MP3 2007-2008 Université Paris 7
Denis Diderot

Exercices d'algèbre, supplément

I On considère la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 3m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $\det A$

2) On se donne une base de $\mathbb{R}^4$ et l'application linéaire f_m dont la matrice dans cette base est A_m. Donner suivant les valeurs de m le rang de f_m et la dimension de son noyau.

II Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, x$ de nombres réels.
On considère le déterminant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & \ldots & a_n \\ -1 & x & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \ldots & \ldots & & & & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

1) Montrer que $D_n = a_1 x^{n-1} + D_{n-1}$ où D_{n-1} se déduit de D_n en supprimant la première colonne et la deuxième ligne.

2) Calculer D_n par récurrence.

III Déterminer suivant les valeurs de m le rang de la matrice :

$$\begin{pmatrix} m & 2 & 5 & -3m+2 & 7m-10 \\ 0 & 1 & 2 & -m+1 & 3m-4 \\ 0 & 0 & m & -m^2 & m^2-m \\ 2m & 2 & 0 & m+1 & m \\ m & 0 & 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

IV Soit $n \geq 2$ un entier. Calculer le déterminant de la (n, n) matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b & \ldots & \ldots & b \\ b & a & b & \ldots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ b & \ldots & \ldots & b & a \end{pmatrix}$$

Pour le début du calcul, remplacer la première colonne de la matrice par la somme des colonnes.
En déduire suivant les valeurs de a, b le rang de la matrice. On pourra montrer que, pour $p \geq 2$ et une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $\mathbb{R}^p$, les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ sont indépendants s'il en est ainsi de leurs projections sur le sous-espace engendré par les vecteurs $e_2, \ldots, e_p$.

V On vérifiera que chacune des matrices suivantes est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et, pour chacune d'elle, on calculera des vecteurs propres:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -31 & 109 & -45 \\ -8 & 29 & -12 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 6 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

(Ne pas vous affoler sur la seconde: son polynôme caractéristique est *très* simple!).

VI 1) Soient u et v des endomorphismes de $\mathbf{C}^n$ tels que

$$u \circ v = v \circ u \ .$$

Montrer que les sous-espaces propres de u sont stables par v .

2) Soient u, v, u_1, v_1 les endomorphismes de $\mathbf{C}^3$ ayant respectivement pour matrices

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad V = \begin{pmatrix} 0 & b & a \\ a & 0 & b \\ b & a & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -10 & 8 & 4 \\ 15 & -\frac{15}{2} & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad V_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & 1 \\ 14 & -7 & -6 \\ -25 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

(a et b sont des nombres complexes donnés).

a) Montrer les égalités $u \circ v = v \circ u$,$u_1 \circ v_1 = v_1 \circ u_1$.

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u et de u_1. En déduire que u et u_1 sont diagonalisables.

c) *Sans calculer son polynôme caractéristique* , montrer que v est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

d) Vérifier que v_1 n'est pas diagonalisable!

VII Soient f un endomorphisme d'un espace vectoriel E , de dimension finie, sur un corps $\mathbf{K}$, et $P \in \mathbf{K}[X]$.

1) Soit v un vecteur propre de f . Montrer que v est un vecteur propre de $P(f)$.

2) Montrer que, si f est diagonalisable, il en est de même pour $P(f)$.

3) Montrer que, si f est triangularisable, il en est de même pour $P(f)$.

4) On suppose $\mathbf{K} = \mathbb{C}$. A l'aide de la question précédente, montrer que toutes les valeurs propres de $P(f)$ sont de la forme $P(\lambda)$, où λ est une valeur propre de f.

5) Trouver un endomorphisme f de $\mathbf{R}^2$, n'ayant pas de valeur propre, tel que f^2 soit diagonalisable.

VIII Soient A une matrice carrée d'ordre n et P son polynôme caractéristique. On suppose $P(0) \neq 0$.

1) Montrer que A est inversible.

2) Soit R le polynôme caractéristique de A^{-1} . Montrer qu'on a

$$R(\lambda) = (-1)^n P(0)^{-1} \lambda^n P(\frac{1}{\lambda}) \ .$$