MP3 2007-2008 Université Paris 7
Denis Diderot

Exercices d'analyse , supplément 1

I- Pour un nombre réel α, on écrit $\cos\alpha$ en utilisant la formule de Taylor:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \ldots + (-1)^N \frac{\alpha^{2N}}{(2N)!} + R_N(\alpha) \ .$$

1) A l'aide d'une expression convenable du reste $R_N(\alpha)$, montrer qu'on a

$$\lim_{N\to+\infty} R_N(\alpha) = 0 \ .$$

2) En déduire que la série de terme général

$$(-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$$

est convergente et que sa somme est égale à $\cos\alpha$.

3) Application numérique: calcul de $\cos 1$ avec une erreur inférieure à 10^{-4}.

II- Discuter en fonction du paramètre $q > 0$ la nature de la série de terme général

$$\frac{q^n}{(1+q^n)^2} \ .$$

III- Discuter en fonction du paramètre réel a la nature de la série de terme général

$$(n^4 + 2n^2)^{1/4} - (n^3 + an)^{1/3} \ .$$

Indication: utiliser un développement limité au voisinage de $+\infty$ de la fonction

$$f(x) = (x^4 + 2x^2)^{1/4} - (x^3 + ax)^{1/3} \ .$$

IV- Discuter en fonction des paramètres $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ la nature de la série (dite de *Bertrand*) de terme général

$$\frac{1}{n^\alpha \log^\beta n} \ (n \geq 2) \ .$$

(Indications: (i) pour $\alpha \neq 1$, on comparera avec une série de Riemann d'exposant judicieusement choisi; (ii) pour $\alpha = 1$, on montrera que la série est de même nature que l'intégrale impropre

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\log^\beta t} dt \ ).$$

V- Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1) Montrer que, si la série de terme général u_n est *absolument* convergente, il en est de même pour la série de terme général u_n^2.

2) Donner l'exemple d'une suite (u_n) telle que la série de terme général u_n soit convergente mais pas la série de terme général u_n^2.

VI- Soit (u_n) une suite de nombres positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n et

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$$

sont de même nature.

VII- Etudier les séries (alternées) de termes généraux

$$\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}-1 \ , \ \frac{(-1)^n}{n^{2/3}+\cos n} \ , \ \log\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}} \ (a \in \mathbf{R}) \ , \ \frac{(-1)^n}{n^{1+(1/n)}} \ .$$

VIII- On pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \ .$$

1) Montrer qu'on a $u_n \sim v_n \ (n \to +\infty)$, où v_n est le terme général d'une série convergente.

2) Considérer la série de terme général

$$u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ ;$$

en déduire que la série de terme général u_n est divergente.

Quelle "morale" tirer de cet exercice?