Université Paris 7 | Fevrier 2008
L3 Maths-Info | TD Analyse

Devoir Maison 2

Exercice 1 : Soit H la fonction définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$H(x) = (\int_0^x e^{-u^2} du)^2 + \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} \frac{1}{1+t^2} dt$$

1)Montrer que H est continue, que $H(0) = \frac{\pi}{4}$ et que $(\int_0^\infty e^{-u^2} du)^2 = \lim_{x\to\infty} H(x)$.
2)Monter que H est dérivable et que $H' = 0$. En déduire : $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 2 : Calculer

$$\int_D x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} e^{-xy} dxdy,$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < y \ et \ xy > 1\}$.
On pourra utiliser le changement de variables $\phi(x,y) = (xy, \frac{x}{y})$.

Exercice 3 : Soit f continue, positive, monotone et intégrable sur $]0,1[$, calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n) dx$.

Exercice 4 : On appelle D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x > y^2\}$.

1. Représenter graphiquement le domaine D.

   On définit la fonction f par

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to \dfrac{y^2}{x^2(1+y^2)} \mathbf{1}_D(x,y) \end{array}$$

2. En utilisant l'un des théorèmes de Fubini, calculer de deux manières différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{y^2}{x^2(1+y^2)} \mathbf{1}_D(x,y)\ dxdy.$$

En déduire l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$