Université Paris 7 | Janvier 2008
L3 Maths-Info | TD Analyse

Devoir Maison

Exercice 1 : Soit A et B deux parties bornées non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. $\sup A + B = \sup A + \sup B$
2. $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille non vide et bornée de réels. Comparer $\inf_{i\in I}(\sup_{j\in J} a_{i,j})$ et $\sup_{j\in J}(\inf_{i\in I} a_{i,j})$. Montrer que $\sup_{i\in I}\sup_{j\in J} a_{i,j} = \sup_{j\in J}\sup_{i\in I} a_{i,j}$.

Exercice 2 : Soit X un espace topologique et $A \subset X$. Montrer les propriétés suivantes :

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
2. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $\overline{A}^c = Int(A^c)$

Exercice 3 : On note $X = \ell^\infty$ l'espace des suites bornées et Y l'espace des suites réelles tendant vers 0. On munit X de la métrique $d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Vérifier que d est une distance.
2. Montrer que Y est fermé dans X.
3. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans Y mais pas dans X.

Exercice 4 : Soit X un espace topologique, I une famille finie et $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts denses. Montrer que $\cap_{i\in I}\mathcal{O}_i$ est encore un ouvert dense. On pourra raisonner par récurrence sur le cardinal de I. Montrer ensuite qu'une réunion finie de fermés d'intérieur vide est encore un fermé d'intérieur vide.

Exercice 5 : Soit f une fonction entre deux espaces topologiques. Montrer que f est continue si et seulement si pour toute partie A de l'espace de départ, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$