Université Denis Diderot (Paris VII) **2007-2008**
MP3

Feuille 1
Algèbre linéaire : Déterminants,
Diagonalisation, Trigonalisation

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants :

(1) en dim 2
$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

(2) en dim 3
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 9 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 & -1+\alpha \\ -1-2\alpha & 3 & -1+2\alpha \\ -1-\alpha & 1 & 1+\alpha \end{vmatrix}.$$
On exprimera ce dernier en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 2. Déterminant de Vandermonde. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x_0, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ le déterminant suivant :
$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$
On pourra commencer par $n = 1, 2$, et ensuite effectuer le calcul par récurrence sur n.

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$.

(2) Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}$ est-il inversible ?

(3) Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et une base de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$. Quelles sont les dimensions de ces sous-espaces ? Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

(4) Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f + \mathrm{id})$? Donner une base de ce sous-espace et montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(f + \mathrm{id})$.

(5) Ecrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition
$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}).$$

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la formule :
$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \quad f(x, y, z) = (2y + z, x - y - z, 2x - z).$$

(1) Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant de A.
Quel est le rang de f ?

(2) On pose $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, -1, 2)$ et $w = (-1, 1, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice B de f dans cette base.

(3) Donner une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = B$.
Calculer P^{-1} et vérifier la formule $P^{-1}AP = B$.

Exercice 5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que 1 est valeur propre de f.

(2) Notons P le sous-espace propre de $\mathbb{R}^3$ pour la valeur propre 1.

  (a) Quelle est la dimension de P ?

  (b) Trouver une équation de P.

(3) Considérons les vecteurs $u_1 = (3, -2, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (-1, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

  (a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

  (b) Quelle est la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3).

(4) Calculer le polynôme caractéristique de f.

(5) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 12 & 11 & 5 \\ -10 & -9 & -4 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer le polynôme caractéristique de f.

(2) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

(3) Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f. Posons $v = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que $(v, f(v), f^2(v))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de f dans cette base.

(4) Quel est le rang de f ?

(5) Trouver une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de f.

(2) Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & 3 \\ -1 & -16 & 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de f et dresser son tableau de variation.

(2) Montrer que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit m un nombre réel. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & m+1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & -m-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de f.
(2) On suppose $m \neq 2$ et $m \neq -1$. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.
(3) On suppose $m = 2$.
    (a) Quelles sont les valeurs propres de f ?
    (b) Montrer que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.
(4) On suppose $m = -1$.
    (a) Quelles sont les valeurs propres de f ?
    (b) Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.
    (c) Trouver une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
    (d) Quelle est la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) ?

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ -1 & 1 & a-1 \\ a-1 & 0 & 2a \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que 1 est valeur propre de A.
(2) Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 1$.

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathbb{C}$. On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer les valeurs propres de f.
(2) Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f, et écrire la matrice de f dans cette base.
(3) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
(2) L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
(3) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est triangulaire supérieure.
(4) Calculer $(A - 2I_3)^2$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. Soient a un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3a \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de f. Montrer que 1 est valeur propre de f.

(2) On suppose que $a \neq 1$.
   (a) Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 1$.
   (b) Lorsque $a > 1$, l'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
(3) On suppose que $a = 1$.
   (a) Trouver une base de chaque sous-espace propre.
   (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   (c) Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
   (d) Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant les deux propriétés suivantes :
– la seule valeur propre de f est 1,
– le sous-espace propre $P = E_1(f)$ est de dimension 2.

(1) Soit u un vecteur quelconque de P. Que vaut $f(u)$?
(2) Soit (u_1, u_2) une base de P et u_3 un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à P.
   (a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \text{où } a,\ b,\ c \text{ sont des nombres réels.}$$
   (c) Exprimer le polynôme caractéristique de f à l'aide de c. En déduire que $c = 1$.
(3) Montrer que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.
(4) Soit v_3 un vecteur n'appartenant pas à P. On pose $v_2 = f(v_3) - v_3$.
   (a) Montrer que le vecteur v_2 est non nul et appartient à P.
   (b) Montrer qu'il existe un vecteur $v_1 \in P$ tel que (v_1, v_2, v_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Quelle est la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) ?

Exercice 15. Soit n un entier positif, et soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

(1) Soit P un élément de E. Montrer que $(X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P' \in E$.
(2) Soit f l'application de E définie par $f(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E, et écrire sa matrice dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$.
   (b) Déterminer les valeurs propres de f.

Exercice 16. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
(2) Trouver une matrice inversible $P \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.
(3) Calculer A^n pour tout entier naturel n.
(4) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites (u_n) à termes réels telles que
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_n + \tfrac{3}{2}\, u_{n+1}.$$

(a) Soit (u_n) une suite à termes réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \binom{u_n}{u_{n+1}}$. Montrer que (u_n) appartient à E si et seulement si $X_{n+1} = AX_n$ pour tout n.

(b) Quelle est la dimension de E ? Trouver une base de E.

(c) Soit F le sous-espace vectoriel de E formé des suites $(u_n) \in E$ telles que la série $(\sum u_n)$ est convergente. Quelle est la dimension de F ?

Exercice 17. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites (u_n) de nombres réels telles que

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(1) Montrer que la matrice A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

(2) Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

(3) Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de a les suites des coefficients de la matrice A^n sont-elles bornées ? convergentes ?

(4) Trouver une base du sous-espace vectoriel F des suites bornées de E.

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Cherchons les matrices $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $B^3 = A$.

(1) Déterminer les valeurs propres de A et une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

(2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique, et $g \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^3 = f$. Montrer que $g \circ f = f \circ g$. En déduire que les vecteurs propres de f sont aussi des vecteurs propres pour g. Quelles possibilités a-t-on pour les valeurs propres associées ?

(3) Résoudre l'équation $B^3 = A$ dans $M_n(\mathbb{C})$. Calculer la somme et le produit des solutions.