Université Paris Diderot
M1 Mathématiques
Analyse réelle
Année 09/10

Travaux Dirigés : feuille 6

Exercice 1

Soient p et q tels que $1 \leq q \leq p \leq +\infty$ et f une fonction mesurable de Ω (borélien de $\mathbb{R}^d$) dans $\mathbb{C}$. On suppose que $fg \in L^q(\Omega)$ pour tout $g \in L^p(\Omega)$.

Montrer que $f \in L^r(\Omega)$ avec $r = \begin{cases} pq/(p-q) & \text{si} \quad q < p < +\infty, \\ r = q & \text{si} \quad p = +\infty \\ r = +\infty & \text{si} \quad p = q \end{cases}$

Exercice 2

1. Montrer que la suite de fonctions $e_N = \dfrac{1}{N}\, \mathbb{1}_{[0,N]}$ $(N \geq 1)$ tend vers zéro dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. La forme linéaire $f \mapsto \int f(t)\, dt = I(f)$ définie sur l'espace $C_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact s'étend-elle en une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R})$?
3. Montrer que le sous-espace $\{f \in C_c(\mathbb{R}),\ I(f) = 0\}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Est-il dense dans $L^1(\mathbb{R})$?

Exercice 3

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue finie. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f des fonctions mesurables sur Ω à valeurs complexes telles que $f_n \longrightarrow f \quad p.p.$

1. Soit $\alpha > 0$. On pose $S_n(\alpha) = \bigcup_{k \geq n} \{x \in \Omega : |f_k(x) - f(x)| > \alpha\}$. Montrer que la mesure de $S_n(\alpha)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $\delta > 0$ il existe $A \subset \Omega$ mesurable tel que $m(A) < \delta$ et f_n converge uniformément vers f sur $\Omega \setminus A$.
3. On suppose ici que $f_n \in L^p(\Omega)$ où $p \in [1, +\infty[$ et que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \text{ tel que } \int_A |f_n|^p dm \leq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall A \text{ mesurable avec } m(A) < \delta.$$

   Montrer que $f \in L^p(\Omega)$ et que f_n converge vers f dans $L^p(\Omega)$.

Exercice 4

1. Soit E l'ensemble des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$, localement L^∞ et portées par des intervalles du type $[a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$.
   Montrer que pour $f, g \in E$, le produit de convolution $f * g$ est bien défini et que $f * g$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, élément de E.
2. Soient α et β deux réels. Calculer la convolée $e^{\alpha x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) * e^{\beta x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$.
3. Calculer $f * f$, où $f(x) = x^{-2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$.

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de classe C^1, bornées et de dérivées bornées. On suppose que f et g' sont dans L^1. Montrer que $f \star g$ est bien définie et qu'elle est de classe C^2.

Exercice 6

Soient $p \in [1, +\infty]$, p' son exposant conjugué. Pour $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}^d$, on note $\tau_a\varphi(x) = \varphi(x - a)$. On considère deux fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$.

1. Que peut-on dire de $f * g$?
2. Montrer l'inégalité : $\forall x, h \in \mathbb{R}^d \quad |(f * g)(x + h) - (f * g)(x)| \leq \|\tau_h f - f\|_p \|g\|_{p'}$.
3. Montrer que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.
4. On suppose que $p < +\infty$ et que g est continue à support compact. Montrer que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} (f * g)(x) = 0$.
5. On suppose que $1 < p < +\infty$. Montrer qu'ici encore $f * g$ tend vers zéro à l'infini.
   Indication : on utilisera la densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 7

Soient A_1 et A_2 deux boréliens de $\mathbb{R}^d$ tels que $0 < m(A_i) < +\infty$ pour $i = 1, 2$.

1. Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{A_1} * \mathbb{1}_{A_1}$ est continue, non nulle.
2. En déduire que l'ensemble $A_1 + A_2$ est d'intérieur non vide.

Exercice 8

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. Soit Φ continue à support compact sur $\mathbb{R}^d$. On pose, pour $n \geq 1$, $\Phi_n(x) = n^d\Phi(nx)$. Montrer que $\forall n,\ f * \Phi_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$, et que $f * \Phi_n$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.

Exercice 9

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour $a \in \mathbb{R}^d$, on note $\tau_a f(x) = f(x - a)$.

1. Montrer que si f admet un représentant uniformément continu, l'application $a \longmapsto \tau_a f$ est continue de $\mathbb{R}^d$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.
2. On va ici démontrer la réciproque. On suppose donc que l'application $a \longmapsto \tau_a f$ est continue de $\mathbb{R}^d$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et on considère une approximation de l'unité $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que
   $$||f * \Phi_n - f||_\infty \leq \int_{\mathbb{R}^d} ||\tau_y f - f||_\infty \Phi_n(y)\, dy.$$
   (b) En déduire que $\lim_{n\to\infty} ||f * \Phi_n - f||_\infty = 0$.
   (c) Montrer que l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, uniformément continues et bornées, est, muni de la norme $\|\ \|_\infty$, un espace de Banach.
   (d) Démontrer que f admet un représentant uniformément continu.
   Indication : utiliser le 3 de l'exercice 6.

Exercice 10

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $\chi = \mathbf{1}_{[a,b]}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note

$$\chi_n = \chi * \cdots * \chi \quad (n \text{ fois}).$$

1. Tracer les graphes de χ_2 et χ_3. Montrer que pour tout $n \geq 2, \chi_n \in C_c^{n-2}$.
2. Calculer $\|\chi_n\|_{L^1}$ pour $n \geq 2$ et déterminer le support de χ_n. Calculer $\|\chi_2\|_{L^\infty}$ et montrer que pour tout $n \geq 2$, $\|\chi_n\|_{L^\infty} \leq \|\chi_{n-1}\|_{L^1}$.
3. Soit $\varphi = \sum_{n\geq 2} \chi_n$. Montrer que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $b - a < 1$. Montrer qu'alors φ est continue et vérifie l'équation $\varphi = \chi * \varphi + \chi_2$. Montrer que φ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.