Université Paris 7 — janvier 2008
L3 Maths-Info — TD Analyse

TD 2 - Topologie

Espaces vectoriels normés et espaces métriques

Exercice 1

1. Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|(x,y)\| = \max(|x+y|, |x-2y|)$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme et dessiner sa boule unité fermée.
2. Soient p et q deux normes sur E et B_p et B_q leur boules unités fermées. Montrer que :

$$B_q \subset B_p \Longleftrightarrow p \leq q.$$

3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Montrer que la boule fermée $\bar{B}(a,r)$ est l'adhérence de la boule ouverte $\mathring{B}(a,r)$.
4. Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $\mathring{B}(a,r)$ ne coïncide pas nécessairement avec la boule fermée $\bar{B}(a,r)$.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les deux applications :

$$\begin{aligned} n(x,y) &= \sup_{t\in[0,1]} |x+ty| \\ m(x,y) &= \int_0^1 |x+ty|dt \end{aligned}$$

1. Montrer que n et m définissent des normes sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner les boules unités fermées pour n et m et montrer que ces deux normes sont équivalentes.

Exercice 3

1. On considère dans $\mathbb{R}^2$ les 4 boules euclidiennes fermées de rayon 1 et centrées aux points $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$. Leur réunion A contient 0 comme point intérieur. Trouver le rayon de la plus grande boule ouverte centrée en 0 et contenue dans A.
2. On se pose plus généralement le problème dans $\mathbb{R}^n$: A désigne la réunion des boules fermées $\cup_j \bar{B}(e_j,1) \cup \bar{B}(-e_j,1)$ où $(e_j)_j$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que : $x \in A \Leftrightarrow \|x\|_2^2 \leq 2\|x\|_\infty$. En déduire que le rayon de la plus grande boule ouverte centrée en 0 et contenue dans A est $2/\sqrt{n}$.

Exercice 4

Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est une intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 5

Si A est une partie bornée d'un espace métrique (E,d), on pose $\mathrm{diam}(A) = \sup_{a,b\in A} d(a,b)$.
1. Montrer que $\mathrm{diam}(\bar{A}) = \mathrm{diam}(A)$.
2. Trouver le diamètre de $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) \ : \ 0 \leq f \leq 1\}$ et de $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) \ : \ 0 \leq f \leq 1, \ f(0) = 0\}$, $\mathcal{C}([0,1])$ étant muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 6

1. Soit E un espace vectoriel réel et $N\ :\ E \to \mathbb{R}_+$ une application vérifiant :

$$N(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0, \quad \forall\, x, \lambda \ \ N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \quad B = \{x\ :\ N(x) \leq 1\} \text{ est convexe}$$

Montrer que N est une norme sur E.

2. On suppose de plus E de dimension finie. Soit $K \subset E$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

   i. K est un compact convexe symétrique par rapport à 0 et tel que $0 \in \mathring{K}$,

   ii. il existe une norme N pour laquelle K est la boule unitée fermée.

Exercice 7

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. Pour $g \in E$ fixée, on définit $N_g(f) = \|fg\|_\infty$

1. Condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Dans ce cas, à quelle condition sur g, N_g et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Continuité

Exercice 8

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la métrique $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ puis de la métrique $d(f,g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$. Montrer que l'application $f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$ de E dans $\mathbb{R}$ est continue dans les deux cas.

Exercice 9

Soit X l'espace des suites réelles convergentes muni de la métrique $d(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$. Si on note $l(x)$ la limite de la suite x, montrer que l est continue de X dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10

On note pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\phi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$.

1. Montrer que la fonction ϕ est continue, 1-périodique et étudier la fonction :

$$f(x) = \sum_n \frac{\phi(2^n x)}{2^n}.$$

2. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on considère les suites :

$$z_k = \frac{1}{2^k} E(2^k x_0),\ y_k = z_k + \frac{1}{2^k}.$$

Montrer que z_k croît vers x_0 et que y_k decroît vers x_0. Calculer $\dfrac{f(z_k) - f(y_k)}{z_k - y_k}$ et en déduire que f n'est pas dérivable en x_0.

On a ainsi construit une fontion continue, nulle part dérivable.

Convergence des suites

Exercice 11

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que e^{iu_n} et $e^{i\sqrt{2}u_n}$ convergent. Montrer que (u_n) a au plus une valeur d'adhérence.

2. Soit (u_n) une suite réelle telle que e^{itu_n} converge pour tout $t \in T$ où T est non dénombrable. Montrer que (u_n) a au plus une valeur d'adhérence.

Exercice 12

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite d'un espace métrique (X,d). On suppose que $\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = a_m$ et que $\lim_{m\to\infty} a_m = a$. Montrer qu'il existe une sous-suite (a_{p,n_p}) telle que $\lim_{p\to\infty} a_{p,n_p} = a$.

Exercice 13

On souhaite montrer que les polynômes sont denses dans l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que la suite de polynômes définie par récurrence :

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t^2 - p_n^2(t)), \quad p_0(t) = 0,$$

converge uniformément vers $|t|$ sur $[-1,1]$.

2. En déduire que toute fonction affine par morceaux sur $[-1,1]$ est limite d'une suite de polynômes.

3. Conclure.

Compacité

Exercice 14

On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant égal à 1. Est-il compact ? On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales ($A^T.A = I$); montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Exercice 15

Soit (X,d) un espace métrique.

1. Soit A une partie compacte de X; montrer qu'il existe $x, y \in A$ tels que $\mathrm{diam}(A) = d(x,y)$.

2. Soient A et B deux parties compactes disjointes. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $d(a,b) \geq \delta$ pour tout $(a,b) \in A \times B$.

3. Montrer que le résultat reste vrai si l'une des parties est compacte et l'autre fermée, mais devient faux si les deux parties sont seulement fermées.

Exercice 16

Soit f une application de X dans Y, espaces métriques, et G le graphe de f. Si f est continue, montrer que G est fermé dans $X \times Y$. Montrer la réciproque lorsque Y est compact.

Exercice 17

Soit X un espace métrique, Y un espace métrique compact et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une application continue telle que, pour tout $x \in X$, l'équation $f(x,y) = 0$ ait une unique solution $y = u(x) \in Y$. Montrer que l'application $u : x \in X \mapsto y = u(x) \in Y$ ainsi définie est continue.

Exercice 18

Soit E l'ensemble des suites $x = (x_1, x_2, \ldots)$ où $x_i \in \{0,1\}$. Si $x, y \in E$, on pose :

$$d(x,y) = \sup_{k\geq 1} \frac{1}{k}|x_k - y_k|.$$

1. Montrer que d est une distance sur E.

2. Soit $\epsilon > 0$; montrer qu'il existe une partie finie E_ϵ de E qui possède la propriété suivante : les boules fermées de rayon ϵ centreées en un point de E_ϵ recouvrent E.

3. Montrer que E est compact.

Exercice 19

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Elle est dite *propre* si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est un compact.

1. Montrer que, si f est propre, alors l'image par f de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.
2. Établir l'équivalence suivante : l'application f est propre si et seulement si elle a la propriété :

$$\|f(x)\| \to \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \to \infty.$$

Complétude

Exercice 20
L'espace $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet si d est l'une des métriques suivantes ?

1. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$.
2. $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)|$.
3. $d(x,y) = \log(1 + |x-y|)$.

Exercice 21
Soit X l'espace des suites réeles nulles à partir d'un certain rang, et soit :

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \quad \text{pour } x, y \in X.$$

1. Montrer que X n'est pas complet pour la métrique ρ.
2. Trouver un espace de suites Y tel que (Y, ρ) soit complet et que X soit dense dans Y.
3. Que donne l'exercice si on remplace ρ par la norme uniforme ?

Exercice 22
Montrer que l'espace $\mathcal{C}([0,1])$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 23
Soient E un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(E)$ et $s, t \in \mathbb{R}$.

1. On rappelle que $e^{tA} = \sum_0^\infty \frac{t^n A^n}{n!} \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\|e^{tA} \leq e^{|t|\|A\|}\|$ et que $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$.
2. Soit $u_0 \in E$ et u la fonction vectorielle de variable réelle définie par $u(t) = e^{tA}u_0$. Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 24
Pour tout $k > 0$ on note H_k le sous-espace de $\mathcal{C}([0,1])$ constitué des fonctions lipschitziennes de constante k ie vérifiant $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pour tous x et y dans $[0,1]$. On pose $H = \bigcup_{k>0} H_k$.

1. Montrer que $\mathcal{C}^1([0,1]) \subset H$, mais que la fonction $\sqrt{x}$ n'est pas dans H.
2. Montrer que pour tout $k > 0$, H_k est un espace de Banach pour la norme uniforme. H est-il également un Banach ?
3. On pose :
$$\|f\| = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} + |f(0)|.$$
Montrer que $(H, \|\cdot\|)$ est un Banach.

Exercice 25
Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est un espace de Banach si et seulement si toute série de E absolument convergente est convergente.

Théorème du point fixe

Exercice 26

1. Soit X un espace métrique et (f_n) une suite d'applications continues à valeurs dans un espace métrique Y, convergeant vers f uniformément sur X. Montrer que si (x_n) est une suite de points de X convergeant vers $x \in X$, alors $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$.

2. Application : soit X un espace métrique compact, et soit (f_n) une suite d'applications continues de X dans X, ayant chacune un point fixe ; on suppose que la suite (f_n) converge vers une fonction f uniformément sur X. Montrer que f a aussi un point fixe.

3. Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue de K dans K vérifiant :
$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|.$$
En considérant les fonctions f_n défines par $f_n(x) = \frac{1}{n}f(x_0)+(1-\frac{1}{n})f(x)$, où $x_0 \in K$, montrer que f a un point fixe. Est-il unique ? Que se passe-t-il si K n'est plus convexe ?

Exercice 27

Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}([0,1])$ qui est un point fixe de l'opérateur T donné par :
$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2)dt.$$
On pourra commencer par établir que $T \circ T$ est une contraction.
Montrer alors l'existence d'une fonction unique $f \in \mathcal{C}([0,1])$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$.

Espaces $\ell^p(\mathbb{N})$

Exercice 28

Soit E le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des suites complexes bornées et indexées par $\mathbb{N}^*$. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E$ on définit $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|$ et $N(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{|x_n|}{n}$.

1. Montrer que N est une norme sur E. N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

2. Soit F le sous-espace vectoriel de E formé des suites convergeant vers 0. F est-il fermé pour $\|\cdot\|_\infty$? Pour N ?

3. Montrer que F est dense dans E pour la norme N.

Exercice 29

Soit $E = \ell^1(\mathbb{N})$ muni de la norme : $\|u\| = \sum |u_n|$

1. Montrer que E est complet.

2. Si $u, v \in E$ on dit que $u \prec v$ si $\forall\ n,\ u_n \leq v_n$. Soit une suite croissante majorée d'éléments de E ; converge-t-elle ?

3. Soient $a, b \in E$ telles que $a \prec b$. On note $X = \{x \in E \mid a \prec x \prec b\}$. Montrer que X est compact.

Topologie et matrices

Exercice 30
Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 31
Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont toutes distinctes est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Continuité uniforme

Exercice 32
1. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Montrer que $f : X \to Y$ n'est pas uniformément continue ssi il existe $\epsilon > 0$ et (x_n) et (y_n) deux suites de X tels $d(x_n, y_n) \to 0$ et $\delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$.
2. Parmi les fonctions numériques suivantes, lesquelles sont uniformément continues ?

(i) $x \mapsto \sin x^2$

(ii) $x \mapsto x \sin x$

(iii) $x \mapsto, \sin \frac{1}{x},\ x \neq 0$

Exercice 33
Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si f est uniformément continue alors elle est bornée. Réciproque ?

Exercice 34
Théorème de Dini. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers f continue. Montrer que la convergence est continue.