
   (a) Justifier que, pour tout $f \in E_0$ et tout $\eta > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $\|f - p\|_{E_0} \leq \eta$.
   (b) Prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des éléments $p_1, ..., p_r \in \mathcal{P}$ tels que $H \subset \bigcup_{\ell=1}^r B(p_\ell, \varepsilon)$ où $B(p_\ell, \varepsilon) = \{f \in E_0, \|f - p_\ell\|_{E_0} < \varepsilon\}$ est la boule ouverte de centre p_ℓ et de rayon ε.
   (c) En conclure que H possède la propriété suivante :

   $$(1) \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0, \quad \text{il existe } A > 0 \text{ tel que, pour tout } f \in H, \quad d(f, L_A) < \varepsilon,$$

   où $d(f, L_A) = \inf_{g\in L_A} \|f - g\|_{E_0}$.
3. Montrer que toute partie H de E_0 possédant la propriété (1) ci-dessus est précompacte dans E_0.
4. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie H de E_0 soit précompacte.

Exercice 3 : L'espace $\mathcal{D}([0,1],\mathbb{R})$

On note $\mathcal{D}([0,1],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues à droite en tout $x \in [0,1[$ et admettent une limite à gauche, notée $f(x_-)$, en tout point x de $]0,1]$.

1. Montrer que $\mathcal{D}([0,1],\mathbb{R}) \subset B([0,1],\mathbb{R})$ (ensemble des applications bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$).
2. Montrer que $\mathcal{D}([0,1],\mathbb{R})$ est fermé dans l'espace $(B([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_{sup})$.
3. Soit $f \in \mathcal{D}([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $n \geq 1$ on définit $E_n = \{x \in]0,1] : |f(x_-) - f(x)| > 1/n\}$.
   (a) Montrer par l'absurde que chaque E_n est fini.
   (b) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
   (c) Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{D}([0,1],\mathbb{R})$ ayant une infinité de points de discontinuité.

   On note Λ l'ensemble des applications λ de $[0,1]$ dans lui-même qui vérifient :
   (i) λ est strictement croissante, (ii) $\lambda(0) = 0, \ \lambda(1) = 1$,
   (iii) $\exists k, K \in]0, +\infty[$ tels que $\forall x, y \in [0,1], \ k|x-y| \leq |\lambda(x) - \lambda(y)| \leq K|x-y|$.

   (Les éléments de Λ sont des bijections de $[0,1]$ dans lui-même, lipschitziennes ainsi que leurs inverses). Pour $\lambda \in \Lambda$ on note

   $$\gamma(\lambda) = \sup_{x,y\in[0,1], x\neq y} \left| \log \frac{\lambda(x) - \lambda(y)}{x - y} \right| \quad (< +\infty \ \text{ d'après (i) et (iii)}).$$

4. Montrer que Λ est un groupe pour la composition des applications de $[0,1]$ dans lui-même, et que $\gamma(\lambda \circ \mu) \leq \gamma(\lambda).\gamma(\mu)$ pour $\lambda, \mu \in \Lambda$.
5. Montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$ on a $\|\lambda - id\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda(x) - x| \leq e^{\gamma(\lambda)} - 1$.
6. Pour $f, g \in \mathcal{D}([0,1],\mathbb{R})$ on définit

$$d(f,g) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \left(\gamma(\lambda) + \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(\lambda(x))| \right).$$

(a) Montrer que d est une distance sur $\mathcal{D}([0,1],\mathbb{R})$ (appelée *distance de Skorohod*).

(b) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[0,1]$ convergeant vers $a \in]0,1[$, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers $b \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite des fonctions $f_n = b_n 1\!\!1_{[0,a_n[}$ converge vers la fonction $b1\!\!1_{[0,a[}$ pour la distance d. Y a-t-il convergence en norme $\| \|_{sup}$?

7. On se propose de monter que $(\mathcal{D}([0,1],\mathbb{R}), d)$ est un espace métrique complet.
Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{D}([0,1],\mathbb{R}), d)$.
   (a) Montrer l'existence d'une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de (f_n) telle que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(f_{\varphi(n)}, f_{\varphi(n+1)}) < 2^{-(n+1)},$$
puis d'une suite (λ_n) dans Λ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \gamma(\lambda_n) + \|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n+1)} \circ \lambda_n\|_{sup} < 2^{-n}.$$
   (b) Montrer à l'aide des questions 4. et 5. que, pour tout n, la suite $(\lambda_{n+k} \circ \cdots \circ \lambda_{n+1} \circ \lambda_n)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$. Soit μ_n sa limite. Montrer que $\mu_n \in \Lambda$ et $\lim \gamma(\mu_n) = 0$.
   (c) Montrer que la suite $(f_{\varphi(n)} \circ \mu_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{D}([0,1],\mathbb{R}), \| \|_{sup})$.
   (d) Montrer que $(f_{\varphi(n)})$ converge dans $(\mathcal{D}([0,1],\mathbb{R}), d)$. Conclure.

Exercice 4

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites complexes. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et p réel supérieur ou égal à 1 on note
$$||x||_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p} \in [0,+\infty] \quad \text{et} \quad ||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \in [0,+\infty].$$
On définit $l^p = \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : ||x||_p < +\infty\}$ $\quad (p \in [1,+\infty[)$ $\quad$ et $\quad l^\infty = \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : ||x||_\infty < +\infty\}$.

1. Soit $1 < p < +\infty$. On pose $p' = p/(p-1)$.
   (a) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, montrer que $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{p}\alpha^p + \dfrac{1}{p'}\beta^{p'}$.
   (b) Montrer que si $x \in l^p$ et $y \in l^{p'}$ on a
$$xy \overset{\text{déf}}{=} (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1 \quad \text{et} \quad ||xy||_1 \leq ||x||_p ||y||_{p'} \quad \text{(inégalité de Hölder).}$$
Indication : vérifier que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n y_n| \leq 1/p||x||_p^p + 1/p'||y||_{p'}^{p'}$ et utiliser cette inégalité avec $x/\|x\|_p$ et $y/\|y\|_{p'}$.
   (c) Montrer que si $x \in l^p$ et $y \in l^p$ on a
$$x + y \in l^p \quad \text{et} \quad ||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p \quad \text{(inégalité de Minkowski).}$$
2. Montrer que $(l^p, || \, ||_p)$ $(p \geq 1)$ et $(l^\infty, || \, ||_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés.
3. Montrer que l^p $(p \geq 1)$ et l^∞ sont des espaces de Banach.
4. Montrer que $1 \leq p < q \leq +\infty \Longrightarrow l^p \subsetneq l^q$ et $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ pour tout $x \in l^p$.

Exercice 5

1. Montrer que l^∞ est isométriquement isomorphe au dual topologique de l^1.
(On montrera que l'application qui à $a \in l^\infty$ associe la forme linéaire $\varphi_a : x \in l^1 \mapsto \sum_n a_n x_n$ définit une bijection isométrique de l^∞ sur $(l^1)'$.)
2. Montrer de la même façon que l^1 s'identifie isométriquement à un sous-espace vectoriel de $(l^\infty)'$.
3. On note c_c l'espace vectoriel des suites de nombres complexes nulles à partir d'un certain rang et c_0 celui des suites qui convergent vers 0.
   (a) Montrer que c_0 est l'adhérence de c_c dans l^∞. En déduire que $(c_0, \| \|_\infty)$ est un Banach.
   (b) Montrer que l^1 est isométriquement isomorphe au dual topologique de $(c_0, \| \|_\infty)$.
4. On note c l'espace vectoriel des suites de nombres complexes convergentes.
   (a) $(c, \| \|_\infty)$ est-il un espace de Banach ?
   (b) Montrer que toute forme linéaire continue φ sur $(c, \| \|_\infty)$ est du type :
$$\varphi_{a,b} : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n + b \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad \text{avec } (a_n) \in \ell^1 \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$
   (c) Déterminer la norme de $\varphi_{a,b}$ en fonction de a et b.
   (d) En déduire que ℓ^1 est aussi isométriquement isomorphe au dual topologique de $(c, \| \|_\infty)$.