Deuxième devoir surveillé
Mardi 5 décembre 2006

Les calculatrices sont interdites, ainsi que les documents personnels. L'énoncé comporte deux pages. Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (2 points) Pour quelles valeurs du nombre réel x la série de terme général e^{nx} est-elle convergente ?

Exercice 2. (3 points) Soit a un nombre complexe non nul. Déterminer, selon la valeur de a, la nature des séries de termes généraux suivants :

$$u_n = n!\, a^n \; ; \quad v_n = n(n+1)a^n \, .$$

Exercice 3. (4 points) Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants :

$$a_n = \frac{2^n + 3^n}{\log n + 5^n} \; ; \quad b_n = \frac{n!}{2n+1} \; ; \quad c_n = \frac{n \sin \frac{1}{n}}{(n^3+1)^{\frac{1}{3}}} \, .$$

Exercice 4. (6 points) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On suppose qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. En étudiant la suite des sommes partielles $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, montrer que la *série* de terme général a_n converge si et seulement si la *suite* u_n converge.
2. On suppose que la suite u_n converge, et l'on définit $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. Exprimer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ à l'aide de ℓ.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer la nature des séries de termes généraux suivants et dans les cas de convergence calculer la somme de la série.

$$(i) \qquad a_n = \frac{1}{n(n+1)} \, , \quad n \geq 1;$$

$$(ii) \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

Exercice 5. (3 points) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1. Montrer que si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors il en est de même pour la série de terme général u_n^2.

2. Donner l'exemple d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général u_n converge mais pas la série de terme général u_n^2.

Exercice 6. (2 points) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\, dt$ est absolument convergente.