Université Denis Diderot (Paris VII) **2006-2007**
MP 3

Feuille 2
Suites et séries numériques

Exercice 1. Indiquer avec une brève justification si chacun des énoncés suivants est vrai pour deux suites de réels $U = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

1. Si U est croissante et convergente, elle est majorée.
2. Si U est majorée et convergente, elle est croissante.
3. Si U est décroissante et positive, elle converge.
4. Si U est croissante et non majorée , elle diverge.
5. Si U et V sont divergentes, $U + V$ est divergente.
6. Si U est convergente et V divergente, $U + V$ est divergente.
7. Si U est convergente et V divergente, UV est divergente.
8. Si U tend vers 0, UV tend vers 0.

Exercice 2. On veut montrer de plusieurs manières différentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ ne converge pas dans $\mathbf{R}$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy et conclure.
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2^n+(2^n-1)}$.
   - Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, v_n > \dfrac{1}{2}$.
   - En remarquant que $2^n + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$, montrer que $u_{2^{n+1}-1} = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et conclure.
3. Comparer u_n à une intégrale.

Exercice 3. On considère les deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

1. Montrer que :
   (a) la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante ;
   (b) la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante ;
   (c) pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$;
   (d) $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

   En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont convergentes et de même limite. Cette limite est le nombre réel e.

2. Montrer que pour tout entier $n > 0$ il existe un unique nombre réel θ_n vérifiant $0 < \theta_n < 1$ et tel que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n.n!}. \tag{1}$$

3. Montrer que e est irrationnel (on montrera que la formule (1) n'est pas possible si $e = \frac{p}{q}$ avec p et q dans $\mathbf{N}^*$.

Exercice 4. [Moyenne de Cesaro] Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite tendant vers l (avec l un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).

1. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$. Montrer que la réciproque n'est pas vraie en général, mais est vraie lorsque u_n est monotone.
2. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $w_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} ku_k$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{l}{2}$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs, telle que la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite l. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Exercice 6. Soit f une fonction positive décroissante et continue sur $[1, +\infty[$ et

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée.
En déduire la convergence de la suite $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$.

Exercice 7. Montrer que si la fonction g est continue positive et décroissante sur $]0, +\infty[$, alors on a :

$$\int_1^{n+1} g(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} g(k) \leq g(1) + \int_1^n g(x)dx.$$

En déduire le comportement de la suite définie par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 8. Soit u_n une suite décroissante positive convergeant vers 0. On pose $v_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n$.
Soient p et k deux entiers. Montrer que $u_p \geq u_p - u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + (-1)^k u_{p+k} \geq 0$.
En déduire que la suite v_n est de Cauchy.

Exercice 9. Etudier les suites $u_n, n \in \mathbf{N}$ et $v_n, n \in \mathbf{N}$ définies par u_0, v_0 $(0 < u_0 < v_0)$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Exercice 10. Etudier les suites définies par

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$;
2. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$;
3. $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$;
4. $u_0 = 1/3$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 - u_n}{3} \exp(u_n)$.

Exercice 11. Etudier la nature des séries dont voici le terme général

1) $\frac{1}{n \log n}$	2) $\frac{1+\log n}{n^2}$	3) $\frac{2^n+5}{3^n-11}$	4) $\frac{n+\ln n}{n^2+1}$
5) $n^{\ln(a)}$ $(a > 0)$	6) $e^{-\sqrt{n}}$	7) $n^2 \sin(\frac{1}{2^n})$	8) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$
9) $\frac{(n!)^3}{(3n)!}$	10) $\left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$	11) $\frac{(n+1)^4}{n!+1}$	12) $\frac{1!+\cdots(n-}{n!}$
13) $\frac{1!+\cdots(n-2)!}{n!}$	14) $\frac{1}{(1+n)^\alpha} \ln(\cos(\frac{1}{n}))$ $(\alpha > 0)$	15) $n^{(n^{-k})} - 1$ $(k \in \mathbf{R})$	16) $n^{\frac{1}{1+n^2}} -$
17) $n.n^{\frac{1}{n}}$	18) $n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x > 0)$	19) $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$	20) $\frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$
21) $(n^6 + 3)^a - (n^2 + 2)^{3a}$ $(a \in \mathbf{R})$	22) $n^2 e^{-\sqrt{n}}$	23) $\frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$	$(a > 0, \alpha \in$

Exercice 12. Soit α un nombre réel. Pour tout entier strictement positif n, on pose

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}\ ,\ v_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{2}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha}.$$

1. Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) est-elle convergente ?
2. Pour quelles valeurs de α la série de terme général v_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.
3. Pour quelles valeurs de α la série de terme général w_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

Exercice 13. Pour tout entier positif n, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ et $v_n = \dfrac{3}{(6n+1)(6n+4)}$.

1. Montrer que la série de terme général v_n est convergente.
2. Calculer $u_{2n} + u_{2n+1}$ pour $n \in \mathbf{N}$.
3. Montrer que la série de terme général u_n est convergente et que $\displaystyle\sum_0^{+\infty} u_n = \sum_0^{+\infty} v_n$.

Exercice 14. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbf{R}_+^*$ la série de terme général $u_n = \dfrac{\cosh(n)}{a^n}$ converge-t-elle ?

Exercice 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ et $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$.

1. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général v_n est convergente.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 - v_k) = \frac{u_0}{S_n}$.
3. On suppose que la série de terme général v_n est convergente.
   (a) Quelle est la nature de la série de terme général $\log(1 - v_n)$?
   (b) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 16. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Pour quelles valeurs de a et b la série de terme général $\dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$ converge-t-elle ?

Exercice 17. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $v_n = u_n - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série de terme général v_n est divergente.
2. La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Exercice 18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres complexes. On pose, pour $n > 0$, $v_n = u_n + u_{n+1} + \cdots u_{2n}$.

1. On suppose que $u_n = a^n$, avec $a \in \mathbf{C}$.
   (a) Montrer que la série de terme général u_n et la série de terme général v_n sont de même nature.
   (b) Si la série de terme général v_n est convergente, calculer sa somme.
2. On suppose que $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que la série de terme général v_n est convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 19. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? lesquelles sont fausses ? Justifier la réponse.

1. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 0, alors la série de terme général u_n est convergente.
2. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général $\sqrt{u_n}$ est convergente.

4. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général ${u_n}^2$ est convergente.
5. Si $\lim_{n\to+\infty}((-1)^n n u_n) = 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.
6. Si $\lim_{n\to+\infty}((-1)^n n^2 u_n) = 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 20. Démontrer, à l'aide d'un développement limité, que la suite de terme général u_n est convergente, avec $u_n = \sin(n\pi + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2})$.

Exercice 21. Etudier, en fonction du paramètre $\alpha > 0$, la convergence des séries de terme général :

$$(a)\quad n^{2-\alpha}\cos(\frac{1}{n})\,;\ (b)\quad \alpha^{\frac{n+\sqrt{\ln n}}{2}}\,;\ (c)\quad \frac{(-\alpha)^n}{\ln n}.$$

Exercice 22. Soit f une fonction de classe C^2 sur $[-1, 1]$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = f''(0) = 1$. Etudier les séries de terme général

$$(a)\quad f(\frac{1}{n})\,;\ (b)\quad f(\frac{1}{n^2})\,;\ (c)\quad f(\frac{(-1)^n}{n})\,;\ (d)\quad f(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})\ \text{(ici } f \text{ est de classe } C^3\text{)}.$$

Exercice 23. Former le produit des séries de terme général u_n et v_n où

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 24. Soit u_n une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. On pose $v_n = \dfrac{1}{1+n^2u_n}$.
Montrer, en raisonnant par l'absurde, que la série de terme général v_n est divergente.

Exercice 25. [Ordre des termes] Soient $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et σ l'application de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ définie par

$$\forall p \in \mathbf{N}^*,\ \sigma(3p-2) = 2p-1\ ;\ \sigma(3p-1) = 4p-2\ ;\ \sigma(3p) = 4p.$$

1. Montrer que σ est une bijection.
2. Comparer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

Exercice 26. Calculer, si elles existent, les sommes des séries de terme général

$$(a)\quad \frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}\ (n>0)\,;\ (b)\quad \ln(1-\frac{1}{n^2})\ (n>1)\,;\ (c)\quad \arctan(\frac{1}{2n^2})\ (n>0).$$

Exercice 27. Etudier la nature des series dont voici le terme général

1) $\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$ 2) $(-1)^n \frac{1+n}{n}$ 3) $\frac{(-1)^n}{n^2+\ln n}$ 4) $\frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ $(\theta \in \mathbf{R})$

5) $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ 6) $\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 7) $\frac{(-1)^n}{2n+\cos(n\pi)}$ 8) $\frac{n+3}{(-1)^n\sqrt{n}-3n}$

9) $(-1)^n \cosh(\frac{1}{n}) \sin(\frac{1}{n})$ 10) $\ln\left(n \cosh(\frac{1}{n}) \sin(\frac{1}{n})\right)$ 11) $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$ 12) $\left(\frac{1+n(2-i)}{n(3-2i)-3i}\right)^n$