Premier devoir surveillé

Mercredi 18 octobre

Les calculatrices sont interdites. L'énoncé comporte deux pages.

Exercice 1. Pour quelle valeurs de m la matrice A ci-dessous est-elle inversible?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & m & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer son polynôme caractéristique. Donner ses valeurs propres.
2. Que peut-on conclure à ce stade sur la diagonisabilité de f?
3. Trouver les espaces propres associés aux valeurs propres de f. Donner, si c'est possible, une base de vecteurs propres de f, écrire la matrice de passage de la base canonique à celle-là et écrire la matrice de f dans cette nouvelle base.
4. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C suivante:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Cette matrice est-elle diagonalisable?

Exercice 3. On considre la matrice D suivante

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de D. Donner ses valeurs propres.
2. On définit deux vecteurs V et W par

$$V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $D\,V$ et $D\,W$. Que sont V et W pour D?

3. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale Δ telles que:

$$D = P\Delta P^{-1}$$

Montrer que pour tout n, $D^n = P\Delta^n P^{-1}$.

On introduit maintenant une suite relle (u_n) définie par la récurrence suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a \\ u_1 = b \\ _forall\, n,\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{array} \right.$$

Pour l' étudier, on introduit la suite (U_n) de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ définis par:

$$U_n = \left(\begin{array}{c} u_{n+1} \\ u_n \end{array} \right)$$

4. Montrer que la suite des vecteurs U_n vérifie la récurrence suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = \left(\begin{array}{c} b \\ a \end{array} \right) \\ \forall\, n,\ U_{n+1} = D\, U_n. \end{array} \right.$$

En déduire que pour tout n, $U_n = D^n\, U_0$.

5. Utiliser les résultats précedents pour calculer la valeur de u_n pour chacune des conditions initiales suivantes:

   i. $a = 1$, $b = -1$

   ii. $a = 1$, $b = 2$

   iii. $a = 2$, $b = 1$