Université Paris Diderot
M1 Mathématiques
Analyse réelle
Année 09/10

Travaux Dirigés : feuille 7

Exercice 1

On définit l'espace $h^1 = \left\{ u \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |u_n|^2 < \infty \right\}.$

1. Montrer que h^1 est un espace de Hilbert quand on le munit du produit scalaire

$$\langle u | v \rangle_{h^1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n^2) \overline{u_n} v_n.$$

2. Montrer que h^1 est un sous-espace dense de $\ell^2(\mathbb{N})$.
3. Montrer que la boule unité fermée de h^1 est un compact de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 2

Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $]0,1[$ telle que $\lim \alpha_n = 0$. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\ell^2(\mathbb{N})$, on pose

$$\langle x \mid y \rangle_\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n) \overline{x_n} y_n.$$

1. Montrer que l'on définit une nouvelle structure préhilbertienne sur $\ell^2(\mathbb{N})$, de norme notée $\| \ \|_\alpha$.
2. Obtient-on ainsi un espace de Hilbert ?
   Indication : on montrera que la boule unité de $(\ell^2(\mathbb{N}), \| \ \|_2)$ est fermée et précompacte dans $(\ell^2, \| \ \|_\alpha)$.

Exercice 3

Soit H un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$. Montrer l'identité, dite *de polarisation*, suivante :

$$\forall x, y \in H \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|-x+y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - i\|-ix+y\|^2 \Big).$$

Exercice 4

Soit E un e.v.n. sur $\mathbb{C}$ dont la norme vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

On veut montrer que $\| \ \|$ est la norme associée à un produit scalaire.
On définit donc $\langle \ , \ \rangle$ par (d'après l'exercice précédent, ce choix s'impose) :

$$\forall x, y \in E \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|-x+y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - i\|-ix+y\|^2 \Big).$$

Montrer que $\langle \ , \ \rangle$ est un produit scalaire de norme associée $\| \ \|$, en prouvant successivement que, pour tous $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ et $\langle x, 0\rangle = 0$.
2. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$.
3. $\langle x, y + z\rangle = 2\langle x/2, y\rangle + 2\langle x/2, z\rangle$.
4. $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.
5. $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.
   Indication : commencer par $\lambda \in \mathbb{N}$ puis étendre successivement à $\lambda \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ puis $\mathbb{C}$.

Exercice 5

1. Soit E un espace vectoriel et $P : E \to E$ une application linéaire telle que que $P^2 = P$.
   Montrer que $\operatorname{Ker} P$ et $\operatorname{Im} P$ sont supplémentaires et que P est la projection sur $\operatorname{Im} P$ parallèlement à $\operatorname{Ker} P$.
2. Soit H un espace de Hilbert et $P : H \to H$ une application linéaire.
   Montrer que P est la projection *orthogonale* sur un s.e.v. fermé de H si et seulement si P vérifie les deux conditions :
   $$P^2 = P \qquad \text{et} \qquad \forall x \in H \quad \|P(x)\| \leq \|x\|.$$
   Indication : on montrera notamment que, sous ces conditions, $(\operatorname{Ker} P)^\perp \subset \operatorname{Im} P$.

Exercice 6

Dans un espace de Hilbert H, on considère une famille orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ et n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ tels que
$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i - e_i\|^2 < 1.$$
Montrer que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Indication : se ramener au cas où $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{V}ect(e_1, \ldots, e_n)$.

Exercice 7

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non nulle, positive.

1. Montrer que
   $$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)\, dt$$
   est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, l'anneau des polynômes à coefficients réels.
2. Montrer qu'il existe une base $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\langle P_i, P_j\rangle = \delta_{i,j}$ avec P_n de degré n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a n racines simples dans $]0, 1[$.

Exercice 8

Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H converge faiblement vers $x \in H$ si et seulement si
$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall y \in H.$$

1. Montrer que toute suite convergente dans H est faiblement convergente.
2. Montrer que tout suite orthonormée de H converge faiblement vers 0. Y a-t-il convergence "forte" ?

Exercice 9 : base de Hermite

Les polynômes de Hermite sont définis par la relation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x)\, e^{-x^2}, \quad H_0 = 1,$$

et les fonctions de Hermite sont définies par

$$\psi_n(x) = c_n H_n(x) e^{-x^2}, \quad \text{avec} \quad c_n = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}}.$$

1. Vérifier que
$$H_{n+1}(x) = -H_n'(x) + 2x H_n(x).$$
2. Vérifier que H_n est un polynôme de degré n.
3. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a
$$\left(\frac{d}{dx} + 2x\right) \psi_0(x) = 0, \quad -\frac{d}{dx}\, \psi_n(x) = \sqrt{2(n+1)}\, \psi_{n+1}(x).$$
4. Montrer que les $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un système orthonormal dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour calculer $\langle \psi_q \mid \psi_p \rangle$, on pourra intégrer par parties p (ou q) fois.

Exercice 10 : polynômes de Legendre

On définit, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times [-1, 1]$,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n\right).$$

1. Calculer P_0, P_1 et P_2.
2. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}, e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n$. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système orthonormal dans $L^2([-1, 1])$.
3. Montrer que (e_n) est une base hilbertienne.
Indication : on pourra utiliser le théorème de Stone-Weierstrass.

Exercice 11 : polynômes de Laguerre

On considère $L^2(\mu)$ où μ est la mesure $e^{-x}\, dx$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$
est un polynôme de degré n.
2. Calculer le produit scalaire $\langle L_n \mid x^k \rangle$ pour tout $0 \leq k \leq n$. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormal dans $L^2(\mu)$.
3. Démontrer que si α est un réel positif ou nul, alors
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha x} L_n(x) e^{-x}\, dx \right)^2 = \frac{1}{2\alpha + 1}.$$
En déduire que la fonction $\phi_\alpha : x \mapsto e^{-\alpha x}$ appartient à l'adhérence dans $L^2(\mu)$ de l'espace vectoriel engendré par la suite (L_n).
4. Démontrer que la famille $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $C(\mathbb{R}_+)$ (pour la norme de $L^2(\mu)$).
5. En déduire que (L_n) est une base hilbertienne.