ANALYSE NON LINÉAIRE

Raphaël Danchin et Isabelle Gallagher

July 12, 2006

Contents

Introduction

La plupart des systèmes physiques se modélisent par des équations aux dérivées partielles non linéaires. L'objectif de ce cours est d'introduire des techniques d'analyse permettant d'étudier et de résoudre de telles équations.

Afin de mettre en application ces techniques sur un système issu de la physique, nous avons choisi d'étudier de manière détaillée les équations de **Navier-Stokes** incompressibles. Ces équations s'écrivent

$$(NS_\nu) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v & = & -\nabla p \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \operatorname{div} v & = & 0 \\ v_{|\partial\Omega} & = & 0 \end{array} \right.$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ (ou plus généralement de $\mathbb{R}^d$) simplement connexe et fixé une fois pour toutes. Ici, $\Delta = \sum_{j=1}^{d} \partial^2_{x_j}$, $v \cdot \nabla = \sum_{j=1}^{d} v^j \partial_{x_j}$ et $\operatorname{div} v = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} v^j$. On doit interpréter $v = (v^1, \ldots, v^d)$ comme le champ des vitesses et p comme la pression. Le paramètre réel strictement positif ν est la viscosité du fluide.

Le système (NS_ν) est une équation d'évolution, c'est-à-dire qu'une variable (à savoir t le temps) y joue un rôle particulier. Pour espérer pouvoir résoudre ce système, il faut de plus se donner un champ de vitesses initial v_0 et l'on se limitera à la recherche des solutions v de (NS_ν) telles que $v_{|t=0} = v_0$.

Comme premier modèle de telles équations, nous allons revoir brièvement la théorie des équations différentielles ordinaires.

Les deux chapitres suivants présentent des outils fondamentaux pour la résolution d'EDP (linéaires et non linéaires) : compacité, notions de convergence, transformée de Fourier, ainsi que des espaces fonctionnels classiques tels que les espaces de Lebesgue ou de Sobolev.

Les trois chapitres suivants sont dévolus à l'étude spécifique des équations de Navier-Stokes. Les techniques employées pour ce système sont bien entendu transposables à de nombreux autres modèles de la physique.

Le dernier chapitre enfin concerne un outil fondamental de l'analyse non linéaire : la théorie de Littlewood-Paley et le calcul paradifférentiel.

0.1 Présentation du système de Navier Stokes

Ce paragraphe est une brève présentation des équations de Navier Stokes. Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé aux divers cours de mécanique des milieux continus et de mécanique des fluides.

Les équations de Navier Stokes incompressibles décrivent l'évolution temporelle d'un fluide incompressible dans un domaine fixe Ω de $\mathbb{R}^d$. Ce fluide peut être de l'eau, ou de l'air (si la vitesse de l'écoulement reste petite devant la vitesse du son). Diverses variantes de ces équations se retrouvent en météorologie, océanographie, magnétohydrodynamique ...

Décrivons maintenant ces équations. La densité du fluide est supposée être une constante indépendante du temps et de l'espace. La vitesse de l'écoulement est donnée par le champ de vecteur $v(t, x)$ qui dépend du temps et de l'espace, et qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ suivant que l'on étudie un écoulement bidimensionnel ou tridimensionnel.

Comme la densité du fluide est constante, la divergence du champ de vitesse est nulle, ce qui conduit à

$$\operatorname{div} v = 0.$$

D'autre part une particule de fluide subit

- une force de frottement due à la viscosité du fluide, modélisée dans notre cas par

$$\nu \Delta v$$

  où ν est la viscosité du fluide considéré,

- une force de pression, qui s'écrit

$$-\nabla p$$

  où $p(t, x)$ est la pression qui règne dans le fluide.

L'accélération de la particule de fluide considérée est alors

$$\frac{Dv}{Dt} = \nu \Delta v - \nabla p$$

où Dv/Dt est la dérivée particulaire, ce qui donne

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v = -\nabla p.$$

À noter qu'il n'existe pas d'expression simple et utilisable de $\partial_t p$. La pression est en quelque sorte définie implicitement par la contrainte $\operatorname{div} v = 0$ et "s'adapte" pour que l'on ait en permanence $\operatorname{div} v = 0$. En particulier la pression est une inconnue du système au même titre que v.

Ces équations doivent être complétées par

- une donnée initiale: valeur de v à $t = 0$,
- une donnée au bord: valeur de v sur le bord de Ω. Ici on supposera que le fluide adhère à la paroi. Par conséquent $v = 0$ sur le bord de Ω.

Malgré la simplicité apparente de ces équations, leur étude mathématique est loin d'être totalement achevée. Si en dimension 2 on dispose d'une bonne théorie d'existence et d'unicité de solutions régulières, le cas de la dimension 3 reste essentiellement ouvert, et de nombreuses choses restent à comprendre!

0.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

En guise d'échauffement, nous présentons un premier résultat relatif aux équations différentielles ordinaires: le théorème de Cauchy-Lipschitz. Comme nous allons le voir, sa preuve repose sur le théorème de point fixe de Picard.

Théorème 0.2.1 (Cauchy-Lipschitz). *Soient ω un ouvert d'un espace de Banach E et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction F de $I \times \omega$ telle que*

$$\forall x \in \omega\,,\ \|F(t,x)\| \in L^1_{loc}(I)$$

et telle que

$$\forall (x,y) \in \omega^2\,,\ \|F(t,x) - F(t,y)\| \leq L(t)\|x-y\| \quad \text{avec} \quad L \in L^1_{loc}(I).$$

Alors, pour tout point (t_0, x_0) de $I \times \omega$, il existe un intervalle ouvert J contenant t_0 et une unique fonction $x \in \mathcal{C}_b(J;\omega)$ telle que

$$(EDO) \qquad x(t) = x_0 + \int_0^t F(t', x(t'))dt'.$$

Preuve : Soient β_0 un réel strictement positif tel que $\overline{B}(x_0, \beta_0) \subset \omega$ et J un intervalle ouvert contenant t_0 tel que

$$\int_J \|F(t,x_0)\|dt < \frac{\beta_0}{2} \quad \text{et} \quad \int_J L(t)dt < \frac{1}{2}\cdot$$

On considère une fonction $x \in \mathcal{C}(J; B(x_0, \beta_0))$. Alors

$$\begin{cases} J & \to & E \\ t & \mapsto & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^t F(t', x(t'))dt' \end{cases}$$

est une fonction de $\mathcal{C}(J; B(x_0, \beta_0))$. En effet, on a, pour tout t dans J,

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0\| &\leq \int_J \|F(t, x(t))\|dt \\ &\leq \int_J \|F(t,x(t)) - F(t,x_0)\|dt + \int_J \|F(t,x_0)\|dt \\ &\leq \beta_0 \int_J L(t)dt + \int_J \|F(t,x_0)\|dt \\ &\leq \beta_0. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on peut définir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déléments de $\mathcal{C}(J; B(x_0, \beta_0))$ par

$$x_0(t) \equiv x_0 \quad \text{et} \quad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(t', x_n(t'))dt'. \tag{1}$$

Démontrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{C}(J; B(x_0, \beta_0))$. Pour cela, on écrit que si

$$\rho_n \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t' \in J, p} \|x_{n+p}(t') - x_n(t')\|,$$

alors on a

$$
\begin{aligned}
\rho_{n+1} &\leq \int_J \|F(t,x_{n+p}(t)) - F(t,x_n(t))\|dt \\
&\leq \int_J L(t)\|x_{n+p}(t) - x_n(t)\|dt \\
&\leq \rho_n \int_J L(t)dt \\
&\leq \frac{1}{2}\,\rho_n.
\end{aligned}
$$

Ainsi donc la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans l'espace complet $\mathcal{C}(J; B(x_0,\beta_0))$. Soit x la limite. Par passage à la limite dans (1), on trouve que x est solution de (EDO).

Reste à prouver l'unicité. Considérons donc deux fonctions x et y continues sur J et solutions de (EDO). On a pour tout $(t,t_1) \in J^2$,

$$
y(t) - x(t) = \int_{t_1}^{t} \big(F(\tau,x(\tau)) - F(\tau,y(\tau))\big)\,d\tau. \tag{2}
$$

Si J vérifie $\int_J L(t) < 1$, une adaptation immédiate de la preuve de la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'obtenir $y \equiv x$. Mais on peut en fait fort bien se passer de cette condition sur J.

En effet, soit $K = \big\{t \in J \,|\, x(t) = y(t)\big\}$. L'ensemble K est fermé et non vide (car contient t_0). Soit $t_1 \in K$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$
]t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon[\subset J \quad \text{et} \quad \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} L(t)\,dt \leq \frac{1}{2}.
$$

De (2), on tire

$$
\sup_{|t-t_1|<\varepsilon} \|y(t)-x(t)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{|t-t_1|<\varepsilon} \|y(t)-x(t)\|
$$

Donc $]t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon[\subset K$. L'ensemble K est donc ouvert. Par connexité de J, on peut alors conclure que $K = J$. ■

Pour des compléments, notamment sur la notion de flot, nous renvoyons à [3].

0.3 Un critère d'explosion

Le théorème précédent d'existence et d'unicité pour les équations différentielles ordinaires est un théorème local. Nous allons voir une condition nécessaire pour que la solution cesse d'être définie. Ces théorèmes seront d'une grande importance lorsque nous étudierons le comportement des solutions du système de Navier-Stokes en dimension trois.

Proposition 0.3.1. *Soit F une fonction de $\mathbb{R} \times E$ dans E satisfaisant les hypothèses du théorème 0.2.1 au voisinage de tout point de $\mathbb{R} \times E$. On suppose en outre qu'il existe une fonction localement bornée M de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et une fonction localement intégrable β de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que*

$$
\|F(t,u)\| \leq \beta(t) M(\|u\|).
$$

Alors, si l'intervalle maximal de définition est $]T_\star, T^\star[$*, on a :*

$$T_\star > -\infty \Longrightarrow \limsup_{t\to T_\star} \|u(t)\| = \infty \quad \textit{et} \quad T^\star < +\infty \Longrightarrow \limsup_{t\to T^\star} \|u(t)\| = \infty.$$

Preuve : Il suffit d'observer que, si l'on considère un temps positif T tel que $\|u(t)\|$ soit borné sur un intervalle $[T_0, T[$, alors on peut prolonger la solution sur un intervalle $[T_0, T_1]$ avec $T_1 > T$. Comme la fonction u est supposée bornée sur l'intervalle $[T_0, T[$, on déduit de l'hypothèse sur F que, pour tout t de l'intervalle $[T_0, T[$, on a

$$\|F(t, u(t))\| \leq C\beta(t).$$

La fonction β étant intégrable sur l'intervalle $[T_0, T]$, on en déduit que, pour tout ε strictement positif, il existe un réel η tel que, pour tout t et t' tel que $T - t < \eta$ et $T - t' < \eta$, on ait

$$\|u(t) - u(t')\| < \varepsilon.$$

L'espace E étant complet, il existe un $u_\star$ dans E tel que

$$\lim_{t\to T^\star} u(t) = u_\star.$$

En appliquant le théorème 0.2.1, on construit une solution de (EDO) sur un intervalle $[T^\star, T_1]$ de longueur non nulle, et la fonction continue définie par prolongement est solution de l'équation (EDO) sur l'intervalle $[T_0, T_1]$. ■

Corollaire 0.3.1. *Sous les hypothèses de la proposition 0.3.1, si l'on a de plus*

$$\|F(t, u)\| \leq M\|u\|^2,$$

alors si l'intervalle maximal de définition est $]T_\star, T^\star[$ *et* $T_0 \in]T_\star, T^\star[$*, on a*

$$T_\star > -\infty \Longrightarrow \int_{T_\star}^{T_0} \|x(t)\|\, dt = +\infty \quad \textit{et} \quad T^\star < +\infty \Longrightarrow \int_{T_0}^{T^\star} \|x(t)\|\, dt = +\infty.$$

Preuve : La solution vérifie

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + M \int_0^t \|x(t')\| dt'.$$

Le lemme de Gronwall implique que

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| \exp\Big(M \int_0^t \|x(t')\| dt'\Big).$$

et la proposition 0.3.1 permet donc de conclure au résultat voulu. ■

0.4 Un théorème de compacité : le théorème de Peano

Contrairement au théorème de Cauchy-Lipschitz, le théorème que nous allons énoncer est un résultat d'existence pour (EDO) *sans* unicité. Sa preuve repose sur un argument de compacité.

Théorème 0.4.1 (Peano). *Soit* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$*, on considère une fonction* f *de* $I \times \mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *telle que*

- *Pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, la fonction $t \mapsto \|f(t)\|_{L^\infty(K)}$ est localement intégrable,*
- *Pour tout t de I, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.*

Alors, pour tout point (t_0, x_0) de $I \times \mathbb{R}^d$, il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant x_0 et une fonction continue x de J à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que

$$(EDO) \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', x(t'))dt'.$$

Preuve : La structure de la démonstration est au moins aussi intéressante que le résultat. Elle servira de modèle à la démonstration du théorème d'existence de solutions faibles pour l'équation de Navier-Stokes. On procède en trois étapes:

- on régularise la fonction f et l'on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz à la suite de fonctions régularisées et la Proposition 0.3.1 qui assure que les solutions du problème régularisé ont un intervalle commun de définition,
- puis on démontre que la suite de solutions ainsi construite est d'adhérence compacte dans un espace du type $\mathcal{C}(J, \mathbb{R}^d)$,
- enfin, on passe à la limite.

Procédons à la régularisation. Soit une fonction positive $\chi = \chi(x)$ de $\mathcal{D}$, supportée dans $B(0,1)$ et d'intégrale 1. Soit $\chi_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} n^d \chi(nx)$ et $f_n(t) = \chi_n \star f(t)$. On a

$$\|f_n(t)\|_{L^\infty(K)} \leq \|f(t)\|_{L^\infty(K+B(0,n^{-1}))}.$$

De plus, on a

$$\|\partial_j f_n(t)\|_{L^\infty(K)} \leq C(n+1)\|f(t)\|_{L^\infty(K+B(0,n^{-1}))}.$$

On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à la fonction f_n. Soit J_n l'intervalle de définition maximal de x_n. Soit J un intervalle ouvert contenant t_0 et tel que

$$\int_J \|f(t)\|_{L^\infty(B(x_0,2)} dt \leq 1.$$

Soit $\tau_n \stackrel{\text{déf}}{=} \sup\Big\{t \in [t_0, \infty[\cap J \cap J_n \,/\, \forall t' \leq t\,,\ x(t') \in B(x_0, 2)\Big\}$. Pour tout $t \leq \tau_n$, on a

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x_0\| &\leq \int_J \|f_n(t)\|_{L^\infty(B(x_0,1))} dt \\ &\leq \int_J \|f(t)\|_{L^\infty(B(x_0,2))} dt \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi donc $\tau_n \geq \sup J \cap J_n$. En procédant de même pour les $t \leq t_0$, on trouve, en utilisant la Proposition 0.3.1 que, pour tout n on a $J \subset J_n$. Ceci achève preuve de la première partie de la démonstration.

Nous avons que

$$\forall t \in J\,,\ X(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x_n(t),\ n \in \mathbb{N}\} \subset B(x_0, 1).$$

Donc, parce ce que nous sommes en dimension finie, $X(t)$ est d'adhérence compacte. De plus, nous avons

$$\begin{aligned}\|x_n(t)-x_n(t')\| &\leq \left|\int_t^{t'}\|f_n(t'')\|_{L^\infty(B(x_0,1))}dt''\right|\\ &\leq \left|\int_t^{t'}\|f(t'')\|_{L^\infty(B(x_0,2))}dt''\right|.\end{aligned}$$

Donc, pour tout ϵ strictement positif, il existe un α strictement positif tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\,\forall(t,t')\in J^2\,,\ |t-t'|<\alpha\Longrightarrow\|x_n(t)-x_n(t')\|<\epsilon.$$

Les hypothèses du théorème d'Ascoli 1.1.2 qui est énoncé et démontré page 15 assurent que l'ensemble de fonctions x_n est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}(J;\mathbb{R}^d)$. On peut donc en extraire une sous suite qui converge (au sens de la norme uniforme) vers une fonction x de $\mathcal{C}(J;\mathbb{R}^d)$. On omet de noter l'extraction.

Il nous reste maintenant à passer à la limite. Pour tout t de J, on a

$$\|f_n(t,x_n(t))-f(t,x(t))\|\leq\|f_n(t)-f(t)\|_{L^\infty(B(x_0,1))}+\|f(t,x_n(t))-f(t,x(t))\|.$$

Donc pour tout t de J, on a

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t,x_n(t))=f(t,x(t)).$$

De plus, $\|f_n(t,x_n(t)\|\leq\|f(t)\|_{L^\infty(B(x_0,2))}$. Le théorème de convergence dominée assure que, pour tout t, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^t f_n(t',x_n(t'))dt'=\int_{t_0}^t f(t',x(t'))dt'.$$

Le théorème est démontré.

■

0.5 Exercice

Exercice 0.1 (Lemme de Gronwall). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}^+$ et f,x,a trois fonctions mesurables de I dans $\mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe $t_0\in I$ tel que pour tout $t\in I$, on ait

$$x(t)\leq x_0+\left|\int_{t_0}^t f(\tau)\,d\tau\right|+\left|\int_{t_0}^t a(\tau)x(\tau)\,d\tau\right|.$$

Montrer que l'on a

$$\forall t\in I,\ x(t)\leq x_0e^{\left|\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau\right|}+\left|\int_{t_0}^t e^{\left|\int_\tau^t a(\tau)\,d\tau\right|}\,dt\right|.$$

Chapter 1

Analyse fonctionnelle

Pour les définitions et notions de base, nous renvoyons le lecteur au texte aux cours [2], [3] et [6]. Le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances en analyse fonctionnelle pourra par exemple consulter [4] ou [7].

1.1 Compacité dans les espaces de Banach

Avant toute chose, rappelons que la compacité dans les espaces normés qui ne sont pas de dimension finie, c'est-à-dire pour nous les espaces de fonctions est beaucoup plus délicate à obtenir que dans les espaces de dimension finie. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème (de Riesz). *Soit E un espace vectoriel normé; la dimension de E est finie si et seulement si la boule unité fermée de E est compacte.*

1.1.1 Opérateurs compacts

Définition 1.1.1. *Soient E et F deux espaces de Banach. Un élément u de l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues est dit compact si l'image par u de la boule unité de E est d'adhérence compacte dans F.*

Il est bien sûr équivalent de demander à $u(A)$ d'être d'adhérence compacte pour toute partie bornée A de E.

Un premier exemple d'opérateurs compacts est donné par les **opérateurs de rang fini**, c'est-à-dire les applications linéaires dont l'image est un espace vectoriel de dimension finie. Nous verrons qu'il en existe beaucoup d'autres.

On peut caractériser les opérateurs compacts à l'aide de suites:

Théorème 1.1.1. *Soient E et F deux espaces de Banach. Un élément u de $\mathcal{L}(E,F)$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence.*

Preuve : Supposons que u soit compact et considérons une quelconque suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $M \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_n \|x_n\|_E$, la suite $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est incluse dans $u(B_E(0,M))$ dont l'adhérence est compacte. On peut donc extraire de la suite $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite convergente.

Réciproquement, soient A une partie bornée de E et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'adhérence de $u(A)$. Il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $u(A)$ telle que

$$d(y_n, z_n) \leq \frac{1}{n}\cdot$$

Par hypothèse, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. ■

Théorème 1.1.2. *Soient E, F et G trois espaces de Banach.*

- *L'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ qui sont compacts est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$.*
- *Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$; alors l'opérateur $u \circ v$ est compact dès que u ou v l'est.*

Preuve : Soient u et v deux opérateurs compacts de E dans F et λ un scalaire. Considérons une suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E. Comme u est compact, il existe une fonction d'extraction ϕ telle que $(u(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Comme v est compact, il existe une fonction d'extraction ψ telle que $(v(x_{\phi\circ\psi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La suite $((\lambda u + v)(x_{\phi\circ\psi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donc l'opérateur $\lambda u + v$ est compact.

Démontrons maintenant que ce sous espace vectoriel est fermé. Soit u un élément de l'adhérence des opérateurs compacts. D'après l'exercice 1.1, il suffit de démontrer que, pour tout réel strictement positif ε, on peut recouvrir $u(B(0,1))$ par un nombre fini de boules de rayon ε. Soit ε un réel strictement positif, il existe un opérateur compact v tel que

$$\|u - v\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{avec} \quad M \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x\in B(0,1)} \|x\|.$$

Comme v est compact, il existe une suite finie $(x_j)_{1\leq j\leq N}$ d'éléments de $B(0,1)$ tel que

$$v(A) \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(v(x_j), \varepsilon/2).$$

Ainsi donc, pour tout x de A, il existe un indice j tel que

$$\begin{aligned} \|u(x) - v(x_j)\| &< \|u(x) - v(x)\| + \|v(x) - v(x_j)\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Supposons u compact et considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E. Comme v est continue, la suite $(v(x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est bornée et, comme u est supposée compacte, on peut trouver une fonction d'extraction ϕ telle que $((u\circ v)(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donc $u \circ v$ est compact.

Supposons maintenant v compact et considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E. On peut trouver une fonction d'extraction ϕ telle que $(v(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Comme u est continue, la suite $((u\circ v)(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donc $u \circ v$ est compact. ■

1.1.2 Le théorème d'Ascoli

Théorème (d'Ascoli). *Soit (X,d) un espace métrique compact et $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach. On considère une partie A de $\mathcal{C}(X,E)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans E muni de la norme*

$$\|f\| \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E.$$

Faisons les deux hypothèses suivantes :

i) La partie A est équicontinue i.e.

$$\forall x \in X\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \alpha > 0\,/\ d(x,x') < \alpha \Rightarrow \forall f \in A\,,\ \|f(x) - f(x')\|_E < \varepsilon\,;$$

ii) pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x)\,,\ f \in A\}$ est d'adhérence compacte.

Alors A est d'adhérence compacte.

Pour démontrer ce théorème, nous allons tout d'abord observer que la première hypothèse se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \alpha > 0\,/\ \forall x \in X\,,\ \forall f \in A\,,\ d(x,x') < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(x')\|_E < \varepsilon\,. \tag{1.1}$$

La démonstration de cette assertion à partir de l'hypothèse *i)* est exactement analogue à la démonstration du fait qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Énonçons maintenant un lemme montrant que les parties A qui sont uniformément équicontinues (c'est-à-dire qui vérifient l'assertion (1.1) ci-dessus) ont une propriété très spéciale vis-à-vis de la convergence.

Lemme. *Soient A une partie uniformément équicontinue de $\mathcal{C}(X,E)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A. On a l'équivalence suivante:*

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \iff (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f.$$

Preuve : Il suffit de justifier l'implication directe. Soit ε un réel strictement positif arbitraire. Par hypothèse, il existe un réel α strictement positif tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$d(x,x') < \alpha \implies \|f_n(x) - f_n(x')\|_E < \frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Par passage à la limite, on obtient immédiatement que la fonction f est uniformément continue de X dans Y. On recouvre le compact X par une famille finie de boules $(B(x_j,\alpha))_{1\leq j\leq N_\varepsilon}$. Ainsi donc, on a

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - f(x)\|_E &\leq \|f_n(x) - f_n(x_j)\|_E + \|f_n(x_j) - f(x_j)\|_E + \|f(x_j) - f(x)\|_E\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \max_{1\leq j\leq N_\varepsilon} \|f_n(x_j) - f(x_j)\|_E.\end{aligned}$$

Par hypothèse, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0\,,\ \max_{1\leq j\leq N_\varepsilon} \|f_n(x_j) - f(x_j)\|_E < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

D'où le lemme. ∎

Preuve du théorème d'Ascoli : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. Nous allons en extraire une sous-suite convergente. D'après l'exercice 1.1, il existe une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dense dans X. Par hypothèse, l'ensemble

$$\{f(x_0)\,,\ f\in A\}$$

est d'adhérence compacte. Donc il existe une fonction φ_0 strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et un élément $g(x_0)$ de E tels que

$$\lim_{n\to\infty} f_{\varphi_0(n)}(x_0) = g(x_0).$$

De même, il existe un point $g(x_1)$ de E et une fonction φ_1 strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)}(x_1) = g(x_1).$$

On définit ainsi par récurrence une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall p\in\mathbb{N}\,,\ \forall k\leq p\,,\ \lim_{n\to\infty} f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(n)}(x_k) = g(x_k).$$

On définit alors la fonction ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par

$$\psi(n) = \varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(n).$$

C'est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. En effet, observons tout d'abord que toute fonction μ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifie $\mu(n)\geq n$. Donc, si $n<m$, on a

$$\psi(n) = \varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(n) < \varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n\circ\varphi_{n+1}\circ\varphi_m(m) = \psi(m).$$

Par construction, la suite extraite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall p\in\mathbb{N}\,,\ \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(x_p) = g(x_p). \tag{1.2}$$

Démontrons maintenant que la fonction g est uniformément continue sur X. Soit ε un réel strictement positif, on considère un réel α vérifiant l'assertion (1.1). Pour tout couple d'entiers (p,q) tel que $d(x_p,x_q)<\alpha$, on a

$$\begin{aligned}\|g(x_p)-g(x_q)\|_E &\leq \|g(x_p)-f_{\psi(n)}(x_p)\|_E+\|f_{\psi(n)}(x_p)-f_{\psi(n)}(x_q)\|_E+\|f_{\psi(n)}(x_q)-g(x_q)\|_E\\ &\leq \varepsilon+\|g(x_p)-f_{\psi(n)}(x_p)\|_E+\|f_{\psi(n)}(x_q)-g(x_q)\|_E.\end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus étant vraie pour tout n, on obtient, en passant à la limite $n\to\infty$,

$$d(x_p,x_q)<\alpha \Rightarrow \|g(x_p)-g(x_q)\|_E\leq\varepsilon.$$

La fonction g étant uniformément continue sur une partie dense de X et l'espace E étant complet, d'après l'exercice 1.3, on peut prolonger g en une fonction uniformément continue sur X tout entier. Cette fonction est définie par

$$g(x) = \lim_{p\to\infty} g(y_p)\,,\ (y_p)_{p\in\mathbb{N}}\in X^{\mathbb{N}}\ /\ \lim_{p\to\infty} y_p = x. \tag{1.3}$$

Pour conclure la preuve du théorème d'Ascoli, il suffit de démontrer que

$$\forall x \in X\,,\ \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(x) = g(x).$$

La réunion de A et de $\{g\}$ est naturellement une partie uniformément équicontinue. Soit ε un réel strictement positif arbitraire et x un élément de X. Il existe un réel strictement positif α tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ d(x,x') < \alpha \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_{\psi(n)}(x) - f_{\psi(n)}(x')\|_E + \|g(x) - g(x')\|_E < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Il existe un entier p tel que

$$d(x, x_p) < \alpha.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \|f_{\psi(n)}(x) - g(x)\|_E &\leq \|f_{\psi(n)}(x) - f_{\psi(n)}(x_p)\|_E + \|f_{\psi(n)}(x_p) - g(x_p)\|_E + \|g(x_p) - g(x)\|_E \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|f_{\psi(n)}(x_p) - g(x_p)\|_E. \end{aligned}$$

La relation (1.2) permet de conclure à la convergence simple de la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers g. On obtient alors la convergence uniforme à l'aide du lemme de la page 15. ■

1.2 Les espaces L^p

Ces espaces sont importants dès que l'on aborde des problèmes non linéaires. Ils joueront un rôle décisif en particulier dans les démonstrations du chapitre 4 relatif aux équations de Navier-Stokes. Le cas particulier des espaces L^1 et L^2 a été étudié dans [2].

Définition 1.2.1. *Soient μ une mesure borélienne sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et $p \in [1,\infty]$. Si $p < \infty$, l'espace $L^p(d\mu)$ désigne les classes d'équivalence (modulo la relation d'égalité μ presque partout) de fonctions boréliennes f sur Ω telles que $|f|^p$ soit sommable. On pose*

$$\|f\|_{L^p} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on définit l'espace $L^\infty(d\mu)$ comme étant les classes d'équivalence (modulo la relation d'égalité μ presque partout) de fonctions boréliennes f sur Ω telles que l'ensemble des réels positifs λ tels que $\mu\big(\{x \in \Omega \,/\, |f(x)| > \lambda\}\big) > 0$ soit majoré. On pose

$$\|f\|_{L^\infty} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup\Big\{\lambda > 0 \,/\, \mu\big(\{x \in \Omega \,/\, |f(x)| > \lambda\}\big) > 0\Big\}.$$

Le théorème suivant est clairement fondamental.

Théorème 1.2.1. *L'espace $L^p(d\mu)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ est un espace de Banach.*

La démonstration de ce théorème est non immédiate. Lorsque $p = 1$, $p = 2$ ou $p = \infty$, elle figure dans [2]. On se restreindra ici au cas où $p \in]1,\infty[$. Le fait que L^p soit un espace vectoriel résulte simplement du fait que

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Tout le reste repose sur l'inégalité suivante.

Lemme (Inégalité de Hölder). *Soit* $p \in [1, +\infty]$. *On pose* $p' \stackrel{\text{déf}}{=} \dfrac{p}{p-1}$ *l'exposant dit conjugué de* p *(avec la règle que* $1/0 = \infty$*). Soient* f *dans* L^p *et* g *dans* $L^{p'}$*, alors* $fg \in L^1$ *et*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Preuve : L'inégalité est évidente si p vaut 1 ou ∞. Dans les autres cas, la démonstration repose sur la concavité de la fonction logarithme qui dit que si (a, b) est un couple de réels strictement positifs et θ un réel de l'intervalle $[0, 1]$, alors

$$\theta \log a + (1 - \theta) \log b \leq \log(\theta a + (1 - \theta) b).$$

En appliquant l'exponentielle à cette inégalité, on obtient

$$a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1 - \theta) b. \tag{1.4}$$

Quitte à multiplier f et g par une constante, on peut supposer que $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^{p'}} = 1$. On déduit de l'inégalité ci-dessus que

$$\begin{aligned} |f(x)|\,|g(x)| &= (|f(x)|^p)^{\frac{1}{p}} |g(x)|^{p'})^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) |g(x)|^{p'}. \end{aligned}$$

L'intégration de cette inégalité par rapport à la mesure $d\mu$ conclut la démonstration. ■

Revenons à la démonstration du théorème. Écrivons que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &= |f(x) + g(x)|\,|f(x) + g(x)|^{p-1} \\ &\leq |f(x)|\,|f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)|\,|f(x) + g(x)|^{p-1}. \end{aligned}$$

Comme $f + g$ appartient à L^p, $|f + g|^{p-1}$ appartient à $L^{p'}$. D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p d\mu(x) \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^{p'}}) \Big(\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p d\mu(x) \Big)^{1 - \frac{1}{p}}.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme. La démonstration du fait que $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ est complet est très analogue à celle des théorèmes 3.2.4 page 81 et 3.3.2 page 87 de [2].

Énonçons un corollaire de l'inégalité de Hölder.

Corollaire 1.2.1. *Soit* $(p, q) \in [1, +\infty]^2$ *tel que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \leq 1$. *Pour tout couple* (f, g) *de* $L^p \times L^q$, *on a*

$$fg \in L^r \quad \text{et} \quad \|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \cdot$$

La démonstration de ce corollaire consiste simplement à appliquer l'inégalité de Hölder aux fonctions $|f|^{\frac{p}{r}}$ et $|g|^{\frac{q}{r}}$.

Nous allons maintenant démontrer que l'inégalité de Hölder est essentiellement optimale par le biais du lemme suivant.

Lemme 1.2.1. *Soit* (X,μ) *un espace mesuré,* f *une fonction mesurable et* p *un élément de* $[1,+\infty]$. *Alors* f *appartient à* L^p *si et seulement si*

$$\sup_{\|g\|_{L^{p'}}\leq 1}\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x)<\infty.$$

Si de plus la fonction f *appartient à* L^p, *alors*

$$\|f\|_{L^p}=\sup_{\|g\|_{L^{p'}}\leq 1}\left|\int_X f(x)g(x)d\mu(x)\right|.$$

Preuve : Dans toute la démonstration, nous supposons la fonction f non nulle (sinon le résultat est évident).

Commençons par considérer le cas où $p=+\infty$. Soit λ un réel strictement positif tel que

$$\mu\big(\{|f|\geq\lambda\}\big)>0.$$

On pose $E_\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \big(\{|f|\geq\lambda\}\big)$. Soit g_0 une fonction de L^1, positive, supportée dans $\overline{E_\lambda}$, et d'intégrale 1. On pose

$$g(x)=\frac{\overline{f}(x)}{|f(x)|}g_0 \quad \text{si} \quad f(x)\neq 0, \quad \text{et} \quad g(x)=0 \quad \text{sinon.}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_X f(x)g(x)\,d\mu(x) &= \int_X |f(x)|g_0(x)\,d\mu(x)\\ &\geq \lambda\int_X g_0 d\,\mu(x)\\ &\geq \lambda.\end{aligned}$$

D'où le lemme dans ce cas.

Supposons maintenant que p soit réel et considérons alors une suite croissante d'ensembles de mesure finie $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la réunion est X et posons

$$f_n=\mathbf{1}_{E_n\cap\{|f|\leq n\}}f, \quad g_n(x)=\frac{\overline{f}_n(x)|f_n(x)|^{p-1}}{|f_n(x)|\times\|f_n\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}}} \quad \text{si} \quad f_n(x)\neq 0 \quad \text{et} \quad g_n(x)=0 \quad \text{sinon.}$$

Il est clair que la fonction f_n appartient à $L^1\cap L^\infty$ donc à L^p pour tout p et que l'on a

$$\|g_n\|_{L^{p'}}^{p'}=\frac{1}{\|f_n\|_{L^p}^p}\int_X |f_n(x)|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}d\mu(x)=1.$$

La définition des fonctions f_n et g_n assure que

$$\begin{aligned}\int_X f(x)\mathbf{1}_{E_n\cap(|f|\leq n)}g_n(x)d\mu(x) &= \int_X f_n(x)g_n(x)d\mu(x),\\ &= \left(\int_X |f_n(x)|^p d\mu(x)\right)\|f_n\|_{L^p}^{-\frac{p}{p'}},\\ &= \|f_n\|_{L^p}.\end{aligned}$$

On a donc
$$\int_X |f_n(x)|^p d\mu(x) \leq \left(\sup_{\|g\|_{L^{p'}}\leq 1} \int_X |f(x)g(x)|d\mu(x)\right)^p.$$
Si le terme de droite est fini, le théorème de convergence monotone appliqué à la suite croissante $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ implique immédiatement que
$$f\in L^p \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^p} \leq \sup_{\|g\|_{L^{p'}}\leq 1} \int_X |f(x)g(x)|d\mu(x).$$
Mais, si f appartient à l'espace L^p, alors en posant $g(x) = \dfrac{\overline{f}(x)|f(x)|^{p-1}}{|f(x)|\times \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}}}$, on a
$$\|g\|_{L^{p'}}^{p'} = \frac{1}{\|f\|_{L^p}^p}\int_X |f(x)|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} d\mu(x) = 1 \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^p} = \int_X f(x)g(x)d\mu(x).$$
D'où le lemme. ■

L'inégalité suivante sur la convolution est également une conséquence de l'inégalité de Hölder.

Lemme (Inégalité de Young). *Soit (X,μ) un espace mesuré, et $(p,q,r)\in[1,\infty]^3$ tels que*
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}\cdot \tag{1.5}$$
On a alors, pour tout couple $(f,g)\in L^p\times L^q$,
$$f\star g\in L^r \quad \textit{et} \quad \|f\star g\|_{L^r}\leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Preuve : Pour démontrer cela, observons tout d'abord que si $r=\infty$, c'est exactement l'inégalité de Hölder. De plus, on peut aussi supposer que $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. Si $r<\infty$, écrivons que, pour f et g positives, on a, pour tout θ dans $]0,1[$,
$$(f\star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f^\theta(x-y)g^{1-\theta}(y)f^{1-\theta}(x-y)g^\theta(y)\,d\mu(y).$$
L'inégalité de Hölder implique que, pour tout réel $s\geq 1$, et tout $\theta\in]0,1[$, on a
$$(f\star g)^r(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f^{\theta s}(x-y)g^{(1-\theta)s}(y)\,d\mu(y)\right)^{\frac{r}{s}}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f^{(1-\theta)s'}(x-y)g^{\theta s'}(y)\,d\mu(y)\right)^{\frac{r}{s}'}.$$
On choisit θ et s tels que $\theta s = p$ et $\theta s' = q$. En utilisant (1.5), on trouve que
$$\theta = \frac{r}{r+1}\,,\ s = \frac{p(r+1)}{r} \quad \text{et} \quad s' = \frac{q(r+1)}{r}\cdot \tag{1.6}$$
On en déduit que
$$(f\star g)^r(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f^p(x-y)g^{\frac{p}{r}}(y)\,d\mu(y)\right)^{\frac{r}{s}}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f^{\frac{q}{r}}(x-y)g^q(y)\,d\mu(y)\right)^{\frac{r}{s}'}.$$
Posons
$$\alpha = \frac{qr}{p} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{pr}{q}\cdot$$

Remarquons que, comme $r \geq \max\{p,q\}$, les réels α et β sont supérieurs ou égaux à 1. En appliquant l'inégalité de Hölder, avec α (resp. β) et la mesure $f(x-y)^p\,d\mu(y)$ (resp. $g(y)^q\,d\mu(y)$,) on trouve que

$$(f\star g)^r(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f^p(x-y)g^q(y)\,d\mu(y)\right)^{r\left(\frac{1}{s\alpha}+\frac{1}{s'\beta}\right)}.$$

Par définition de θ, s, α et β, nous avons

$$\begin{aligned} r\left(\frac{1}{s\alpha}+\frac{1}{s'\beta}\right) &= r\left(\frac{rp}{p(r+1)qr}+\frac{rq}{q(r+1)pr}\right)\\ &= \frac{r}{r+1}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)\\ &= 1. \end{aligned}$$

D'où il vient

$$(f\star g)^r(x) \leq (f^p\star g^q)(x).$$

Le théorème vient par intégration. ∎

1.3 La convergence faible dans les espaces de Hilbert

Pour les définitions et propriétés de base des espaces de Hilbert, nous revoyons au chapitre 4 de [2]. Précisons que tous les espaces de Hilbert que nous considérerons seront séparables donc ils admettront en particulier une base hilbertienne dénombrable que l'on notera très souvent $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

1.3.1 La notion de convergence faible

L'un des problèmes de base que l'on rencontre dans les espaces de Hilbert de dimension infinie comme l'espace L^2 des fonctions de carré sommable est que les ensembles bornés sont très loin d'être d'adhérence compacte. À titre d'exemple, considérons la boule unité d'un espace de Hilbert de dimension infinie $\mathcal{H}$ et considérons une base hilbertienne $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Pour tout élément x de $\mathcal{H}$, on a d'après la formule de Parseval que la suite $(x|e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable. Donc son terme général tend vers 0. Donc si la suite $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, ce ne peut être que 0. Or $\|e_j\|=1$ pour tout j. Donc 0 ne saurait être valeur d'adhérence d'une telle suite. Cette constatation motive la définition suivante.

Definition. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et x un élément de $\mathcal{H}$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge faiblement** *vers x et l'on note $\operatorname*{limf}_{n\to\infty} x_n = x$ ou bien $x_n \rightharpoonup x$ si*

$$\forall h\in\mathcal{H}\,,\ \lim_{n\to\infty}(h|x_n) = (h|x).$$

Dans le théorème suivant, on donne quelques conséquences de la propriété de convergence faible.

Théorème 1.3.1. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et x un élément de $\mathcal{H}$. On a alors :*

$$\operatorname*{limf}_{n\to\infty} x_n = x \implies (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée et } \|x\| \leq \liminf\|x_n\|\,; \tag{1.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \implies \operatorname*{limf}_{n\to\infty} x_n = x\,; \tag{1.8}$$

$$\operatorname*{limf}_{n\to\infty} x_n = x \ \textit{et} \ \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\| \implies \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0. \tag{1.9}$$

Preuve : La preuve du premier point du théorème découle d'un résultat célèbre d'analyse fonctionnelle : le **théorème de Banach-Steinhaus** et sera repris dans l'exercice 1.9.

Le deuxième point résulte simplement du fait que

$$|(h|x_n) - (h|x)| \leq \|h\|\,\|x_n - x\|.$$

Pour le dernier point, il suffit d'écrire que

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\,\Re e(x|x_n) + \|x\|^2;$$

Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers x, on a

$$-2\lim_{n\to\infty} \Re e(x|x_n) = -2\|x\|^2.$$

Le dernier point est ainsi démontré. ∎

Proposition 1.3.1. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathcal{H}$ telles que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \textit{et} \quad \operatorname*{limf}_{n\to\infty} y_n = y.$$

Alors, on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (x_n|y_n) = (x|y)$.

Preuve : La démonstration est très simple. Il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &\leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\|\,\|y_n\| + |(x|y_n - y)|. \end{aligned}$$

Le théorème 1.3.1 affirme que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, on a

$$|(x_n|y_n) - (x|y)| \leq C\|x_n - x\| + |(x|y_n - y)|.$$

D'où la proposition. ∎

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème (de compacité faible). *De toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, on peut en extraire sous-suite faiblement convergente.*

Preuve : Fixons une base hilbertienne $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$. Nous allons utiliser le procédé classique d'extraction diagonal, dit de Cantor. La suite $(x_n|e_0)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$. Il existe donc un élément λ_0 de $\mathbb{K}$ et une fonction φ_0 de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tels que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} (x_{\varphi_0(n)}|e_0) = \lambda_0.$$

Supposons construites une suite finie $(\varphi_j)_{0\leq j\leq m}$ de fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et une suite finie $(\lambda_j)_{1\leq j\leq m}$ de scalaires telles que, pour tout $j \leq m$, on ait

$$\lim_{n\to\infty} (x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_j(n)}|e_j) = \lambda_j.$$

La suite $(x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_m(n)}|e_{m+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$. Il existe donc une fonction strictement croissante φ_{m+1} de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et un élément λ_{m+1} de $\mathbb{K}$ tels que

$$\forall j \leq m+1\,,\ \lim_{n\to\infty}(x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_{m+1}(n)}|e_j) = \lambda_j.$$

Posons $\psi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$. Nous avons déjà établi dans la démonstration du théorème que ψ était une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Soit V l'espace vectoriel engendré par les $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire l'espace vectoriel des combinaisons linéaires (finies) de e_j. D'après le théorème 4.4.4 page 107 de [2], V est dense dans $\mathcal{H}$. Considérons l'application linéaire L définie par

$$L\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty}(x_{\psi(n)}|y). \end{array}\right.$$

Notons que la définition de L ne pose pas de problème puisque tout élément de V est combinaison linéaire finie des e_j et que la suite $(x_{\psi(n)} \mid e_j)$ converge pour chaque $j\in\mathbb{N}$. De plus, L est continue car, pour tout y de V, nous avons

$$|\langle L, y\rangle| \leq (\sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|)\|y\|.$$

Nous allons prolonger la forme linéaire L à l'espace $\mathcal{H}$ tout entier. Soit y un élément de $\mathcal{H}$. Le sous espace V étant dense dans $\mathcal{H}$, considérons une suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V tendant vers y. Comme l'on a

$$|\langle L, y_{p+q}\rangle - \langle L, y_p\rangle| \leq C\|y_{p+q} - y_p\|,$$

la suite $(\langle L, y_p\rangle)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{K}$. Soit L_y sa limite. Remarquons que si $(y'_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une autre suite d'éléments de V tendant vers y alors on a

$$|\langle L, y'_p\rangle - \langle L, y_p\rangle| \leq C\|y_{p'} - y_p\|.$$

La limite L_y ne dépend donc pas de la suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ choisie. C'est un exercice facile laissé au lecteur que de vérifier que l'application

$$\widetilde{L}\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & L_y \end{array}\right.$$

est linéaire continue. D'après le théorème de Riesz, il existe donc un élément x de $\mathcal{H}$ tel que

$$\forall y\in\mathcal{H},\ \langle \widetilde{L}, y\rangle = (x|y).$$

Ainsi avons nous en particulier que

$$\forall y\in V,\ \lim_{n\to\infty}(x_{\psi(n)}|y) = (x|y).$$

L'énoncé de l'exercice 1.11 permet alors de conclure la démonstration. ∎

1.4 Les opérateurs autoadjoints compacts

Théorème 1.4.1. *Soit A un opérateur compact autoadjoint d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable de dimension infinie.*

(i) Le spectre de A est la réunion de $\{0\}$ et d'une suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de valeurs propres réelles tendant vers 0 (éventuellement nulle à partir d'un certain rang).

(ii) L'espace vectoriel $\ker(A-\lambda_j\,\mathrm{Id})$ est de dimension finie si λ_j est non nul.

(iii) On a $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \max\limits_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|$.

Preuve : Démontrons tout d'abord le deuxième point du théorème. Posons $E_j = \ker(A-\lambda_j\,\mathrm{Id})$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E_j. L'opérateur A étant compact, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(Ax_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Mais $Ax_{\varphi(n)} = \lambda_j x_{\varphi(n)}$ et λ_j est non nulle. La boule unité de E_j est donc compacte et le théorème de Riesz permet de conclure que la dimension de E_j est finie.

Démontrons le premier point. Soit

$$M_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\|x\|=1} |(Ax|x)|.$$

Si $M_0=0$, on a alors $(Ax|x)=0$ pour tout élément x de $\mathcal{H}$. Or, l'opérateur A étant autoadjoint, on a

$$\Re e(Ax|y) = \frac{1}{2}\Big((A(x+y)|x+y) - (Ax|x) - (Ay|y)\Big).$$

Donc, si $M_0=0$, on a $\Re e(Ax|y)=0$ pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathcal{H}$. Mais comme $\Re e(Ax|iy) = \Im m(Ax|y)$, on a en fait $(Ax|y)=0$ pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathcal{H}$ ce qui implique que $A=0$.

Comme A est autoadjoint, $(Ax|x)$ est réel, donc quitte à changer A en $-A$, on peut supposer que

$$M_0 = \sup_{\|x\|=1} (Ax|x).$$

Supposons dorénavant que $M_0>0$. Par définition, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de la sphère unité telle que

$$\lim_{n\to\infty} (Ax_n|x_n) = M_0.$$

L'opérateur A étant compact, on peut, quitte à extraire une sous-suite, dire qu'il existe un y dans $\mathcal{H}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = y.$$

À nouveau après extraction, on peut supposer, d'après le théorème de compacité faible, qu'il existe un élément x de $\mathcal{H}$ tel que

$$\operatorname*{limf}_{n\to\infty} x_n = x.$$

Démontrons que $Ax=y$. L'opérateur A étant autoadjoint, on a, pour tout z appartenant à $\mathcal{H}$,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n|Az) = (x|Az) = (Ax|z).$$

De plus, il est clair que
$$\lim_{n\to\infty}(Ax_n|z) = (y|z).$$
Il en résulte que, pour tout z dans $\mathcal{H}$, on a $(y|z) = (Ax|z)$, ce qui implique que $y = Ax$. Mais, d'après la proposition 1.3.1, on a
$$\lim_{n\to\infty}(Ax_n|x_n) = (Ax|x).$$
Le maximum M_0 est donc atteint en un point x qui bien sûr est différent de 0 puisque M_0 est strictement positif. De plus, si l'on avait $\|x\| < 1$, alors on aurait
$$\left(A\frac{x}{\|x\|}\middle|\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{M_0}{\|x\|^2} > M_0,$$
ce qui contredit la maximalité de M_0 car M_0 est strictement positif. Donc x appartient à la sphère unité [1]. Un argument d'homogénéité permet d'affirmer que
$$\forall z \in \mathcal{H},\ F(z) \stackrel{\text{déf}}{=} M_0\|z\|^2 - (Az|z) \geq 0.$$
Comme nous venons de voir que $F(x) = 0$, le point x est donc un minimum de la fonction F. Donc la différentielle de F s'annule au point x. Mais
$$\forall h \in \mathcal{H}\,,\ DF(x)h = 2M_0\,\Re e(x|h) - 2\,\Re e(Ax|h),$$
ce qui entraîne[2] que $Ax = M_0x$. Nous avons vu que x était non nul. Donc M_0 est valeur propre de A.

Nous allons maintenant travailler dans l'espace
$$\mathcal{H}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\ker(A - M_0\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(A + M_0\,\mathrm{Id})\Big)^\perp.$$
Démontrons que $\mathcal{H}_1$ est stable par A. Pour ce faire, il suffit de démontrer que
$$\forall C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\,,\ C^\star(\ker(C - \lambda\,\mathrm{Id})^\perp) \subset \ker(C - \lambda\,\mathrm{Id})^\perp. \tag{1.10}$$
En effet, soit x un élément de $\ker(C-\lambda\,\mathrm{Id})^\perp$. On a, pour tout y appartenant à $\ker(C-\lambda\,\mathrm{Id})$, que $(x|y) = 0$. Ceci entraîne que $(x|\lambda y) = 0$. Comme y appartient au noyau de $C - \lambda\,\mathrm{Id}$, on a $(x|\lambda y) = (x|Cy) = 0$. Ainsi donc, pour tout y de $\ker(C - \lambda\,\mathrm{Id})$, on a $(C^\star x|y) = 0$. D'où la relation (1.10).

Étudions maintenant l'opérateur A restreint à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$. D'après la relation (1.10), $A_{|\mathcal{H}_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Posons
$$M_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{x\in\mathcal{H}_1\\ \|x\|=1}} (Ax|x).$$
D'après l'étude précédente, si $M_1 \neq 0$, le maximum est atteint en au moins un point de norme 1 qui est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\pm M_1$. Comme $x_1 \in \mathcal{H}_1$, on doit avoir $M_1 < M_0$. En itérant le procédé, on construit ainsi une suite de valeurs propres réelles de valeur absolue strictement décroissante. Supposons cette suite infinie

[1] ce qui implique en particulier que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x est forte.
[2] Utiliser à nouveau le fait que $\Re(y|iz) = \Im m(y|z)$.

et désignons-la par $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Soit $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale de vecteurs propres associés à la valeur propre λ_j. D'après l'égalité de Parseval, la suite $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers 0. Quitte à extraire, on peut supposer que la suite $(Ae_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tend fortement vers 0. Mais comme $Ae_j = \lambda_j e_j$, on en déduit que

$$\lim_{j\to\infty} |\lambda_j|\,\|e_j\| = 0.$$

Les vecteurs e_j étant de norme 1, la suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Le théorème 1.4.1 est complètement démontré. ■

1.5 Exercices

Exercice 1.1. *Soit (X,d) un espace métrique complet.*

1) Montrer qu'une partie A de X est d'adhérence compacte si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*,\ \exists (x_j)_{1\leq j\leq N}\in X^N\ /\ A\subset\bigcup_{j=1}^N B(x_j,\varepsilon).$$

2) En déduire que si (X,d) est un espace métrique compact, alors il existe une suite d'éléments $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans X, c'est-à-dire que

$$\forall\varepsilon>0\,,\ \forall x\in X\,,\ \exists n\in\mathbb{N}\,/\ x_n\in B(x,\varepsilon).$$

Exercice 1.2. Montrer que la limite d'une suite d'opérateurs de rang fini, est compacte.

Exercice 1.3. *1) Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques, A une partie dense de X, et f une application uniformément continue de (A,d) dans (Y,δ). Montrer que si Y est complet, alors il existe une unique application uniformément continue $\widetilde{f}$ de (X,d) dans (Y,δ) telle que $\widetilde{f}_{|A}=f$.*

2) Soient E et F deux espaces normés, V un sous espace vectoriel de E dense dans E et L une application linéaire continue de V dans F. Montrer que si f est un espace de Banach, alors il existe une unique application linéaire continue $\widetilde{L}$ de E dans F telle que $\widetilde{L}_{|V}=L$.

Exercice 1.4. *Démontrez la réciproque du théorème d'Ascoli, à savoir que si une partie A de $\mathcal{C}(X,Y)$ est compacte, alors elle vérifie les conditions $i)$ et $ii)$ de l'énoncé du théorème d'Ascoli.*

Exercice 1.5. *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques compacts. Démontrez que l'ensemble des fonctions k-lipschitziennes de (X,d) dans (Y,δ) est compact dansa $\mathcal{C}(X,Y)$.*

Exercice 1.6. *Soit (X,d) un espace métrique compact. On considère sur l'espace $C^\alpha(X,\mathbb{K})$ des fonctions hölderiennes d'indice $\alpha\in]0,1]$ de X dans $\mathbb{K}$, la norme*

$$\|f\|_\alpha=\sup_{x\in X}|f(x)|+\sup_{(x,y)\in X^2 x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha}\cdot$$

1) Démontrez que cette norme munit $C^\alpha(X,\mathbb{K})$ d'une structure d'espace de Banach.

2) Démontrez que, pour tout α, l'inclusion de $C^\alpha(X,\mathbb{K})$ dans l'espace de Banach des fonctions continues de X dans $\mathbb{K}$ est compacte.

Exercice 1.7. *Soit* $p \in [1, +\infty[$ *et* μ *une mesure borélienne. Démontrer que, pour toute fonction borélienne* f, *on a*

$$\|f\|_{L^p} = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(|f| > \lambda) d\lambda.$$

Exercice 1.8. *Trouvez deux suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{H}$ *telles que*

$$\operatorname*{limf}_{n\to\infty} x_n = x\,,\ \operatorname*{limf}_{n\to\infty} y_n = y \quad et \quad \lim_{n\to\infty} (x_n|y_n) \neq (x|y).$$

Exercice 1.9. *Démontrez que, dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$, *si une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend faiblement vers* x, *alors elle est bornée et*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Exercice 1.10. *Soit* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{H}'$ *deux espaces de Hilbert, et* $T : \mathcal{H} \to T'$ *un opérateur compact. Montrer que*

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{entraîne} \quad T(x_n) \to T(x).$$

Exercice 1.11. *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée de* $\mathcal{H}$, x *un élément de* $\mathcal{H}$ *et* V *un sous espace vectoriel dense de* $\mathcal{H}$. *Démontrer que* $\operatorname*{limf}_{n\to\infty} x_n = x$ *si et seulement si*

$$\forall y \in V\,,\ \lim_{n\to\infty} (x_n|y) = (x|y).$$

Exercice 1.12. *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{H}$ *telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < \infty.$$

On suppose que si $|n-m| \geq 2$, *alors* $(x_n|x_m) = 0$. *Démontrer qu'alors la suite* $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *définie par* $S_N \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{N} x_n$ *converge dans* $\mathcal{H}$ *et que sa limite* S *satisfait* $\|S\| \leq \sqrt{2}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 1.13 (Lemme de Schur). *Soit* K *un réel positif et* $k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *une fonction localement intégrable telle que pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^d$ *et* $y \in \mathbb{R}^d$, *on ait*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |k(x,y')|\, dy' \leq K \quad et \quad \int_{\mathbb{R}^d} |k(x',y)|\, dx' \leq K.$$

Pour toute fonction f *intégrable sur* $\mathbb{R}^d$, *on pose* $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x,y) f(y)\, dy$.

(i) Montrer que l'application T *est linéaire continue de* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *dans* $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Soit $p \in [1, +\infty]$. *Montrer que* T *se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *(encore notée* T*) et que l'on a*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ \|Tf\|_{L^p} \leq K\|f\|_{L^p}.$$

On pourra s'inspirer de la preuve des inégalités de Young.

Exercice 1.14. *Soit* H *un espace de Hilbert et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < \infty.$$

On suppose qu'il existe $K \geq 0$ *tel que (avec la convention* $0/0 = 0$*)*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{|(x_n|x_m)|}{\|x_n\|\,\|x_m\|} \leq K.$$

Montrer que la suite $S_N := \sum_{n=0}^{N} x_n$ *converge dans* H *et que sa limite* S *satisfait*

$$\|S\| \leq \sqrt{K}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On pourra raisonner par analogie avec l'exercice précédent dans le cas $p = 2$.

Chapter 2

Transformée de Fourier et espaces de Sobolev

Pour la définition et les propriétés de base de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'$, nous renvoyons le lecteur à [3]. Les espaces de Sobolev sont également présentés dans [1].

2.1 Définition des espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^d$

Definition. *Soit s un réel, on dit qu'une distribution tempérée u appartient à* **l'espace de Sobolev** *d'indice s, noté $H^s(\mathbb{R}^d)$, ou simplement H^s en l'absence d'ambiguïté, si et seulement si*

$$\widehat{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad \widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d; (1+|\xi|^2)^s d\xi).$$

On note alors

$$\|u\|_{H^s} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi}.$$

Proposition 2.1.1. *Pour tout s réel, l'espace H^s, muni de la norme $\|\cdot\|_{H^s}$, est un espace de Hilbert.*

Preuve : Le fait que la norme $\|\cdot\|_{H^s}$ provienne du produit scalaire

$$(u|v)_{H^s} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi$$

est évident. Démontrons que c'est un espace complet. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de H^s. Par définition de la norme, la suite $(\widehat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de l'espace $L^2(\mathbb{R}^d; (1+|\xi|^2)^s d\xi)$. Donc, il existe une fonction $\widetilde{u}$ appartenant à l'espace $L^2(\mathbb{R}^d; (1+|\xi|^2)^s d\xi)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{u}_n - \widetilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d;(1+|\xi|^2)^s d\xi)} = 0. \tag{2.1}$$

En particulier, la suite $(\widehat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\widetilde{u}$ dans l'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées. Soit $u = \mathcal{F}^{-1}\widetilde{u}$. Comme la transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}'$ dans lui-même, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers u dans l'espace $\mathcal{S}'$, mais aussi dans H^s d'après (2.1). ■

Remarque. Dit sèchement, ce qui précède n'est rien d'autre que le fait que la transformée de Fourier est un isomorphisme isométrique de H^s sur $L^2(\mathbb{R}^d; (1+|\xi|^2)^s d\xi)$.

Proposition 2.1.2. *Soit m un entier positif. L'espace $H^m(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions u de L^2 dont toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à m sont des distributions appartenant à L^2. De plus, la norme*

$$\widetilde{\|u\|}_{H^m} \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2}}$$

munit l'espace H^m d'une structure d'espace de Hilbert et cette norme est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^s}$.

Preuve : Le fait que

$$\widetilde{\|u\|}^2_{H^m} = \widetilde{(u|u)}_{H^m} \quad \text{avec} \quad \widetilde{(u|v)}_{H^m} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u(x)\overline{\partial^\alpha v(x)}dx$$

assure que la norme $\widetilde{\|}\cdot\|_{H^m}$ provient d'un produit scalaire. De plus, il existe une constante C telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d\,,\ C^{-1}\sum_{|\alpha|\leq m} |\xi|^{2|\alpha|} \leq (1+|\xi|^2)^m \leq C\sum_{|\alpha|\leq m} |\xi|^{2|\alpha|}. \tag{2.2}$$

Comme la transformée de Fourier est, à une constante près, une isométrie de L^2 sur L^2, alors on a

$$\partial^\alpha u \in L^2 \iff \xi^\alpha \widehat{u} \in L^2.$$

Donc, on en déduit que

$$u \in H^m \iff \forall \alpha \,/\, |\alpha| \leq m\,,\ \partial^\alpha u \in L^2.$$

Enfin, l'inégalité (2.2) assure l'équivalence des normes grâce au fait que la transformation de Fourier est une isométrie à une constante près. D'où la proposition. ■

Théorème 2.1.1. *Soit s un réel quelconque.*

(i) L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

(ii) La multiplication par une fonction de $\mathcal{S}$ est une fonction continue de H^s dans lui-même.

Preuve : Pour démontrer le premier point de ce théorème, considérons une distribution u de H^s telle que, pour toute fonction de test φ, on ait $(\varphi|u)_{H^s} = 0$. Ceci signifie que, pour toute fonction test φ, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(\xi)(1+|\xi|^2)^s \overline{\widehat{u}(\xi)}d\xi = 0.$$

Vu que $\mathcal{S}$ est continûment inclus dans H^s (cf exercice 2.1, que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{S}$, et que la transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans lui-même, on a, pour toute fonction f de $\mathcal{S}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)(1+|\xi|^2)^s \overline{\widehat{u}(\xi)}d\xi = 0.$$

Comme la multiplication par $(1+|\xi|^2)^{-s}$ envoie continûment $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ (exercice: vérifiez-le), ceci entraîne que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}\,,\ \langle \overline{\widehat{u}}, \varphi \rangle = 0$$

donc $\widehat{u} = 0$ et donc $u = 0$.

Démontrons maintenant le second point du théorème. Cette démonstration est présentée ici à titre culturel. D'après le théorème VI. 3.28 page 103 de [3] et la formule d'inversion de Fourier, on sait que

$$\widehat{\varphi u} = (2\pi)^{-d} \widehat{\varphi} \star \widehat{u}.$$

Il s'agit de majorer la norme L^2 de la fonction définie par

$$U(\xi) = (1 + |\xi^2|)^{\frac{s}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)| \times |\widehat{u}(\eta)| d\eta.$$

Posons $I_1(\xi) = \{\eta \,/\, 2|\xi - \eta| \leq |\eta|\}$ et $I_2(\xi) = \{\eta \,/\, 2|\xi - \eta| \geq |\eta|\}$. Il est clair que l'on a

$$\begin{aligned} U(\xi) &= U_1(\xi) + U_2(\xi) \quad \text{avec} \\ U_j(\xi) &= (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \int_{I_j(\xi)} |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)| \times |\widehat{u}(\eta)| d\eta. \end{aligned}$$

Tout d'abord, observons que si $\eta \in I_1(\xi)$,alors on a

$$\frac{1}{2}|\eta| \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}|\eta|.$$

On en déduit que, pour tout réel s, il existe une constante C telle que, pour tout couple (ξ, η) tel que η appartienne à $I_1(\xi)$, on ait

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq C(1 + |\eta|^2)^s.$$

D'où il vient que

$$U_1(\xi) \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)|(1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)| d\eta.$$

Comme $\widehat{\varphi}$ appartient à $\mathcal{S}$, en particulier $\widehat{\varphi}$ appartient à L^1. D'après les inégalités de Young,

$$\|U_1\|_{L^2} \leq C \|\widehat{\varphi}\|_{L^1} \|u\|_{H^s}.$$

Reste à traiter U_2. Pour $\eta \in I_2(\xi)$, on a $|\eta| \leq 2|\xi - \eta|$. Donc on peut écrire

$$\begin{aligned} U_2(\xi) &\leq (1 + |\xi|^2)^{\frac{|s|}{2}} \int_{I_2(\xi)} |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)|(1 + |\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)| d\eta \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)|(1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|} (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)| d\eta. \end{aligned}$$

On sait que $\widehat{\varphi}$ appartient à $\mathcal{S}$. Il existe donc une constante C telle que

$$|\widehat{\varphi}(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|^2)^{-\frac{d+1}{2} - |s|}.$$

D'où l'on obtient que

$$U(\xi) \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi - \eta|^2)^{-\frac{d+1}{2}} (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)| d\eta.$$

D'où $\|U_2\|_{L^2} \leq C\|u\|_{H^s}$; la démonstration du théorème est ainsi achevée. ■

2.2 L'espace de $H_0^1(\Omega)$ et les espaces $H^{-1}(\Omega)$

Dans cette partie, et sauf mention expresse du contraire, Ω désignera un domaine borné de $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.2.1. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est, par définition l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ au sens de la norme $H^1(\mathbb{R}^d)$. L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est l'ensemble des distributions u sur Ω telles que*

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}\leq 1} |\langle u,\varphi\rangle| < \infty.$$

Proposition 2.2.1. *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme*

$$\Big(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{1\leq j\leq d} \|\partial_j u\|_{L^2(\Omega)}^2\Big)^{\frac12}.$$

La démonstration est un exercice facile laissé au lecteur. Le théorème suivant est très important.

Théorème (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω un ouvert* **borné** *de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante C telle que*

$$\forall \varphi\in H_0^1(\Omega)\,,\ \|\varphi\|_{L^2} \leq C\Big(\sum_{j=1}^d \|\partial_j\varphi\|_{L^2}^2\Big)^{\frac12}.$$

Preuve : Soit R un réel strictement positif tel que l'ouvert borné Ω soit inclus dans $]-R,R[\times\mathbb{R}^{d-1}$. On a alors, pour toute fonction test φ,

$$\varphi(x_1,\cdots,x_d) = \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}(y_1,x_2,\cdots,x_d)dy_1.$$

L'inégalité de Schwarz implique que

$$|\varphi(x_1,\cdots,x_d)|^2 \leq 2R\int_{-R}^{x_1}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}(y_1,x_2,\cdots,x_d)\right|^2 dy_1.$$

D'où en intégrant en x_1, on trouve que

$$\int_\Omega |\varphi(x_1,\cdots,x_d)|^2dx_1 \leq 2R\int_{\Omega\times]-R,R[}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}(y_1,x_2,\cdots,x_d)\right|^2 dy_1.$$

Puis, en intégrant par rapport aux $d-1$ variables restantes, on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\varphi(x_1,\cdots,x_d)|^2dx &\leq 2R\int_{\Omega\times]-R,R[}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}(y_1,x_2,\cdots,x_d)\right|^2 dy_1dx_2\cdots dx_d\\ &\leq 4R^2\sum_{j=1}^d\|\partial_j\varphi\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, le théorème est démontré. Il implique de manière évidente le corollaire suivant. ■

Corollaire 2.2.1. *L'application*

$$u \mapsto \Big(\sum_{1\leq j\leq d} \|\partial_j u\|_{L^2}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

munit l'espace $H_0^1(\Omega)$ d'une structure d'espace de Hilbert équivalente à la structure définie ci-dessus.

L'espace $H^{-1}(\Omega)$ s'identifie naturellement au dual de $H_0^1(\Omega)$ grâce au théorème suivant.

Théorème 2.2.1. *L'application bilinéaire définie par*

$$B\left\{\begin{array}{ccc} H^{-1}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (u,\varphi) & \mapsto & \langle u,\varphi\rangle \end{array}\right.$$

se prolonge en une application bilinéaire continue de $H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$, toujours notée B. De plus, l'application δ_B définie par

$$\delta_B\left\{\begin{array}{ccc} H^{-1}(\Omega) & \rightarrow & (H_0^1(\Omega))' \\ u & \mapsto & \delta_B(u)(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} B(u,\varphi) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme linéaire isométrique, c'est-à-dire que la forme bilinéaire B identifie l'espace $H^{-1}(\Omega)$ au dual de $H_0^1(\Omega)$.

Preuve : Le fait que l'application bilinéaire B se prolonge n'est rien d'autre que la traduction dans la présente situation de l'exercice 1.3. Soit ℓ une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Sa restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution u sur Ω telle que

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)\,,\ \langle u,\varphi\rangle = \langle \ell,\varphi\rangle.$$

D'où le théorème par définition de la norme sur $(H_0^1(\Omega))'$. ■

Le théorème ci-dessous décrit quelques propriétés de l'espace $H^{-1}(\Omega)$.

Théorème 2.2.2.
- *L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est l'ensemble des restrictions à Ω des éléments de $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$,*
- *La norme $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega)}$ définie ci-dessus est une norme hilbertienne, c'est-à-dire qu'il existe une forme sesquilinéaire $(\cdot|\cdot)_{H^{-1}(\Omega)}$ telle que l'on ait, pour tout $u\in H^{-1}(\Omega)$,*

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 = (u|u)_{H^{-1}(\Omega)}.$$

- *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans l'espace $H^{-1}(\Omega)$.*

La démonstration de ce théorème repose sur la construction des deux applications suivantes:

- L'application pr est l'application linéaire de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$pr(f)_{|H_0^1(\Omega)} = f \quad \text{et} \quad pr(f)_{|(H_0^1(\Omega))^\perp} = 0, \tag{2.3}$$

- l'application r est la restriction (au sens des distributions) sur Ω.

Nous allons démontrer le petit lemme suivant.

Lemme. *L'application pr est isométrique de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ et l'application r est linéaire continue de $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. De plus, on a*

$$r \circ pr = \mathrm{Id}_{H^{-1}(\Omega)}\,.$$

Preuve : D'après l'exercice 2.6, on sait que

$$\|pr(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\leq 1} |\langle pr(u), \varphi\rangle|.$$

La projection orthogonale sur un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert étant une application linéaire de norme 1, on peut écrire, vu la définition de pr,

$$\begin{aligned} \|pr(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &= \sup_{\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\leq 1} |\langle pr(u), \varphi\rangle| \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{H^1_0(\Omega)}\leq 1} |\langle u, \varphi\rangle| \\ &= \|u\|_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

De plus, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ étant par définition dense dans $H^1_0(\Omega)$, on a, pour toute distribution v de $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$, L'application r est donc continue de $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. De plus, il est clair que l'on a, pour toute fonction $\varphi \in H^1_0(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle r\circ pr(u), \varphi\rangle &= \langle pr(u), \varphi\rangle \\ &= \langle u, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

D'où le lemme. ∎

Revenons à la démonstration du théorème. Le premier point est clairement assuré par le lemme. Quant au deuxième point, vu l'inégalité (2.4), il suffit de poser

$$(u|v)_{H^{-1}(\Omega)} \stackrel{\text{déf}}{=} (pr(u)|pr(v))_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}$$

pour le démontrer.

Démontrons maintenant que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^{-1}(\Omega)$. Pour ce faire, considérons une distribution u dans $H^{-1}(\Omega)$. Le théorème 2.1.1 dit en particulier que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$. Il existe donc une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = pr(u) \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\mathbb{R}^d).$$

D'après le lemme précédent, ceci implique que

$$\lim_{n\to\infty} r(\psi_n) = u \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega).$$

Mais, la restriction d'une fonction L^2 étant une fonction L^2, et $\mathcal{D}(\Omega)$ étant dense dans $L^2(\Omega)$, il existe une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que, pour tout entier n, on ait

$$\|r(\psi_n) - \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 2^{-n}.$$

Comme la norme $L^2(\Omega)$ est plus grande que la norme $H^{-1}(\Omega)$, il est clair que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = u \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega).$$

2.3 Inclusions de Sobolev

Le but de cette section est d'étudier les propriétés d'inclusion des espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans les espaces L^p. Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.3.1. *Si s est strictement supérieur à $d/2$, alors l'espace H^s est continûment inclus dans l'espace des fonctions continues nulles à l'infini. Si s est un réel positif strictement inférieur à $d/2$, alors l'espace H^s est continûment inclus dans $L^{\frac{2d}{d-2s}}$.*

Preuve : Le premier point du théorème est très facile à démontrer. On utilise le fait que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-d}\|\widehat{u}\|_{L^1} \tag{2.5}$$

Ensuite, on écrit que pour toute fonction régulière u, on a

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq (1+|\xi|^2)^{-s/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\widehat{u}(\xi)|. \tag{2.6}$$

Le fait que s soit strictement supérieur à $d/2$ implique que la fonction

$$\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{-s/2}$$

appartient à L^2. Donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|\widehat{u}\|_{L^1} \leq \left(\int (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^s}.$$

On conclut alors aisément en invoquant la densité de $\mathcal{D}$ dans H^s.

La démonstration du second point est plus délicate. L'indice $p = 2d/(d-2s)$ peut être deviné grâce à un argument d'homogénéité. En effet, soit v une fonction sur $\mathbb{R}^d$, désignons par v_λ la fonction $v_\lambda(x) = v(\lambda x)$. On a

$$\|v_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{d}{p}}\|v\|_{L^p}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\int |\xi|^{2s}|\widehat{v_\lambda}(\xi)|^2 d\xi &= \lambda^{-2d}\int |\xi|^{2s}|\widehat{v}(\lambda^{-1}\xi)|^2 d\xi \\ &= \lambda^{-d+2s}\|v\|^2_{\dot{H}^s},\end{aligned}$$

en posant

$$\|v\|_{\dot{H}^s} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s}|\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

Les deux quantités $\|\cdot\|_{L^p}$ et $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ ont donc la même homogénéité, c'est-à-dire qu'elles se comporte de la même manière par changement d'unité de longueur. Il est donc de bon goût de les comparer. On peut supposer aussi que $\|f\|_{\dot{H}^s} = 1$. Après ces remarques préliminaires, on utilise le résultat de l'exercice 1.7 : pour tout p de l'intervalle $]1,+\infty[$ et toute fonction mesurable f, on a

$$\|f\|^p_{L^p} = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} m(|f|>\lambda) d\lambda.$$

Nous allons décomposer f de manière à faire apparaître des normes de type L^2. Pour ce faire, découpons f en "basses" et "hautes" fréquences en posant

$$f = f_{1,A} + f_{2,A} \quad \text{avec} \quad f_{1,A} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,A)}\widehat{f}) \quad \text{et} \quad f_{2,A} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{{}^cB(0,A)}\widehat{f}). \tag{2.7}$$

Comme le support de la transformée de Fourier de $f_{1,A}$ est compact, la fonction $f_{1,A}$ est bornée et plus précisément,

$$\begin{aligned}
\|f_{1,A}\|_{L^\infty} &\leq (2\pi)^{-d}\|\widehat{f_{1,A}}\|_{L^1}\\
&\leq (2\pi)^{-d}\int_{B(0,A)}|\xi|^{-s}|\xi|^{s}|\widehat{f}(\xi)|d\xi\\
&\leq (2\pi)^{-d}\Big(\int_{B(0,A)}|\xi|^{-2s}d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C_sA^{\frac{d}{2}-s}\|f\|_{\dot{H}^s}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire, on a, pour tout réel strictement positif A,

$$\{|f|>\lambda\}\subset\{|f_{1,A}|>\frac{\lambda}{2}\}\cup(|f_{2,A}|>\frac{\lambda}{2}).$$

D'après l'inégalité (2.8) ci-dessus, on a

$$A = A_\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\lambda}{4C_s}\right)^{\frac{p}{d}} \Longrightarrow m\left(\left\{|f_{1,A}|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right) = 0.$$

On en déduit donc que

$$\|f\|_{L^p}^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}m\Big(\Big\{|f_{2,A_\lambda}|>\frac{\lambda}{2}\Big\}\Big)d\lambda.$$

Il est bien connu (c'est l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev) que

$$\begin{aligned}
m\left(\left\{|f_{2,A_\lambda}|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right) &= \int_{(\{|f_{2,A_\lambda}|>\frac{\lambda}{2}\})}dx\\
&\leq \int_{(\{|f_{2,A_\lambda}|>\frac{\lambda}{2}\})}\frac{4|f_{2,A_\lambda}(x)|^2}{\lambda^2}dx\\
&\leq 4\frac{\|f_{2,A_\lambda}\|_{L^2}^2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Il en résulte donc que l'on a

$$\|f\|_{L^p}^p \leq 4p\int_0^\infty \lambda^{p-3}\|f_{2,A_\lambda}\|_{L^2}^2d\lambda. \tag{2.9}$$

Mais, on sait que la transformée de Fourier est (à une constante près) une isométrie de L^2 ; on a donc

$$\|f_{2,A_\lambda}\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-d}\int_{(|\xi|\geq A_\lambda)}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

D'après l'inégalité (2.9), il vient

$$\|f\|_{L^p}^p \leq 4p(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d}\lambda^{p-3}\mathbf{1}_{\{(\lambda,\xi)\,/\,|\xi|\geq A_\lambda\}}(\lambda,\xi)|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi d\lambda.$$

Or, par définition de A_λ, on a

$$|\xi| \geq A_\lambda \Longleftrightarrow \lambda \leq C_\xi \stackrel{\text{déf}}{=} 4C_s|\xi|^{\frac{d}{p}}.$$

D'après le théorème de Fubini, on a pour $p > 2$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p}^p &\leq 4p(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_0^{C_\xi}\lambda^{p-3}d\lambda\right)|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\\
&\leq 4\frac{p(2\pi)^d}{p-2}(4C_s)^{p-2}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\frac{d(p-2)}{p}}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Comme $2s = \dfrac{d(p-2)}{p}$, on a bien $p > 2$. Ceci achève la preuve du théorème. ■

Par interpolation (voir exercice 2.5), on peut en déduire les inégalités suivantes, qui sont un cas particulier d'inégalité dite de Gagliardo-Nirenberg.

Corollaire 2.3.1. *Si $d \geq 2$ et si $p \in [2, \infty)$ est tel que $1/p > 1/2 - 1/d$, il existe alors une constante C tel que, pour toute fonction $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$,*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^2}^{1-\sigma}\|\nabla u\|_{L^2}^{\sigma} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{d(p-2)}{2p}. \tag{2.10}$$

2.4 Compacité

Nous allons dans cette section démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.4.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. L'inclusion de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*

Preuve : La démonstration repose sur la transformée de Fourier des fonctions périodiques. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\overline{\Omega} \subset Q \stackrel{\text{déf}}{=}]0, 2\pi[^d$. Définissons pour $u \in H_0^1(\Omega)$ la fonction $2\pi\mathbb{Z}^d$ périodique $\widetilde{u}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \widetilde{u}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} u(x - 2\pi j).$$

Définissons les coefficients de Fourier pour $k \in \mathbb{Z}^d$ par

$$\widetilde{u}_k \stackrel{\text{déf}}{=} \int_Q e^{-i(k|x)}u(x)\frac{dx}{(2\pi)^d}\cdot$$

Par intégration par parties, on obtient, grâce à l'inégalité de Bessel,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2|\widetilde{u}_k|^2 \leq C\|\nabla u\|_{L^2(Q)}^2.$$

Définissons la suite $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ d'applications linéaires

$$T_N \left\{ \begin{array}{rcl} H_0^1(\Omega) & \rightarrow & L^2(Q) \\ u & \mapsto & \displaystyle\sum_{|k|\leq N} \widetilde{u}_k e^{i(k|x)} \end{array} \right.$$

où $L^2(Q)$ est identifié aux fonctions localement L^2 qui sont $2\pi\mathbb{Z}^d$ périodiques. De manière évidente, l'image de T_N est de dimension finie. De plus, on a

$$
\begin{aligned}
\|u-(T_N u)_{|\Omega}\|^2_{L^2(\Omega)} & \leq \|\widetilde{u}-T_N u\|^2_{L^2(Q)} \\
& \leq \Big\| \sum_{|k|>N} \widetilde{u}_k e^{i(k|x)} \Big\|^2_{L^2(Q)} \\
& \leq \frac{C^2}{N^2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Il en résulte que

$$\|\operatorname{Id} - T_{N|\Omega}\|_{\mathcal{L}(H^1_0(\Omega);L^2(\Omega))} \leq \frac{C}{N}\,\cdot$$

L'injection de $H^1_0(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est donc limite d'une suite d'opérateurs de rang fini. Le résultat de l'exercice 1.2, permet alors de conclure à la compacité de l'inclusion de $H^1_0(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. ■

2.5 Exercices

Exercice 2.1. *Démontrez que l'espace $\mathcal{S}$ est continûment inclus dans l'espace H^s, et ce pour tout réel s.*

Exercice 2.2. *Démontrer que la masse de Dirac δ_0 appartient à l'espace $H^{-\frac{d}{2}-\varepsilon}$ pour tout réel strictement positif ε, mais que δ_0 n'appartient pas à l'espace $H^{-\frac{d}{2}}$.*

Exercice 2.3. *Démontrez que, pour toute distribution à support compact u, il existe un réel s tel que u appartienne à l'espace de Sobolev H^s.*

Exercice 2.4. *Démontrer que la constante 1 n'appartient à H^s pour aucun réel s.*

Exercice 2.5. Soit (s,t) un couple de réels tels que $s<t$. Montrer que pour tout $u\in H^t$ et $\theta\in[0,1]$, on a

$$\|u\|_{H^{\theta s+(1-\theta)t}} \leq \|u\|^{\theta}_{H^s}\|u\|^{1-\theta}_{H^t}.$$

Exercice 2.6. *Démontrer que*

$$\|f\|_{H^{-s}} = (2\pi)^d \sup_{\varphi\in\mathcal{S}\|\varphi\|_{H^s}\leq 1}\langle f,\varphi\rangle = (2\pi)^d \sup_{\varphi\in H^s\|\varphi\|_{H^s}\leq 1}\langle f,\varphi\rangle.$$

Exercice 2.7. *Soit s un réel de l'intervalle $]0,1[$.*

1) Démontrer que l'espace H^s est l'espace des fonctions u de L^2 telles que

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{d+2s}}\,dx\,dy.$$

Indication: *Utiliser Fourier-Plancherel.*

Démontrer de plus qu'il existe une constante C telle que, pour toute fonction u de H^s, on ait

$$C^{-1}\|u\|^2_{H^s} \leq \|u\|^2_{L^2} + \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{d+2s}}\,dx\,dy \leq C\|u\|^2_{H^s}.$$

Exercice 2.8. *Soit $\mathcal{F}L^1 = \{u\in\mathcal{S}' \,/\, \widehat{u}\in L^1\}$. Démontrez que, pour tout réel positif s, le produit est une application bilinéaire continue de $\big(\mathcal{F}L^1\cap H^s\big)\times\big(\mathcal{F}L^1\cap H^s\big)$. Qu'en déduire lorsque s est strictement supérieur à $d/2$?*

Exercice 2.9. *Soit s un réel strictement supérieur à $1/2$. Démontrez que l'application restriction γ définie par*

$$\gamma \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1}) \\ \varphi & \longmapsto & \gamma(\varphi) : (x_2, \cdots, x_d) \mapsto \varphi(0, x_2, \cdots, x_d) \end{array} \right.$$

se prolonge en une application continue de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$.
Indication : *Écrire que*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}^{d-1}}\varphi(0, \xi_2, \cdots, \xi_d) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_d) d\xi_1.$$

Chapter 3

Le problème de Stokes

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un domaine borné de $\mathbb{R}^d$. Avant d'aborder le problème de Stokes, nous allons résoudre un problème plus simple, le problème de Dirichlet.

3.1 Le problème de Dirichlet

Il s'agit de résoudre le problème suivant : étant donnée une distribution f de $H^{-1}(\Omega)$, trouver u dans $H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f$ (au sens des distributions). Le théorème de Dirichlet est le suivant:

Théorème 3.1.1. *Étant donné f dans $H^{-1}(\Omega)$, il existe une unique solution u dans $H_0^1(\Omega)$ de $-\Delta u = f$ au sens des distributions dans Ω. De plus, l'application B qui à f associe u est une isométrie surjective de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$.*

Preuve : Le point clef de la démonstration est le théorème de représentation de Riesz. D'après ce théorème, la forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ associée à f peut se représenter comme le produit scalaire par une fonction de $H_0^1(\Omega)$. Plus précisément, il existe une unique fonction u de $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall h \in H_0^1(\Omega)\,,\ (u|h)_{H_0^1} = \langle f, h\rangle.$$

Par définition du produit scalaire sur H_0^1 on a $(u|h)_{H_0^1} = \langle -\Delta u, h\rangle$. D'où

$$\forall h \in H_0^1(\Omega)\,,\ \langle -\Delta u, h\rangle = \langle f, h\rangle. \tag{3.1}$$

Le théorème est ainsi démontré. ■

Nous allons maintenant énoncer un résultat classique sur la structure spectrale du Laplacien dans un domaine borné.

Théorème 3.1.2. *Il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tendant vers l'infini et une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ noté $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(\lambda_k^{-1}e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$, la suite $(\lambda_k e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit une base hilbertienne de $H^{-1}(\Omega)$ et telle que*

$$-\Delta e_k = \lambda_k^2 e_k.$$

Nous démontrerons ce théorème dans le cadre légérement plus délicat du problème de Stokes. Aussi, nous l'admettons pour le moment.

3.2 Le problème de Stokes stationnaire

Il s'agit de l'analogue du théorème de Dirichlet sur les ensembles des champs de vecteurs de divergence nulle. Définissons les espaces avec lesquels nous allons travailler.

Definition. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $\mathcal{V}(\Omega)$ l'espace des champs de vecteurs dont les composantes appartiennent à $H_0^1(\Omega)$. On désigne par $\mathcal{V}_\sigma(\Omega)$ l'espace des champs de vecteurs de $\mathcal{V}(\Omega)$ à divergence nulle. On désigne par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{V}_\sigma(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. On désigne par $\mathcal{V}'(\Omega)$ l'espace des champs de vecteurs dont les composantes sont $H^{-1}(\Omega)$.*

Si E est un sous-espace de $\mathcal{V}(\Omega)$, le polaire de E noté E° est l'espace des champs de vecteurs f dans $\mathcal{V}'(\Omega)$ tels que, pour tout $v \in E$,

$$\langle f, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{d} \langle f_j, v_j \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} = 0.$$

Si F est un sous espace de $\mathcal{V}'(\Omega)$, le polaire $F^\star$ est l'espace des champs de vecteurs $v \in \mathcal{V}(\Omega)$ tels que pour tout $f \in F$, on ait $\langle f, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = 0$.

Afin d'alléger l'écriture, nous omettrons de mentionner l'ouvert borné Ω dans les notations.

3.2.1 Propriétés de base

Énonçons l'analogue du théorème de Dirichlet dans ce cadre.

Théorème 3.2.1. *Soit f un champ de vecteurs dont les composantes sont dans H^{-1}. Il existe une unique solution u dans $\mathcal{V}_\sigma$ de*

$$-\Delta u - f \in \mathcal{V}_\sigma^\circ$$

ce qui signifie que, pour tout champ de vecteurs v de $\mathcal{V}_\sigma$, on a

$$-\langle \Delta u, v \rangle = \langle f, v \rangle. \tag{3.2}$$

Preuve : On associe à f une forme linéaire sur $\mathcal{V}_\sigma$, qui à tout $v \in \mathcal{V}_\sigma$ associe $\langle f, v \rangle$. Par le théorème de Riesz il existe un unique $u \in \mathcal{V}_\sigma$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{V}_\sigma, \quad (u|v)_{H_0^1} = \langle f, v \rangle,$$

d'où le résultat. ■

Remarques

- Le fait qu'un champ de vecteurs g de H^{-1} appartienne à l'orthogonal (au sens de la dualité) de $\mathcal{V}_\sigma$ implique en particulier que pour toute fonction φ de $\mathcal{D}$, on a

$$\langle g^i, -\partial_j \varphi \rangle + \langle g^j, \partial_i \varphi \rangle = 0.$$

  Cela entraîne que $\partial_j g^i - \partial_i g^j = 0$, c'est-à-dire que g est de rotationnel nul.

- On peut trouver des domaines très simples pour lesquels il existe des champs de vecteurs de H^{-1} qui sont de rotationnel nul mais qui ne sont pas des gradients.

En effet : plaçons-nous sur le domaine du plan $\Omega \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < R_1 < |x| < R_2\}$ et considèrons le champ de vecteurs f défini par $(-\partial_2 \log|x|, \partial_1 \log|x|)$. Nous avons alors le lemme suivant.

Proposition. *Le champ de vecteurs f est de divergence et de rotationnel nuls, mais n'est pas un gradient.*

Preuve : Le fait que f soit de divergence nulle est immédiat et qu'il soit de rotationnel nul résulte du fait que la fonction $x \mapsto \log|x|$ est harmonique sur Ω.

Supposons par l'absurde que f est un gradient. Comme f est une fonction C^∞, ce ne peut être le gradient que d'une fonction C^∞. Soit p cette fonction. Considérons le flot de $f = -\nabla p$. Par définition de f, ses trajectoires (que l'on peut calculer explicitement) sont périodiques. Considérons γ une trajectoire quelconque. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(p \circ \gamma)(t) &= \left(\frac{d\gamma}{dt}\Big|\nabla p(\gamma(t))\right)_{\mathbb{R}^2} \\ &= -|\nabla p(\gamma(t))|^2. \end{aligned}$$

La fonction $p \circ \gamma$ est donc décroissante. Par périodicité, on en déduit qu'elle est constante et l'on a donc $\nabla p(\gamma(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cette propriété étant vrai pour toute trajectoire, on conclut que $f = 0$, ce qui est visiblement contraire aux hypothèses. ■

Comme le montre la proposition suivante, la condition d'appartenance à $\mathcal{V}_\sigma^\circ$ est plus forte que la condition de rotationnel nul.

Théorème 3.2.2. *On suppose que le bord du domaine est une hypersurface de classe C^1. Soit f un élément de $\mathcal{V}_\sigma^\circ$. Alors il existe p dans L^2 tel que $f = -\nabla p$.*

Remarque *Cette démonstration est présentée ici à titre culturel et ne fait pas partie du programme strict du cours.*

Désignons par ∇L^2 l'ensemble des champs de vecteurs f à coefficients H^{-1} tels qu'il existe une fonction p de L^2 l'on ait $f = \nabla p$. Soit v un champ de vecteurs dans H^1_0 appartenant à $(\nabla L^2)^\star$, c'est-à-dire un champ de vecteurs de H^1_0 tel que

$$\forall f \in \nabla L^2\,,\ \langle v, f\rangle = 0.$$

On a donc pour toute fonction p de L^2,

$$\begin{aligned} \langle v, \nabla p\rangle &= -\langle \operatorname{div} v, p\rangle \\ &= -\int_\Omega \operatorname{div} v(x) p(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi donc $\operatorname{div} v = 0$ et donc $(\nabla L^2)^\star \subset \mathcal{V}_\sigma$. Il en résulte donc que

$$(\mathcal{V}_\sigma)^\circ \subset ((\nabla L^2)^*)^\circ = \overline{\nabla L^2}^{H^{-1}}. \tag{3.3}$$

Ceci signifie que si f appartient à $\mathcal{V}_\sigma^\circ$, alors il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de L^2 telle que la suite $(\nabla p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans H^{-1}. Démontrer le théorème 3.2.2 ci-dessus revient donc à démontrer que l'image de

$$\nabla \left\{ \begin{array}{ccc} L^2 & \to & H^{-1} \\ p & \mapsto & \nabla p \end{array} \right.$$

est fermée. C'est ici, et uniquement ici, que va intervenir la régularité du bord. Supposons démontré le lemme suivant.

Lemme 3.2.1. *Une distribution p de H^{-1} appartient à L^2 si et seulement si ses dérivées partielles premières appartiennent aussi à H^{-1}. De plus, il existe une constante C telle que*

$$\|p\|_{L^2}^2 \leq C(\|p\|_{H^{-1}}^2 + \|\nabla p\|_{H^{-1}}^2). \tag{3.4}$$

On en tire alors le corollaire suivant

Corollaire 3.2.1. *Supposons l'inégalité (3.4) vraie sur Ω. Alors il existe une constante C telle que, pour toute fonction p appartenant à*

$$L_0^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{ p \in L^2 \,/\, \int_\Omega p(x)dx = 0 \Big\},$$

on ait

$$\|p\|_{L^2} \leq C\|\nabla p\|_{H^{-1}}.$$

Preuve : L'inégalité implique évidemment que ∇L^2 est fermé et donc le théorème 3.2.2. Pour démontrer ce corollaire, procédons par l'absurde en considérant une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de L_0^2 de norme 1 telle que la suite $(\nabla p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende fortement vers 0 dans H^{-1}. L'inclusion de L^2 dans H^{-1} étant compacte (exercice: démontrez-le rigoureusement), il existe une fonction p de L^2 et une fonction d'extraction ϕ telles que la suite $(p_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers p dans H^{-1}. En particulier, la suite $(\nabla p_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ∇p au sens des distributions. Donc $\nabla p = 0$ et donc $p = 0$ car la fonction p est supposée de moyenne nulle sur Ω. Le passage à la limite dans l'inégalité (3.4) est contradictoire avec le fait que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée de norme 1 dans L^2. ∎

Démontrons maintenant que le lemme 3.2.1 est vrai si le domaine Ω est de classe C^1, c'est-à-dire si le bord du domaine est une hypersurface de classe C^1. Sous cette hypothèse, il existe une famille finie $(U_j)_{1\leq j\leq N}$ d'ouverts de $\mathbb{R}^d$ qui recouvre le bord de $\partial\Omega$ et telle que, pour tout j, il existe un C^1-difféomorphisme χ_j de U_j sur V_j tel que

$$\chi_j(U_j \cap \overline{\Omega}) = V_j \cap \mathbb{R}_+^d \quad \text{avec} \quad \mathbb{R}_+^d \stackrel{\text{déf}}{=} \{x = (x_1, \cdots, x_d) = (x', x_d) \,/\, x_d \geq 0\}.$$

Il existe de plus un ouvert U_0 dont l'adhérence est inclue dans Ω et tel que la famille $(U_j)_{0\leq j\leq N}$ recouvre $\overline{\Omega}$. On considère alors une partition de l'unité $(\varphi_j)_{0\leq j\leq N}$ de classe C^∞ subordonnée à la famille $(U_j)_{0\leq j\leq N}$. Soit p une distribution de H^{-1}; on écrit

$$p = \sum_{j=0}^N p_j \quad \text{avec} \quad p_j \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi_j p.$$

Il est clair que $\|p_j\|_{H^{-1}} \leq C\|p\|_{H^{-1}}$. De plus, si ∇p appartient à H^{-1}, alors, comme on a $\nabla p_j = p\nabla\varphi_j + \varphi_j \nabla p$, il en résulte que

$$\|\nabla p_j\|_{H^{-1}} \leq C\|p\|_{H^{-1}} + C\|\nabla p\|_{H^{-1}}.$$

Il suffit maintenant de démontrer l'inégalité (3.4) pour chaque p_j. Comme la distribution p_0 est à support compact inclus dans Ω, la propriété est évidente pour p_0 car p_0 et ses dérivées premières appartiennent à $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ et la propriété est évidente par passage à la transformée de Fourier. Lorsque $j \geq 1$, nous allons utiliser les redressements du bord. Il est clair que, comme χ_j est un difféomorphisme de classe C^1, l'application $v \mapsto v \circ \chi_j^{-1}$ est continue de

$H^1_0(V_j\cap\mathbb{R}^d_+)$ dans $H^1_0(U_j\cap\Omega)$. Par dualité et changement de variable, on en déduit la continuité de l'application

$$\chi_j^\star\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} H^{-1}(U_j\cap\Omega) & \to & H^{-1}(V_j\cap\mathbb{R}^d_+)\\ f & \mapsto & v\mapsto\langle f, J\chi_j\circ\chi_j^{-1}\times v\circ\chi_j^{-1}\rangle.\end{array}\right.$$

On est alors ramené à démontrer la propriété sur $\mathbb{R}^d_+$. Pour cela, on définit les applications Q et R par

$$Q\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} H^1(\mathbb{R}^d) & \to & H^1_0(\mathbb{R}^d_+)\\ u & \mapsto & (Qu)(x)=\left\{\begin{array}{l} 0\quad \text{si}\quad x_d<0,\\ u(x)+3(u(x',-x_d)-4u(x',-2x_d)\quad\text{si}\quad x_d\geq 0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

et

$$R\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} H^1(\mathbb{R}^d) & \to & H^1_0(\mathbb{R}^d_+)\\ u & \mapsto & (Ru)(x)=\left\{\begin{array}{l} 0\quad \text{si}\quad x_d<0\\ u(x)-3u(x',-x_d)+2u(x',-2x_d)\quad\text{si}\quad x_d\geq 0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Le fait que les opérateurs Q et R envoient continûment $H^1(\mathbb{R}^d)$ dans $H^1_0(\mathbb{R}^d_+)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ est un exercice facile. De plus, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\circ Q=Q\circ\frac{\partial}{\partial x_j}\quad\text{si}\quad j\neq d\quad\text{et}\quad\frac{\partial}{\partial x_d}\circ R=Q\circ\frac{\partial}{\partial x_d}\cdot\tag{3.5}$$

On considère les applications transposées sur H^{-1}, c'est-à-dire que l'on pose

$${}^tQ\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} H^{-1}(\mathbb{R}^d_+) & \to & H^{-1}(\mathbb{R}^d)\\ f & \mapsto & {}^tQf\ /\ \langle {}^tQf,v\rangle\stackrel{\text{déf}}{=}\langle f,Qv\rangle\end{array}\right.$$

et de même pour R. On a bien sûr les formules suivantes d'après la composition des applications transposées et les relations (3.5):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\circ {}^tQ={}^tQ\circ\frac{\partial}{\partial x_j}\quad\text{si}\quad j\neq d\quad\text{et}\quad\frac{\partial}{\partial x_d}\circ {}^tQ={}^tR\circ\frac{\partial}{\partial x_d}\cdot\tag{3.6}$$

En appliquant ces relations à la distribution $\widetilde{p}_j\stackrel{\text{déf}}{=}\chi_j^\star p_j$ de $H^{-1}(\mathbb{R}^d_+)$, on trouve que

$${}^tQ\,\widetilde{p}_j\in H^{-1}(\mathbb{R}^d)\quad\text{et}\quad\frac{\partial}{\partial x_j}({}^tQ\,\widetilde{p}_j)\in H^{-1}(\mathbb{R}^d).$$

En lisant cette propriété en terme de transformation de Fourier, on a immédiatement que $\widetilde{p}_j$ est une fonction de $L^2(\mathbb{R}^d)$ et l'on a

$$\|{}^tQ\,\widetilde{p}_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\leq C(\|{}^tQ\,\widetilde{p}_j\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}+\|\nabla{}^tQ\,\widetilde{p}_j\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}).$$

comme Q est l'identité sur les fonctions à support dans $\mathbb{R}^d_+$, la restriction de ${}^tQ\,\widetilde{p}_j$ à $\mathbb{R}^d_+$ est $\widetilde{p}_j$. On a donc

$$\|\widetilde{p}_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}\leq C(\|\widetilde{p}_j\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^d_+)}+\|\nabla\widetilde{p}_j\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^d_+)}).$$

Donc les p_j sont dans L^2 et l'on a

$$\|p_j\|^2_{L^2}\leq C(\|p\|^2_{H^{-1}}+\|\nabla p\|^2_{H^{-1}(\Omega)}).$$

Le théorème 3.2.2 est démontré.

Remarque 3.2.1. *Pour un ouvert* Ω *quelconque on peut en fait démontrer l'existence d'une fonction* p *de* L^2_{loc} *telle que, si* f *appartient à* $\mathcal{V}^\circ_\sigma$, *alors* $f = -\nabla p$.

Le problème de Stokes peut se voir comme un problème posé dans l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{V}_\sigma$, que nous noterons $\mathcal{V}'_\sigma$. C'est un sous-ensemble de l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{V}$ que nous allons décrire ci-dessous, après avoir étudié les propriétés spectrales de l'opérateur de Stokes. Le paragraphe suivant est fondamental pour l'étude des équations de Navier-Stokes car il va présenter précisément le cadre fonctionnel dans lequel nous résoudrons ces équations, tout en fournissant un mode d'approximation des solutions.

3.2.2 Propriétés spectrales de l'opérateur de Stokes

Comme dans le cas du problème de Dirichlet, nous allons appliquer un résultat de théorie spectrale sur les opérateurs audoadjoints compacts pour obtenir le théorème suivant.

Théorème 3.2.3. *Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^d$. *Il existe une base hilbertienne* $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{H}$ *et une suite croissante* $(\lambda_k^2)_{k\in\mathbb{N}}$ *tendant vers l'infini telles que*

$$-\Delta e_k + \nabla \pi_k = \lambda_k^2 e_k,$$

où π_k *est dans* $L^2_{loc}(\Omega)$ *pour tout* k. *De plus,* $(\lambda_k^{-1} e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est une base hilbertienne de* $\mathcal{V}_\sigma$ *muni du produit scalaire* H^1_0.

Pour démontrer ce théorème, introduisons l'opérateur suivant.

Definition. *Désignons par* $\mathcal{B}$ *l'opérateur*

$$\mathcal{B} \; : \; \begin{cases} \mathcal{H} & \rightarrow \quad \mathcal{V}_\sigma \\ f & \mapsto \quad u \,/ - \Delta u - f \in \mathcal{V}^\circ_\sigma. \end{cases}$$

Cet opérateur satisfait à la propriété suivante.

Proposition 3.2.1. *L'opérateur* $\mathcal{B}$ *appartient à* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, *est autoadjoint, injectif et d'image dense dans* $\mathcal{H}$.

Preuve : Considérons un couple (f, g) de $\mathcal{H}^2$. Soit $u = \mathcal{B}f$ et $v = \mathcal{B}g$. Par définition de $\mathcal{B}$, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}f|g)_{L^2} &= \langle u, -\Delta v\rangle \\ &= (\nabla u|\nabla v)_{L^2} \\ &= \langle -\Delta u, v\rangle = (f|\mathcal{B}g)_{L^2}. \end{aligned}$$

Donc l'opérateur $\mathcal{B}$ est bien autoadjoint,

Le fait que $\mathcal{B}$ soit borné est dû au calcul suivant : soit f un champ de vecteurs dans $\mathcal{H}$ et notons $u = \mathcal{B}f$. Alors, en vertu de l'inégalité de Poincaré, on a

$$(\mathcal{B}f|f)_{L^2} = \langle u, -\Delta u\rangle = \|\nabla u\|^2_{L^2} \geq C\|u\|^2_{L^2} = C\|\mathcal{B}f\|^2_{L^2}.$$

Pour démontrer que $\mathcal{B}$ est injectif, observons que le noyau de $\mathcal{B}$ est égal à $\mathcal{V}^\circ_\sigma \cap \mathcal{H}$, qui est exactement $\mathcal{V}^\perp_\sigma$ au sens du produit scalaire L^2. Par définition de $\mathcal{H}$, on a $\mathcal{V}^\perp_\sigma = \{0\}$.

Comme l'adhérence de l'image de $\mathcal{B}$ est égale à l'orthogonal du noyau de $\mathcal{B}$, l'image de $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{H}$. ■

Retournons à la preuve du théorème 3.2.3. Nous allons démontrer le lemme suivant.

Lemme. *L'opérateur $\mathcal{B}$ est un opérateur compact de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.*

Preuve : Par définition de $\mathcal{B}$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}f\|^2_{H^1_0} &= \langle -\Delta\mathcal{B}f, \mathcal{B}f\rangle \\ &= \langle f, \mathcal{B}f\rangle \\ &\leq C\|f\|^2_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Donc l'image de la boule unité de $\mathcal{H}$ est un ensemble borné de $\mathcal{V}_\sigma$. Le théorème 2.4.1 implique que cet ensemble est d'adhérence compacte. D'où le lemme. ■

Revenons à la démonstration du théorème 3.2.3. Le théorème spectral 1.4.1 implique l'existence d'une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ et d'une suite croissante $(\lambda_k^2)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telles que $\mathcal{B}e_k = \lambda_k^{-2}e_k$. Par définition de $\mathcal{B}$ et grâce à la remarque 3.2.1 cela implique qu'il existe une fonction $\widetilde{\pi}_k$ de $L^2_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned}e_k &= -\Delta\mathcal{B}e_k + \nabla\widetilde{\pi}_k \\ &= -\lambda_k^{-2}\Delta e_k + \nabla\widetilde{\pi}_k.\end{aligned}$$

En posant $\pi_k = -\lambda_k^2\widetilde{\pi}_k$, il est alors clair que

$$\begin{aligned}(e_k|e_{k'})_{\mathcal{V}} &= \langle -\Delta e_k, e_{k'}\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} \\ &= \langle \nabla\pi_k + \lambda_k^2 e_k, e_{k'}\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} \\ &= \lambda_k^2(e_k|e_{k'})_{\mathcal{H}} \\ &= \lambda_k^2\delta_{k,k'}.\end{aligned}$$

Ceci, grâce à la proposition 3.2.1, démontre que $(\lambda_k^{-1}e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{V}_\sigma$ muni du produit scalaire H^1_0. Le théorème est démontré.

Revenons maintenant à l'espace $\mathcal{V}'_\sigma$: rappelons que c'est la restriction des formes linéaires sur $\mathcal{V}$ aux éléments de $\mathcal{V}_\sigma$, et on peut le décrire de la manière suivante. Définissons

$$\mathcal{V}_\sigma^{-1} \stackrel{\text{déf}}{=} \{f \in \mathcal{V}' \ / \ \sum_{j\in\mathbb{N}}\langle f, e_j\rangle^2\lambda_j^{-2} < +\infty\}.$$

On a alors le résultat suivant.

Proposition 3.2.2. *La restriction de $\mathcal{V}_\sigma^{-1}$ aux éléments de $\mathcal{V}_\sigma$ coïncide avec l'espace $\mathcal{V}'_\sigma$.*

Preuve : Si $f \in \mathcal{V}^{-1}_{\sigma|\mathcal{V}_\sigma}$ alors en particulier f est une forme linéaire sur $\mathcal{V}_\sigma$ donc il est évident qu'on a l'inclusion $\mathcal{V}^{-1}_{\sigma|\mathcal{V}_\sigma} \subset \mathcal{V}'_\sigma$. Inversement soit $f \in \mathcal{V}'_\sigma$, et montrons que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\langle f, e_j\rangle^2\lambda_j^{-2} < +\infty.$$

Soit donc $v \in \mathcal{V}_\sigma$. Comme $v = \sum_{j\in\mathbb{N}}\langle e_j, v\rangle e_j$ on peut écrire que

$$\langle f, v\rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}}\langle f, e_j\rangle\langle e_j, v\rangle$$

et par définition on sait que
$$|\langle f,v\rangle| \leq \|f\|_{\mathcal{V}'_\sigma}\|v\|_{\mathcal{V}_\sigma}.$$
Mais comme $v\in\mathcal{V}_\sigma$ on a que $\langle e_j,v\rangle = \lambda_j^{-2}\langle -\Delta e_j, v\rangle = \lambda_j^{-2}(\nabla e_j|\nabla v)_{L^2}$. Le résultat suit du fait que la suite $\lambda_j^{-1}(\nabla e_j|\nabla v)_{L^2}$ est de carré sommable pour tout v et de norme $\|v\|_{\mathcal{V}_\sigma}$. La suite $\lambda_j^{-1}\langle f,e_j\rangle$ est donc aussi de carré sommable, de norme $\|f\|_{\mathcal{V}'_\sigma}$. Le résultat est démontré. ■

Definition. *Définissons*
$$P_k \;:\; \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{V}' & \to & \mathcal{V}_\sigma \\ f & \mapsto & \displaystyle\sum_{j\leq k}\langle f,e_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}\, e_j \end{array}\right. \quad \textit{et} \quad \mathbf{P} \;:\; \left\{\begin{array}{ccc} L^2 & \to & \mathcal{H} \\ f & \mapsto & \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}}\langle f,e_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}\, e_j \end{array}\right. .$$

Remarque. Les opérateurs P_k sont les projecteurs spectraux du problème Stokes et $\mathbf{P}$ est le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs de divergence nulle.

Proposition 3.2.3. *L'inclusion de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{V}'_\sigma$ est compacte.*

Preuve : Pour tout u dans $\mathcal{H}$, nous avons
$$\begin{aligned}\|P_k u - u\|^2_{(\mathcal{V}_\sigma)'} &= \sum_{j>k}\lambda_j^{-2}(\langle u,e_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}})^2 \\ &\leq \lambda_k^{-2}\sum_{j>k}(\langle u,e_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}})^2 \\ &\leq \lambda_k^{-2}\|u\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$
donc l'inclusion de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{V}'_\sigma$ est la limite dans $\mathcal{L}(\mathcal{H};\mathcal{V}'_\sigma)$ de la projection P_k, dont l'image est bien évidemment de dimension finie. L'exercice 1.2 assure alors le résultat souhaité. ■

Retenons le résultat suivant qui nous sera fort utile au chapitre 4.

Proposition 3.2.4. *L'opérateur $\mathbf{P}$ peut être prolongé en une application linéaire continue de $\mathcal{V}'$ dans $\mathcal{V}'_\sigma$. De plus on a*
$$\|P_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}';\mathcal{V}'_\sigma)} \leq 1 \quad \textit{et} \quad \forall f\in\mathcal{V}',\ \lim_{k\to\infty}\|P_k f - \mathbf{P}f\|_{\mathcal{V}'_\sigma} = 0.$$

Preuve : La seule chose à vérifier est que
$$\sum_j \lambda_j^{-2}(\langle f,e_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}})^2 \leq \|f\|^2_{\mathcal{V}'}.$$

Nous avons
$$\begin{aligned}\lambda_j^{-1}\langle f,e_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} &= \lambda_j^{-1}\langle -\Delta\mathcal{B}f, e_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} \\ &= (\mathcal{B}f|\lambda_j^{-1}e_j)_{H^1_0}.\end{aligned}$$

Le théorème 3.2.3 implique le résultat. ■

3.3 Le problème de Stokes dépendant du temps

Le problème d'évolution associé à l'opérateur de Stokes est le suivant:

$$(ES_\nu)\begin{cases}\partial_t u - \nu\Delta u = f - \nabla p,\\ \operatorname{div} u = 0,\\ u_{|\partial\Omega} = 0,\\ u_{|t=0} = u_0 \in \mathcal{H}.\end{cases}$$

Définissons ce que nous entendons par solution du problème.

Définition 3.3.1. *Soient $u_0 \in \mathcal{H}$ et $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;(\mathcal{V}_\sigma)')$. Nous dirons que u est solution de (ES_ν) avec donnée initiale u_0 et force extérieure f si et seulement si u appartient à l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}')\cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma)$ et satisfait, pour tout $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma)$,*

$$\begin{aligned}\langle u(t),\Psi(t)\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} &+ \int_{[0,t]\times\Omega}\Big(\nu\nabla u : \nabla\Psi - u\cdot\partial_t\Psi\Big)(t',x)\,dxdt'\\ &= \int_\Omega u_0(x)\cdot\Psi(0,x)\,dx + \int_0^t \langle f(t'),\Psi(t')\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}\,dt'.\end{aligned}$$

Nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.3.1. *Le système (ES_ν) admet une unique solution u qui, de plus, appartient à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H})$. Cette solution est donnée par*

$$u = \sum_j U_j(t)e_j \quad \text{avec} \quad U_j(t) = (u_0|e_j)_{L^2}e^{-\nu\lambda_j^2 t} + \int_0^t e^{-\nu\lambda_j^2(t-t')}\langle f(t'),e_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}\,dt',$$

et satisfait l'égalité d'énergie

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2} + \nu\int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{L^2}dt' = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2} + \int_0^t \langle f(t'),u(t')\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}\,dt'.$$

Preuve : Pour démontrer l'unicité, considérons une fonction u de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}')\cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma)$ telle que, pour tout $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma)$,

$$\langle u(t),\Psi(t)\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} + \int_{[0,t]\times\Omega}\Big(\nu\nabla u : \nabla\Psi - u\cdot\partial_t\Psi\Big)(t',x)\,dxdt' = 0.$$

Cette égalité est en particulier vraie pour $\Psi(t) = e_j$. Grâce au théorème 3.2.3, nous avons

$$\langle u(t),e_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} + \nu\lambda_j^2\int_0^t \langle u(t'),e_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}dt' = 0.$$

Cela implique directement que $\langle u(t),e_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} = 0$, puis que $u \equiv 0$.

Pour démontrer l'existence, supposons tout d'abord que la force extérieure f_k appartienne à l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\operatorname{Im}P_k)$ et la condition initiale u_0, à $P_k\mathcal{H}$. En vertu du théorème 3.2.3, (ES_ν) se réduit alors à une équation différentielle ordinaire dont l'unique solution est

$$u_k(t) = \sum_{j\le k}(P_k u_0|e_j)_{L^2}e^{-\nu\lambda_j^2 t}\,e_j + \int_0^t e^{-\nu\lambda_j^2(t-t')}\langle f_k(t'),e_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}\,e_j\,dt'. \tag{3.7}$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons, pour tout T strictement positif,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \|P_k f(t)-f(t)\|^2_{(\mathcal{V}_\sigma)'}\,dt=0.$$

Par ailleurs, l'ensemble des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans $\operatorname{Im} P_k$ est dense dans $L^2_{loc}(0,T;\operatorname{Im} P_k)$. Donc pour toute force extérieure f de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}'_\sigma)$, il existe une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}'_\sigma)$ telle que, pour tout k, la fonction f_k soit à valeurs dans $\operatorname{Im} P_k$ et telle que, pour tout T strictement positif, on ait

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \|f_k(t)-f(t)\|^2_{(\mathcal{V}_\sigma)'}\,dt=0.$$

La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par (3.7) satisfait

$$\|u_k(t)-u_{k+\ell}(t)\|^2_{L^2}\leq 2\|P_k u_0-P_{k+\ell}u_0\|^2_{L^2}+2\sum_{j\leq k+\ell}\biggl(\int_0^t e^{-\nu\lambda_j^2(t-t')}|\langle f_k(t')-f_{k+\ell}(t'),e_j\rangle|\,dt'\biggr)^2.$$

D'après l'inégalité de Young (voir le Lemme 1.2 page 20), on a

$$\begin{aligned}\|u_k(t)-u_{k+\ell}(t)\|^2_{L^2} &\leq 2\|P_k u_0-P_{k+\ell}u_0\|^2_{L^2}+2\sum_{j\leq k+\ell}\int_0^t \frac{1}{\nu\lambda_j^2}|\langle f_k(t')-f_{k+\ell}(t'),e_j\rangle|^2\,dt'\\ &\leq 2\|P_k u_0-P_{k+\ell}u_0\|^2_{L^2}+\frac{2}{\nu}\int_0^t \|f_k(t')-f_{k+\ell}(t')\|^2_{(\mathcal{V}_\sigma)'}\,dt',\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la proposition 3.2.2. D'après l'inégalité de Young encore, nous avons

$$\begin{aligned}\nu\int_0^t \|\nabla(u_k-u_{k+\ell})(t')\|^2_{L^2}dt' &\leq 2\|P_k u_0-P_{k+\ell}u_0\|^2_{L^2}\\ &\quad+2\sum_{j\leq k+\ell}\int_0^t \frac{1}{\nu\lambda_j^2}|\langle f_k(t')-f_{k+\ell}(t'),e_j\rangle|^2\,dt'\\ &\leq 2\|P_k u_0-P_{k+\ell}u_0\|^2_{L^2}+\frac{2}{\nu}\int_0^t \|f_k(t')-f_{k+\ell}(t')\|^2_{(\mathcal{V}_\sigma)'}\,dt'.\end{aligned}$$

Cela implique que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H})\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma)$. Désignons par u sa limite. Par définition de u_k, nous avons, pour tout $\Psi\in C^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma)$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle u_k(t),\Psi(t)\rangle &= \langle \dot u_k(t),\Psi(t)\rangle+\langle u_k(t),\dot\Psi(t)\rangle\\ &= \langle P_k\Delta u_k(t),\Psi(t)\rangle+\langle f_k(t),\Psi(t)\rangle+\langle u_k(t),\dot\Psi(t)\rangle\\ &= -\int_\Omega\Bigl(\nu\nabla u_k:\nabla\Psi-u_k\cdot\partial_t\Psi\Bigr)(t,x)\,dx+\langle f_k(t),\Psi(t)\rangle.\end{aligned}$$

Par intégration en temps, ceci donne

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_k(t,x)\cdot\Psi(t,x)dx+\int_{[0,t]\times\Omega}\Bigl(\nu\nabla u_k:\nabla\Psi-u_k\cdot\partial_t\Psi\Bigr)(t',x)\,dxdt'\\ &\qquad=\int_\Omega P_k u_0(x)\cdot\Psi(0,x)\,dx+\int_0^t\langle f_k(t'),\Psi(t')\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}\,dt'.\end{aligned}$$

Vu que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers u dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H})\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma)$ et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers f dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}'_\sigma)$, on conclut que u est solution de (ES_ν).

Pour démontrer que u vérifie bien l'égalité d'énergie, on applique l'égalité ci-dessus à $\Psi=u_k$, puis on fait tendre k vers $+\infty$. ■

3.4 Exercices

Exercice 3.1 (**Valeurs propres du Laplacien**)**.** *Dans tout l'exercice, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. On note $\big(\lambda_k^2(\Omega)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres associées au Laplacien de Dirichlet dans Ω, rangées dans l'ordre croissant et comptées avec leur multiplicité.*

1) Établir le principe du minimax de Courant-Fischer :

$$\lambda_k^2(\Omega) = \max_{\dim S = k} \min_{\substack{u\in S^\perp \\ \|u\|_{L^2}=1}} \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

2) En déduire que si $\Omega \subset \Omega'$ alors $\lambda_k(\Omega') \leq \lambda_k(\Omega)$.

3) Déterminer les λ_k dans le cas $\Omega =]0,\pi[$.

4) Généraliser au cas $\Omega =]a_1, b_1[\times\cdots\times]a_d, b_d[$.

5) En déduire que pour Λ tendant vers $+\infty$, le nombre de $\lambda_k(\Omega)$ compris entre $\Lambda/2$ et Λ est de l'ordre de Λ^d.

Exercice 3.2 (Le problème de Dirichlet comme problème d'extremum)**.** *Soit F définie par*

$$F\ :\ \left\{\begin{array}{ccl} H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \langle f, u\rangle, \end{array}\right.$$

où $f \in H^{-1}(\Omega)$, avec Ω un domaine borné.

1) Démontrer que la fonctionnelle F est minorée.

2) Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} F(u_n) = m$ la borne inférieure de F. Démontrer l'existence d'une fonction u de H_0^1 et d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que cette suite extraite converge <u>fortement</u> *dans H_0^1 vers u.*

3) Démontrer que u est (l'unique) solution de $-\Delta u = f$.

Exercice 3.3 (Le problème de Stokes comme problème d'extremum)**.** *Soit F_σ définie par*

$$F_\sigma\ :\ \left\{\begin{array}{ccl} \mathcal{V}_\sigma & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \langle f, u\rangle. \end{array}\right.$$

1) Démontrer que la fonctionnelle F_σ est minorée.

2) Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} F(u_n) = m$ la borne inférieure de F. Démontrer l'existence d'une fonction u de H_0^1 et d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que cette suite extraite converge <u>fortement</u> *dans H_0^1 vers u.*

3) Démontrer que u est (l'unique) solution de $-\Delta u - f \in \mathcal{V}_\sigma^\circ$.

Exercice 3.4. *On se place dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$. Le but de cet exercice est de démontrer qu'étant donnée une fonction f de H^{-1}, il existe une fonction u dans H_0^1 telle que*

$$-\Delta u + u^3 = f.$$

Pour ce faire, on introduit la fonctionnelle F :

$$F\left\{\begin{array}{ccl} H_0^1 & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_\Omega u^4(x)dx - \int_\Omega f(x)u(x)dx. \end{array}\right.$$

1) Démontrer que la fonctionnelle F définie ci-dessus est une application différentiable de H_0^1 dans $\mathbb{R}$.

2) Démontrer que F est minorée.

3) Soit m la borne inférieure de F, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H_0^1 telle que

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = m.$$

Démontrer que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans H_0^1.

4) En déduire l'existence d'une fonction u de H_0^1 et d'une sous-suite (que, par abus, on persiste à noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) telle que

- *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers u dans H_0^1,*
- *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend fortement vers u dans L^4,*
- *la suite $((f|u_n)_{L^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(f|u)$.*

5) En déduire que la suite $(F(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers m et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend fortement vers u dans H_0^1.

6) Conclure.

7) Que se passe-t-il si l'on essaie de faire le même chose pour l'équation $-\Delta u + u^5 = f$ dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, ou pour $-\Delta u + u^3 = f$ dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^4$?

8) Et pour $-\Delta u + u^7 = f$ dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$?

9) Adapter l'exercice au cas du problème de Stokes en étudiant la fonctionnelle

$$F_\sigma \ : \ \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{V}_\sigma & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_\Omega |u|^4(x)dx - \int_\Omega f(x)\cdot u(x)dx. \end{array} \right.$$

Chapter 4

Existence globale de solutions faibles

4.1 Introduction

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ avec $d = 2$ ou 3. Nous allons commencer par définir ce que nous entendons par solution du problème de Navier-Stokes (NS_ν).

Définition 4.1.1. *Nous dirons que u est une solution de Leray de (NS_ν) avec une donnée initiale $u_0 \in \mathcal{H}$ et une force extérieure $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$ si u appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$ et pour toute fonction Ψ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$, on a*

$$\int_\Omega u(t,x) \cdot \Psi(t,x)\, dx + \int_{[0,t]\times\Omega} \Big(\nu \nabla u : \nabla \Psi - u \otimes u : \nabla \Psi - u \cdot \partial_t \Psi\Big)(t,x)\, dxdt$$
$$= \int_\Omega u_0(x) \cdot \Psi(0,x)\, dx + \int_0^t \langle f(t'), \Psi(t') \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}\, dt'.$$

Énonçons le **théorème de Leray.**

Théorème 4.1.1. *Soient $u_0 \in \mathcal{H}$ et $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$. Il existe une solution u de (NS_ν) au sens de la définition 4.1.1 avec donnée initiale u_0 et force extérieure f. De plus, cette solution satisfait l'inégalité d'énergie*

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |u(t,x)|^2 dx + \nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(t',x)|^2 dxdt'$$
$$\leq \frac{1}{2} \int_\Omega |u_0(x)|^2 dx + \int_0^t \langle f(t',\cdot), u(t',\cdot) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt'.$$

Le plan de ce chapitre est le suivant:

- construire une suite de problèmes approchés à l'aide de la structure spectrale de l'opérateur de Stokes,
- établir un résultat de compacité,
- passer à la limite dans les termes non linéaires.

4.2 Démonstration du théorème de Leray

4.2.1 Construction des solutions approchées

On procède de manière analogue à celle utilisée pour démontrer le théorème 3.3.1. Posons $\mathcal{H}_k \stackrel{\text{déf}}{=} P_k\mathcal{H}$. C'est un espace vectoriel de dimension $k+1$. Comme nous l'avons vu à la page 50, on peut trouver une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}'_\sigma)$ telle que, pour tout k, la fonction f_k soit à valeurs dans $\operatorname{Im} P_k$ et telle que, pour tout T strictement positif, on ait

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \|f_k(t)-f(t)\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}\,dt = 0.$$

Pour construire des solutions approchées, nous avons besoin d'établir quelques propriétés sur le terme non linéaire.

Definition. *Soit l'application bilinéaire Q définie par*

$$Q : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{V}\times\mathcal{V} & \to & \mathcal{V}' \\ (u,v) & \mapsto & \operatorname{div}(u\otimes v). \end{array}\right.$$

Comme l'opérateur div envoie continûment $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ [1], l'inclusion de Sobolev établie par le théorème 2.3.1 assure que Q est continue. Dans la suite, le lemme suivant sera fort utile.

Lemme 4.2.1. *On a, pour $d=2$ ou 3,*

$$\|Q(u,v)\|_{\mathcal{V}'} \leq C\|u\|_{H_0^1}^{\frac{d}{4}}\|v\|_{H_0^1}^{\frac{d}{4}}\|u\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}}\|v\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}}.$$

En outre pour tout u dans $\mathcal{V}_\sigma$ et tout v dans $\mathcal{V}$,

$$\langle Q(u,v),v\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} = 0. \tag{4.1}$$

De plus,

$$|\langle Q(u,u)-Q(v,v),u-v\rangle| \leq C\|u-v\|_{H_0^1}^{1+\frac{d}{4}}\|u-v\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}}\min\Big\{\|u\|_{H_0^1}^{\frac{d}{4}}\|u\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}},\|v\|_{H_0^1}^{\frac{d}{4}}\|v\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}}\Big\}.$$

Preuve : La première inégalité résulte directement du corollaire 2.3.1 page 37. Pour démontrer (4.1), supposons que u et v aient leurs composantes dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\langle Q(u,v),v\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} &= \int(\operatorname{div}(u\otimes v)\cdot v)(x)dx \\ &= \sum_{\ell,m=1}^{d}\int\partial_m(u^m(x)v^\ell(x))v^\ell(x)\,dx \\ &= -\sum_{\ell,m=1}^{d}\int u^m(x)v^\ell(x)\partial_m v^\ell(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int|v(x)|^2\operatorname{div}u(x)\,dx.\end{aligned}$$

[1] Raisonner composante par composante et utiliser la définition 2.2.1 pour le voir.

Observons que la dernière ligne est nulle puisque $u \in \mathcal{V}_\sigma$. Comme le membre de gauche de la première ligne, et le membre de droite de la dernière ligne sont continus sur $\mathcal{V}$ et que, par définition, $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{V}$, la formule reste vraie dans $\mathcal{V}$.

La dernière inégalité résulte des calculs algébriques suivants. Grâce à (4.1), nous avons

$$\begin{aligned}\langle Q(u,u) - Q(v,v), u-v\rangle &= \langle Q(u-v,u), u-v\rangle + \langle Q(v,u-v), u-v\rangle\\ &= \langle Q(u-v,u), u-v\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$|\langle Q(u,u) - Q(v,v), u-v\rangle| \le \|Q(u-v,u)\|_{\mathcal{V}'}\|u-v\|_{H^1_0}.$$

Les deux premières inégalités du lemme impliquent le résultat. ■

Introduisons la famille d'équations différentielles ordinaires suivantes

$$(NS_{\nu,k}) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}u_k &=& P_k\Delta u_k - F_k(u_k) + f_k\\ u_k(0) &=& P_k u_0,\end{array}\right.$$

avec $F_k(u) \stackrel{\text{déf}}{=} P_k Q(u,u)$.

Vu que $P_k\Delta$ est une application linéaire de $\mathcal{H}_k$ dans lui-même, elle est continue car $\mathcal{H}_k$ est de dimension finie. Il résulte alors des propriétés de continuité de Q et P_k que l'application

$$z \longmapsto \nu P_k\Delta z - F_k(z) + f_k$$

est également continue de $\mathcal{H}_k$ dans $\mathcal{H}_k$.

On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Ceci implique l'existence d'une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et d'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de solutions *maximales* de $(NS_{\nu,k})$ appartenant à $\mathcal{C}^1([0,T_k[;\mathcal{H}_k)$.

4.2.2 Estimations sur les solutions approchées et compacité

Nous allons estimer $\|u_k(t)\|^2_{L^2}$. En prenant le produit scalaire L^2 de $(NS_{\nu,k})$ avec $u_k(t)$, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_k(t)\|^2_{L^2} = \nu(\Delta u_k(t)|u_k(t)_{L^2} - (F_k(u_k(t))|u_k(t))_{L^2} + (f_k(t)|u_k(t))_{L^2}.$$

Par définition de F_k et comme $P_k^2 = P_k = {}^tP_k$, le lemme 4.2.1 implique que

$$(F_k(u_k(t))|u_k(t))_{L^2} = \langle Q(u_k(t),u_k(t)), u_k\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} = 0.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_k(t)\|^2_{L^2} + \nu(\nabla u_k|\nabla u_k(t))_{L^2} = \langle f_k(t)|u_k(t)\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}. \tag{4.2}$$

Par intégration en temps, on obtient l'estimation d'énergie suivante pour le système Navier-Stokes approché:

$$\forall t\in[0,T_k[,\ \frac{1}{2}\|u_k(t)\|^2_{\mathcal{H}} + \nu\int_0^t \|\nabla u_k(t')\|^2_{L^2}\,dt' = \frac{1}{2}\|u_k(0)\|^2_{L^2} + \int_0^t \langle f_k(t')|u_k(t')\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}\,dt'. \tag{4.3}$$

En utilisant l'inégalité bien connue $2ab \leq a^2 + b^2$, on obtient

$$\|u_k(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_k(t')\|_{L^2}^2 \, dt' \leq \|u_k(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f_k(t')\|_{\mathcal{V}'}^2 \, dt'. \tag{4.4}$$

Ceci signifie que u_k reste borné pour tout temps dans $\mathcal{H}_k$, et donc que $T_k = +\infty$. De plus, la majoration en norme $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$ de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniforme en k.

Pour passer à la limite dans $(NS_{\nu,k})$, nous avons besoin d'un peu de compacité. Elle nous sera fournie par la proposition suivante.

Lemme. *Si $d = 2$ (resp. $d = 3$), la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^{\frac{1}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$ (resp. dans $C^{\frac{1}{4}}_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$).*

Preuve : Vu que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$, la suite $(-\Delta u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$. Le fait que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$ découle de sa définition. D'après le lemme 4.2.1, on obtient que

$$\|F_k(u_k(t))\|_{\mathcal{V}'} \leq C \|\nabla u_k\|_{L^2}^{\frac{d}{2}} \|u_k\|_{L^2}^{2-\frac{d}{2}}.$$

Grâce à l'estimation d'énergie (4.3), on en déduit que la suite $(\dot{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace $L^{\frac{4}{d}}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$. Ainsi donc

$$\|u_k(t) - u_k(t')\|_{\mathcal{V}'} \leq |t - t'|^{1-\frac{d}{4}} \|\dot{u}_k\|_{L^{\frac{4}{d}}([t,t'];\mathcal{V}')}.$$

La proposition est démontrée. ∎

De cette proposition, nous allons déduire le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.1. *Il existe un champ de vitesses $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$ tel que, à extraction près, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u :*

- *fortement dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$,*
- *faiblement dans $L^2(0, T; \mathcal{V}_\sigma)$ pour tout $T > 0$.*

De plus, $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la suite $(u_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $u(t)$ dans $\mathcal{H}$. Enfin, u vérifie l'inégalité d'énergie pour tout t et, pour tout $p \in [2, +\infty[$ et $T > 0$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{L^p([0,T];L^2)} = 0. \tag{4.5}$$

Preuve : Fixons d'abord un entier strictement positif N. D'après le lemme précédent, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément continue sur $[0, N]$ et à valeurs dans $\mathcal{V}'_\sigma$. D'autre part, cette suite est également uniformément bornée dans $\mathcal{C}([0, N]; \mathcal{H})$. Or, d'après le lemme 3.2.3, l'inclusion de $\mathcal{H}$ dans $(\mathcal{V}_\sigma)'$ est compacte. Le théorème d'Ascoli page 15 assure donc qu'il existe $u \in \mathcal{C}([0, N]; \mathcal{V}'_\sigma)$ tel qu'à une extraction près, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tende vers u dans l'espace $\mathcal{C}([0, N]; \mathcal{V}'_\sigma)$.

On remarque par ailleurs que l'ensemble $L^2(0, N; \mathcal{V}_\sigma)$ est un espace de Hilbert séparable. Quitte à extraire encore, on peut donc exiger en sus que la suite converge faiblement vers u dans $L^2(0, N; \mathcal{V}_\sigma)$.

Ensuite, en faisant tendre N vers l'infini et en reprenant le procédé d'extraction diagonal utilisé dans la preuve du théorème d'Ascoli, on obtient finalement un champ $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}'_\sigma) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma)$ tel qu'une sous-suite de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (que l'on continuera à noter $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$) tende fortement vers u dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}'_\sigma)$ et faiblement dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma)$.

Pour prouver le résultat de convergence faible dans $\mathcal{H}$ à t fixé, on utilise le fait que $(u_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. En vertu du théorème de compacité faible, il existe donc un élément $\widetilde{u}(t)$ de $\mathcal{H}$ tel qu'une sous-suite de $(u_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\widetilde{u}(t)$. Mais l'inclusion de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{V}'_\sigma$ étant compacte, cette même sous-suite converge fortement vers $\widetilde{u}(t)$ dans $\mathcal{V}'_\sigma$. Par unicité de la limite, on a donc $\widetilde{u}(t) = u(t)$ et on peut alors conclure que $(u_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Les résultats de convergence faible obtenus nous permettent d'appliquer la propriété (1.7). On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\|u(t)\|^2_{L^2} \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k(t)\|^2_{L^2} \quad \text{et} \quad \int_0^t \|\nabla u(t)\|^2_{L^2}\,dt \leq \liminf_{k\to\infty} \int_0^t \|\nabla u_k(t)\|^2_{L^2}\,dt.$$

En passant à la limite dans l'égalité d'énergie (4.3), on trouve l'inégalité voulue car la vitesse initiale $u_k(0) = P_k u_0$ converge fortement vers u_0 dans $\mathcal{H}$ et la suite de forces extérieures $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}')$.

Finalement, on a

$$\begin{aligned} \|u_k(t) - u(t)\|^2_{\mathcal{H}} &= \langle u_k(t) - u(t), u_k(t) - u(t)\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} \\ &\leq \|u_k(t) - u(t)\|_{\mathcal{V}'}(\|\nabla u_k\|_{L^2} + \|\nabla u(t)\|_{L^2}). \end{aligned}$$

Comme la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V})$ et, pour tout $T > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{V}')} = 0,$$

une simple intégration intégration en temps sur $[0,T]$ combinée à l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'obtenir la convergence (forte) vers u de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H})$. La convergence dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H})$ pour tout $p \in [2,+\infty[$ s'obtient à l'aide de l'inégalité de Hölder, du cas $p = 2$ et des bornes uniformes dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H})$ pour u et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. ■

4.2.3 Conclusion de la démonstration du théorème 4.1.1

La convergence démontrée par le corollaire 4.2.1 est cruciale pour passer à la limite dans $(NS_{\nu,k})$. D'après la section précédente, nous savons que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers u fortement dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^+;L^2)$ et faiblement dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+;L^2) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V})$. D'après la définition de la notion de solution de (NS_ν), considérons une fonction Ψ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma)$. Comme u_k est une solution de $(NS_{\nu,k})$, nous avons[2]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle u_k(t), \Psi(t)\rangle &= \langle \dot{u}_k(t), \Psi(t)\rangle + \langle u_k(t), \dot{\Psi}(t)\rangle \\ &= \langle P_k \Delta u_k(t), \Psi(t)\rangle + \langle P_k Q(u_k(t), u_k(t)), \Psi(t)\rangle \\ &\qquad + \langle f_k(t), \Psi(t)\rangle + \langle u_k(t), \dot{\Psi}(t)\rangle. \end{aligned}$$

[2]en écrivant désormais $\langle\cdot,\cdot\rangle$ au lieu de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}$ pour alléger les notations.

Comme il est maintenant habituel, nous écrivons que

$$\begin{aligned}
\langle P_k \Delta u_k(t), \Psi(t)\rangle &= -\nu \int_\Omega \nabla u_k(t,x) : \nabla P_k \Psi(t,x) dx,\\
\langle P_k Q(u_k(t), u_k(t)), \Psi(t)\rangle &= \int_\Omega u_k(t,x) \otimes u_k(t,x) : \nabla P_k \Psi(t,x) dx,\\
\langle u_k(t), \dot\Psi(t)\rangle &= \int_\Omega u_k(t,x) \cdot \partial_t \Psi(t,x)\, dx.
\end{aligned}$$

Par intégration en temps entre 0 et t, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_k(t,x)\Psi(t,x)dx + \int_{[0,t]\times\Omega} \Big(\nu \nabla u_k : \nabla P_k\Psi - u_k \otimes u_k : \nabla P_k \Psi - u_k \cdot \partial_t \Psi\Big)(t,x)\, dxdt&\\
= \int_\Omega u_k(0,x) \cdot \Psi(0,x)\, dx + \int_0^t \langle f_k(t'), \Psi(t')\rangle\, dt'&.
\end{aligned}$$

Nous devons maintenant passer à la limite. Grâce au théorème de Lebesgue, la suite $(\nabla P_k \Psi)_{k\in\mathbb{N}}$ tend fortement vers $\nabla\Psi$ dans $L^2(\mathbb{R}^+; L^2)$. La convergence faible de u_k dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V})$ assure que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \int_{[0,t]\times\Omega} \Big(\nu\nabla u_k : \nabla P_k \Psi - u_k \cdot \partial_t\Psi\Big)(t,x)\, dxdt&\\
= \int_{[0,t]\times\Omega} \Big(\nu \nabla u : \nabla\Psi - u\cdot\partial_t\Psi\Big)(t,x)\, dxdt&.
\end{aligned}$$

Le fait que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$ implique que, pour tout réel positif t,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k(t,x)\Psi(t,x)dx = \lim_{k\to\infty} \langle u_k(t), \Psi(t)\rangle = \langle u(t), \Psi(t)\rangle.$$

Comme $u(t)$ appartient à L^2 pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a donc

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k(t,x)\Psi(t,x)dx = \langle u(t), \Psi(t)\rangle = \int_\Omega u(t,x)\Psi(t,x)dx.$$

Les deux termes associés à la donnée initiale et la force extérieure convergent de par la construction des f_k et par le fait que $P_k u_0$ tend vers u_0 dans L^2.

Pour passer à la limite dans le terme non linéaire, nous allons utiliser la convergence forte énoncée au corollaire 4.2.1. En particulier, par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend fortement vers u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; L^4)$. Comme la suite $(\nabla P_k\Psi)_{k\in\mathbb{N}}$ tend fortement vers $\nabla\Psi$ dans $L^2(\mathbb{R}^+; L^2)$ on en déduit d'après l'inégalité de Hölder que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,t]\times\Omega} (u_k \otimes u_k : \nabla P_k \Psi)(t,x)\, dxdt = \int_{[0,t]\times\Omega} (u\otimes u : \nabla\Psi)(t,x)\, dxdt.$$

Nous avons démontré que u est solution de (NS_ν) au sens de la définition 4.1.1. Cela conclut la démonstration du théorème 4.1.1.

4.3 Le cas de la dimension deux

Dans le cas de la dimension deux, les solutions de Leray sont uniques et même stables. Plus précisément, nous avons le théorème suivant.

Théorème 4.3.1. *Pour toute donnée u_0 dans $\mathcal{H}$ et f dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}'_\sigma)$, la solution de Leray est unique, continue en temps à valeurs dans $\mathcal{H}$, et satisfait, pour tout (s,t) tel que $0\leq s\leq t$,*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2}+\nu\int_s^t\|\nabla u(t')\|^2_{L^2}dt'=\frac{1}{2}\|u(s)\|^2_{L^2}+\int_s^t\langle f(t'),u(t')\rangle dt'.$$

De plus, les solutions de Leray sont stables au sens suivant. Soit u (resp. v) une solution de Leray associée à u_0 (resp. v_0) dans $\mathcal{H}$ et f (resp. g) dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}'_\sigma)$ alors,

$$\begin{aligned}\|(u-v)(t)\|^2_{L^2}&+\nu\int_0^t\|\nabla(u-v)(t')\|^2_{L^2}\,dt'\\&\leq\Big(\|u_0-v_0\|^2_{L^2}+\frac{2}{\nu}\int_0^t\|(f-g)(t')\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}\Big)\exp\Big(\frac{CE^2(t)}{\nu^4}\Big)\quad\text{avec}\end{aligned}$$

$$E(t)\stackrel{\text{déf}}{=}\min\Big\{\|u_0\|^2_{L^2}+\frac{1}{\nu}\int_0^t\|f(t')\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}\,dt'\,,\|v_0\|^2_{L^2}+\frac{1}{\nu}\int_0^t\|g(t')\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}\,dt'\Big\}.$$

Le point clef de la preuve est le lemme d'approximation suivant.

Lemme 4.3.1. *Soit u une solution de Leray associée à u_0 dans $\mathcal{H}$ et f dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}'_\sigma)$. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de solutions de $(NS_{\nu,k})$. Alors pour tout réel strictement positif T, on a*

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\sup_{t\in[0,T]}\|u_k(t)-u(t)\|^2_{L^2}+\nu\int_0^T\|\nabla(u_k-u)(t)\|^2_{L^2}dt\Big)=0.$$

Admettons ce lemme un instant. Il implique immédiatement que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H})$. Par unicité de la limite et du fait que chaque u_k est continue en temps à valeurs dans $\mathcal{H}$, on en déduit que u est l'*unique* solution de Leray et qu'elle appartient à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H})$. Par ailleurs, par intégration de (4.2) entre s et t, on obtient

$$\frac{1}{2}\|u_k(t)\|^2_{L^2}+\nu\int_s^t\|\nabla u_k(t')\|^2_{L^2}dt'=\frac{1}{2}\|u_k(s)\|^2_{L^2}+\int_s^t\langle f_k(t'),u_k(t')\rangle dt'.$$

En passant à la limite lorsque k tend vers l'infini, on trouve l'égalité d'énergie.

Pour démontrer la stabilité, estimons la norme L^2 de $w_k\stackrel{\text{déf}}{=}u_k-v_k$. D'après le théorème 3.3.1, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|w_k(t)\|^2_{L^2}+\nu\int_0^t\|\nabla w_k\|^2_{L^2}\,d\tau&=\frac{1}{2}\|w_k(0)\|^2_{L^2}\\&\quad+\int_0^t\Big(\langle f_k-g_k,w_k\rangle+\langle Q(u_k,u_k)-Q(v_k,v_k),w_k\rangle\Big)\,d\tau,\\&\leq\frac{1}{2}\|w_k(0)\|^2_{L^2}+\int_0^t\Big(\frac{\nu}{4}\|\nabla w_k(t)\|^2_{L^2}\\&\quad+\frac{1}{\nu}\|(f_k-g_k)(t)\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}+\langle Q(u_k,u_k)-Q(v_k,v_k),w_k\rangle\Big)\,d\tau.\end{aligned}$$

D'après le lemme 4.2.1 et l'inégalité de convexité

$$\forall\theta\in]0,1[\,,\ ab\leq(1-\theta)a^{\frac{1}{1-\theta}}+\theta b^{\frac{1}{\theta}},\tag{4.6}$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
\Big|\langle Q(u_k,u_k)-Q(v_k,v_k),w_k\rangle\Big| &\leq C\|\nabla w_k(t)\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|w_k\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}B_k(t)\\
&\leq \frac{\nu}{4}\|\nabla w_k(t)\|_{L^2}^2+\frac{C}{\nu^3}B_k(t)^2\|w_k(t)\|_{L^2}^2\\
\text{avec}\quad B_k(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \min\Big\{\|u_k(t)\|_{L^2}\|\nabla u_k(t)\|_{L^2},\|v_k(t)\|_{L^2}\|\nabla v_k(t)\|_{L^2}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Le lemme de Gronwall implique alors que

$$
\begin{aligned}
\|w_k(t)\|_{L^2}^2+\nu\int_0^t\|\nabla w_k(t')\|_{L^2}^2dt' \leq \Big(\|(u_k-v_k)(0)\|_{L^2}^2+\frac{2}{\nu}\int_0^t\|(f_k-g_k)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2dt'\Big)&\\
\times\exp\Big(\frac{C}{\nu^3}\int_0^t B_k^2(t')dt'\Big).&
\end{aligned}
$$

En utilisant le fait que u_k (resp. v_k) tend vers u (resp. v) dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+;L^2)\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;H^1_0)$, on trouve que

$$
\begin{aligned}
&\|(u-v)(t)\|_{L^2}^2+\nu\int_0^t\|\nabla(u-v)(t')\|_{L^2}^2dt'\\
&\qquad\leq\Big(\|u_0-v_0\|_{L^2}^2+\frac{2}{\nu}\int_0^t\|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2\Big)\exp\Big(\frac{C}{\nu^3}\int_0^t B^2(t')dt'\Big)
\end{aligned}
$$

avec

$$
B(t)=\min\Big\{\|u(t)\|_{L^2}\|\nabla u(t)\|_{L^2},\|v(t)\|_{L^2}\|\nabla v(t)\|_{L^2}\Big\}.
$$

L'inégalité d'énergie implique que

$$
\int_0^t B^2(t')dt'\leq\frac{1}{\nu}E^2(t),
$$

ce qui achève la preuve du théorème 4.3.1 modulo la justification du lemme 4.3.1.

Démonstration du lemme 4.3.1 : Posons $\delta_k\stackrel{\text{def}}{=}u_k-u$. Grâce à l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (voir le corollaire 2.3.1) et à la continuité de l'opérateur de Leray de $\mathcal{V}'$ dans $\mathcal{V}'_\sigma$ (cf proposition 3.2.4), la fonction

$$
h_k\stackrel{\text{def}}{=}P_kQ(u_k,u_k)-\mathbf{P}Q(u,u)
$$

appartient à $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+,\mathcal{V}'_\sigma)$. Alors, en utilisant le théorème 3.3.1, il apparaît que δ_k est la solution de (ES_ν) avec donnée initiale $P_ku_0-u_0$ et force extérieure f_k-f+h_k. On en déduit que

$$
\|\delta_k(t)\|_{L^2}^2+\nu\int_0^t\|\nabla\delta_k(t')\|_{L^2}^2dt'\leq\|P_ku_0-u_0\|_{L^2}^2+\frac{1}{\nu}\int_0^t\big(\|f_k-f\|_{\mathcal{V}'}^2+\|h_k(t')\|_{\mathcal{V}'}^2\big)\,dt'.
$$

Estimons $\|h_k(t)\|_{\mathcal{V}'}$. Pour cela, écrivons que

$$
h_k(t)=P_kQ(u_k,u_k)-P_kQ(u,u)+(P_k-\mathbf{P})Q(u,u).
$$

Comme $Q(u,u)$ appartient à $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}'_\sigma)$, on en déduit, en utilisant la proposition 3.2.4, que, pour presque tout t,

$$
\lim_{k\to\infty}\|(P_k-\mathbf{P})Q(u(t),u(t))\|_{\mathcal{V}'_\sigma}=0.
$$

Ensuite, le théorème de Lebesgue joint au fait que l'opérateur P_k est un projecteur orthogonal dans $\mathcal{V}'_\sigma$, implique que, pour tout réel strictement positif t,

$$\|h_k\|^2_{L^2([0,T];\mathcal{V}'_\sigma)} \leq \|Q(u_k,u_k)-Q(u,u)\|^2_{L^2([0,T];(\mathcal{V}_\sigma)')} + o_k(1) \quad \text{avec} \quad \lim_{k\to\infty} o_k(1)=0.$$

En utilisant encore l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on trouve que

$$\begin{aligned}\int_0^t \|h_k(t')\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}\,dt' \leq \int_0^t \|\delta_k(t')\|_{L^2}\|\nabla\delta_k(t')\|_{L^2}\big(\|\nabla u_k(t')\|_{L^2}+\|\nabla u(t')\|_{L^2}\big)\\ \times\big(\|u_k(t')\|_{L^2}+\|u(t')\|_{L^2}\big)\,dt' + o_k(1),\end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned}\int_0^t \|h_k(t')\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}\,dt' &\leq \frac{\nu}{2}\int_0^t \|\nabla\delta_k(t')\|^2_{L^2}\,dt' + \frac{C}{\nu}\int_0^t A_k(t')\|\delta_k(t')\|^2_{L^2}\,dt + o_k(1)\\ \text{avec}\quad A_k(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \big(\|\nabla u_k(t)\|^2_{L^2}+\|\nabla u(t)\|^2_{L^2}\big)\big(\|u_k(t)\|^2_{L^2}+\|u(t)\|^2_{L^2}\big).\end{aligned}$$

Nous avons donc à $o_k(1)$ près,

$$\|\delta_k(t)\|^2_{L^2}+\frac{\nu}{2}\int_0^t \|\nabla\delta_k(t')\|^2_{L^2}\,dt' \leq \|P_ku_0-u_0\|^2_{L^2}+\frac{C}{\nu}\int_0^t\big(\|f_k-f\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}+A_k(t')\|\delta_k(t')\|^2_{L^2}\big)\,dt'.$$

Le lemme de Gronwall implique que

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\|\delta_k(t)\|^2_{L^2}+\nu\int_0^T \|\nabla\delta_k(t)\|^2_{L^2}dt\\ &\qquad\leq C\Big(\|P_ku_0-u_0\|^2_{L^2}+\int_0^t\|f_k-f\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}\,dt+o_k(1)\Big)\exp\Big(\frac{C}{\nu}\int_0^T A_k(t)dt\Big).\end{aligned}$$

Grâce à l'estimation d'énergie du théorème 4.1.1, il existe une constante C telle que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \int_0^T A_k(t)\,dt\leq C.$$

Le lemme 4.3.1 est donc démontré. ■

4.4 Exercice

Exercice 4.1. Dans tout cet exercice, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ avec $d=2,3$. On note $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ constituée par des vecteurs propres associés au problème de Dirichlet. Soit P_k le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(e_0,\cdots,e_k)$.

On cherche à résoudre l'EDP suivante :

$$(E)\qquad \begin{cases}\delta_t u-\Delta u+u^3=0,\\ u_{|t=0}=u_0,\qquad u_{|\delta\Omega}=0,\end{cases}$$

où $u_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$ est une fonction donnée.

1) Montrer que si $u\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+;H^1_0(\Omega))$ est solution de (E) alors on a

$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\ \|u(t)\|^2_{L^2}+2\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|^2_{L^2}\,d\tau+2\int_0^t\|u(\tau)\|^4_{L^4}\,d\tau=\|u_0\|^2_{L^2}. \tag{4.7}$$

2) Montrer que l'équation

$$(E_k) \qquad \begin{cases} \partial_t v - P_k \Delta v + P_k(v^3) = 0, \\ v_{|t=0} = P_k u_0, \qquad u_{|\delta\Omega} = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution u_k dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))$ qui vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ \|u_k(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla u_k(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau + 2\int_0^t \|u_k(\tau)\|_{L^4}^4 \, d\tau = \|P_k u_0\|_{L^2}^2.$$

3) Dans cette question, on suppose que $d = 2$.

(a) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend (à extraction près et en un sens que l'on précisera) vers une solution $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H_0^1)$ de (E).

(b) Montrer que la convergence a lieu dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H_0^1)$. En déduire que (E) admet une solution u dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H_0^1)$ qui vérifie (4.7).

(c) Cette solution est-elle unique dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H_0^1)$?

Chapter 5

Solutions fortes des équations de Navier-Stokes en dimension trois

Dans ce chapitre, nous cherchons à établir des résultats d'existence et d'unicité pour les équations de Navier-Stokes en dimension trois. Cela sera possible à condition de renforcer les hypothèses de régularité. De plus, les résultats seront locaux en temps si les données sont quelconques, et globaux si les données vérifient une condition de petitesse.

5.1 Un résultat de stabilité

L'énoncé ci-dessous est une généralisation du théorème 4.3.1 au cas de la dimension 3.

Théorème 5.1.1. *Soit u une solution de Leray associée à u_0 dans $\mathcal{H}$ et f dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}'_\sigma)$. On suppose que u est dans $L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$ pour un certain $T>0$. Alors u est unique sur $[0,T]$, appartient à $\mathcal{C}([0,T];\mathcal{H})$ et vérifie, pour tous les (s,t) tels que $0\leq s\leq t\leq T$,*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2}+\nu\int_s^t\|\nabla u(t')\|^2_{L^2}dt'=\frac{1}{2}\|u(s)\|^2_{L^2}+\int_s^t\langle f(t'),u(t')\rangle dt'. \tag{5.1}$$

De plus, pour toute solution de Leray v associée aux données v_0 dans $\mathcal{H}$ et g dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}'_\sigma)$ alors on a l'inégalité suivante pour tout t dans $[0,T]$:

$$\begin{aligned}&\|(u-v)(t)\|^2_{L^2}+\nu\int_0^t\|\nabla(u-v)(t')\|^2_{L^2}dt'\\&\qquad\leq\Big(\|u_0-v_0\|^2_{L^2}+\frac{2}{\nu}\int_0^t\|(f-g)(t')\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}\Big)\exp\Big(\frac{C}{\nu^3}\int_0^t\|\nabla u(t')\|^4_{L^2}dt'\Big).\end{aligned}$$

Tout d'abord, il est clair que le dernier point du théorème entraîne l'unicité de u.

On constate ensuite que u est solution du problème de Stokes dépendant du temps avec donnée initiale $u_0\in\mathcal{H}$ et terme de force $f-Q(u,u)$.

On sait que f est dans $L^2([0,T];\mathcal{V}'_\sigma)$. Comme par hypothèse u est dans $L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$, on établit facilement que $Q(u,u)\in L^2([0,T];\mathcal{V}'_\sigma)$. Le théorème 3.3.1 assure alors que u est continue sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathcal{H}$.

Les autres points du théorème vont résulter du lemme d'approximation suivant, que nous admettons pour le moment.

Lemme 5.1.1. *Soit u une solution de Leray appartenant à $L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$. Il existe une suite $(\widetilde{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma)$ telle que*

- *la suite* $(\widetilde{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tend vers* u *dans* $L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)\cap L^\infty([0,T];\mathcal{H})$,
- *pour tout* k, *on a*

$$\partial_t\widetilde{u}_k-\nu\Delta\widetilde{u}_k=f-Q(\widetilde{u}_k,\widetilde{u}_k)+R_k\quad\textit{avec}\quad\lim_{k\to\infty}\|R_k\|_{L^2([0,T];\mathcal{V}'_\sigma)}=0.\tag{5.2}$$

Pour établir l'égalité d'énergie, on prend le crochet de dualité de (5.2) avec u, on intègre en temps sur l'intervalle $[s,t]$ puis on passe à la limite $k\to+\infty$.

Reste à établir le dernier point du théorème. Pour cela, on utilise le fait que, comme u et v sont deux solutions de Leray, on peut écrire

$$\begin{aligned}\delta_\nu(t)&=\|(u-v)(t)\|_{L^2}^2+2\nu\int_0^t\|\nabla(u-v)(t')\|_{L^2}^2dt'\\&=\|u(t)\|_{L^2}^2+2\nu\int_0^t\|\nabla u(t')\|_{L^2}^2dt'+\|v(t)\|_{L^2}^2+2\nu\int_0^t\|\nabla v(t')\|_{L^2}^2dt'\\&\qquad\qquad-2(u(t)|v(t))_{L^2}-4\nu\int_0^t(\nabla u(t')|\nabla v(t'))_{L^2}^2dt'\\&\leq\|u_0\|_{L^2}^2+2\int_0^t\langle f(t'),u(t')\rangle dt'+\|v_0\|_{L^2}^2+2\int_0^t\langle g(t'),v(t')\rangle dt'\\&\qquad\qquad-2(u(t)|v(t))_{L^2}-4\nu\int_0^t(\nabla u(t')|\nabla v(t'))_{L^2}^2\,dt'\end{aligned}\tag{5.3}$$

La fonction $\widetilde{u}_k$ appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma)$, donc elle peut être utilisée comme fonction test dans la définition 4.1.1. Comme v est une solution de Leray, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_k(t)&\stackrel{\text{def}}{=}(\widetilde{u}_k(t)|v(t))_{L^2}\\&=(\widetilde{u}_k(0)|v(0))_{L^2}-\nu\int_0^t(\nabla\widetilde{u}_k(t')|\nabla v(t'))_{L^2}\,dt'+\int_0^t\langle g(t'),\widetilde{u}_k(t')\rangle\,dt'\\&\qquad+\int_0^t(v(t')\otimes v(t')|\nabla\widetilde{u}_k(t'))_{L^2}\,dt'+\int_0^t\langle\partial_t\widetilde{u}_k(t'),v(t')\rangle\,dt'.\end{aligned}$$

Grâce à (5.2), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_k(t)=(\widetilde{u}_k(0)|v(0))_{L^2}-2\nu\int_0^t(\nabla\widetilde{u}_k(t')|\nabla v(t'))_{L^2}\,dt'+\int_0^t\langle g(t'),\widetilde{u}_k(t')\rangle\,dt'+\int_0^t\langle f(t'),v(t')\rangle\,dt'\\+\int_0^t(v(t')\otimes v(t')|\nabla\widetilde{u}_k(t'))_{L^2}\,dt'-\int_0^t\langle Q(\widetilde{u}_k(t'),\widetilde{u}_k(t')),v(t')\rangle\,dt'+\int_0^t\langle R_k(t'),v(t')\rangle\,dt'.\end{aligned}$$

Le lemme 5.1.1 implique que $\lim_{k\to\infty}\mathcal{B}_k(t)=(u(t)|v(t))_{L^2}$ et que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\Big\{(\widetilde{u}_k(0)|v(0))_{L^2}-2\nu\int_0^t(\nabla\widetilde{u}_k(t')|\nabla v(t'))_{L^2}\,dt'\\+\int_0^t\langle R_k(t'),v(t')\rangle\,dt'+\int_0^t\langle g(t'),\widetilde{u}_k(t')\rangle\,dt'\Big\}\\=(u(0)|v(0))_{L^2}-2\nu\int_0^t(\nabla u(t')|\nabla v(t'))_{L^2}dt'+\int_0^t\langle g(t'),u(t')\rangle\,dt'.\end{aligned}$$

Donc en définissant

$$\mathcal{R}_k(t)\stackrel{\text{def}}{=}\int_0^t(v(t')\otimes v(t')|\nabla\widetilde{u}_k(t'))_{L^2}dt'-\int_0^t\langle Q(\widetilde{u}_k(t'),\widetilde{u}_k(t')),v(t')\rangle\,dt',$$

on en déduit que $\lim \mathcal{R}_k(t)$ existe et que

$$
\begin{aligned}
(u(t)|v(t))_{L^2} = (u(0)|v(0))_{L^2} - 2\nu \int_0^t (\nabla u(t')|\nabla v(t'))_{L^2} dt' \\
+ \int_0^t \langle g(t'), u(t')\rangle dt' + \int_0^t \langle f(t'), v(t')\rangle dt' + \lim_{k\to\infty} \mathcal{R}_k(t).
\end{aligned}
$$

En injectant dans (5.3), on trouve

$$
\delta_\nu(t) \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \langle (f-g)(t'), (u-v)(t')\rangle dt' - 2\lim_{k\to\infty} \mathcal{R}_k(t). \tag{5.4}
$$

Étudions maintenant $\mathcal{R}_k(t)$. Pour cela l'on observe que pour tous champs de vecteurs a et b dans $\mathcal{V}_\sigma$, on a $(b\otimes b|a)_{L^2} = -\langle Q(b,b), \nabla a\rangle$ et donc

$$
(b\otimes b|\nabla a)_{L^2} - \langle Q(a,a), b\rangle = -\langle Q(b,b), a\rangle - \langle Q(a,a), b\rangle.
$$

En utilisant (4.1), on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\langle Q(b,b), a\rangle + \langle Q(a,a), b\rangle &= \langle Q(b,b), a-b\rangle + \langle Q(a,a), b-a\rangle \\
&= \langle Q(b,b), a-b\rangle + \langle Q(a,b), b-a\rangle.
\end{aligned}
$$

On trouve donc

$$
\begin{aligned}
\langle Q(b,b), a\rangle + \langle Q(a,a), b\rangle &= \langle Q(a-b,b), b-a\rangle \\
&= -\big((a-b)\otimes b|\nabla(b-a)\big)_{L^2}.
\end{aligned}
$$

En combinant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (voir page 37), on trouve que pour tout (a,b,c) dans $\mathcal{V}_\sigma^3$, on a

$$
\begin{aligned}
|(a\otimes b|\nabla c)_{L^2}| &\leq C\|a\|_{L^6}\|b\|_{L^3}\|\nabla c\|_{L^2} \\
&\leq C\|\nabla a\|_{L^2}\|b\|_{L^2}^{\frac12}\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac12}\|c\|_{\mathcal{V}}.
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

On peut donc conclure que pour tout $b\in L^\infty([0,T];\mathcal{H})\cap L^2([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$, la fonction

$$
\mathcal{Q}_b \ : \ a \mapsto \mathcal{Q}(a,b)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t (b(t')\otimes b(t')|\nabla a(t'))_{L^2}\, dt' - \int_0^t \langle Q(a(t'), a(t')), b(t')\rangle\, dt'.
$$

est continue de $L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$ dans $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R})$. Il s'ensuit que pour tout t dans $[0,T]$, on a

$$
\lim_{k\to\infty} \mathcal{R}_k(t) = \int_0^t ((u-v)(t')\otimes u(t')|\nabla(u-v)(t'))_{L^2}\, dt'.
$$

De (5.5) et (5.4) on déduit que

$$
\begin{aligned}
\delta_\nu(t) \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}\|\nabla(u-v)(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma}^2 dt' \\
+ C\int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}\|\nabla(u-v)(t')\|_{L^2}^{\frac32}\|(u-v)(t')\|_{L^2}^{\frac12}\, dt'.
\end{aligned}
$$

Par une inégalité de convexité on trouve

$$\|(u-v)(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla(u-v)(t')\|_{L^2}^2\,dt' \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2$$
$$+ \frac{2}{\nu}\int_0^t \|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2\,dt' + \frac{C}{\nu^3}\int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^4 \|(u-v)(t')\|_{L^2}^2\,dt'.$$

Le lemme de Gronwall permet de conclure la démonstration de la dernière partie du théorème.

Reste à prouver le lemme 5.1.1. Pour cela, observons que, comme le domaine Ω est borné, et par l'inclusion de Sobolev du théorème 2.3.1 page 35, on trouve

$$\begin{aligned} \|u\otimes v\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} &\leq \|u\|_{L^4([0,T]\times\Omega)}\|v\|_{L^4([0,T]\times\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{L^4([0,T];L^6(\Omega))}\|v\|_{L^4([0,T];L^6(\Omega))} \\ &\leq \|u\|_{L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)}\|v\|_{L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Donc si u est dans $L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$, alors $Q(u,u)$ appartient à $L^2([0,T];\mathcal{V}'_\sigma)$. Comme $\Delta u \in L^2([0,T];\mathcal{V}'_\sigma$, cela implique que $\partial_t u$ aussi. Donc le théorème de Lebesgue donne

$$\lim_{k\to\infty} \|P_k u - u\|_{L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)} = \lim_{k\to\infty} \|P_k\partial_t u - \partial_t u\|_{L^2([0,T];\mathcal{V}'_\sigma)} = 0.$$

Par définition de P_k, on a

$$P_k u = \sum_{j=0}^k \alpha_j(t) e_j \quad \text{avec} \quad \partial_t \alpha_j \in L^2([0;T]).$$

Soit θ_j une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta_j(0) = \alpha_j(0)$ et $\theta_j(T) = \alpha_j(T)$. La fonction $\widetilde{\alpha}_j$ définie par θ_j en dehors de $[0,T]$ et α_j dans $[0,T]$ appartient à $H^1(\mathbb{R})$ et est à support compact. Soit χ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale égale à 1. Alors $\epsilon^{-1}\chi(\epsilon^{-1}\cdot)\star\widetilde{\alpha}_j$ tend vers $\widetilde{\alpha}_j$ dans $H^1(\mathbb{R})$. En choisissant convenablement ϵ, on définit une suite $(\widetilde{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout k, la fonction $\tilde{u}_k$ soit à valeurs dans $P_k(\mathcal{V}'_\sigma)$, vérifie $\partial_t\tilde{u}_k \in L^2([0,T];\mathcal{V}'_\sigma)$ et

$$\lim_{k\to\infty} \|\widetilde{u}_k - u\|_{L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)} = \lim_{k\to\infty} \|\partial_t\widetilde{u}_k - \partial_t u\|_{L^2([0,T];\mathcal{V}'_\sigma)} = 0.$$

On a donc aussi $\lim_{k\to\infty}\|\Delta\widetilde{u}_k - \Delta u\|_{L^2([0,T];\mathcal{V}'_\sigma)} = 0$. De plus, l'inégalité (5.6) implique que

$$\lim_{k\to\infty} \|Q(\widetilde{u}_k,\widetilde{u}_k) - Q(u,u)\|_{L^2([0,T];\mathcal{V}'_\sigma)} = 0.$$

Ceci achève la démonstration du lemme 5.1.1.

5.2 Le théorème de Fujita-Kato

Le but de cette section est de démontrer l'existence de solutions à (NS_ν) qui sont L^4 en temps à valeurs dans $\mathcal{V}_\sigma$. Pour pouvoir énoncer le théorème, nous allons introduire des espaces intermédiaires entre $\mathcal{V}'_\sigma$ et $\mathcal{V}_\sigma$. Ensuite nous démontrerons un théorème d'existence globale pour données petites, et un théorème local pour données grandes.

5.2.1 Espaces intermédiaires

Definition. Soit s dans $[-1,1]$. On note $\mathcal{V}_\sigma^s$ l'espace des champs de vecteurs u dans $\mathcal{V}'_\sigma$ tels que

$$\|u\|^2_{\mathcal{V}_\sigma^s} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \lambda_j^{2s}\langle u, e_j\rangle^2 < +\infty.$$

Il est évident que $\mathcal{V}_\sigma^s$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_\sigma^s}$ est un espace de Hilbert. Le théorème 3.2.3 implique que $\mathcal{V}_\sigma^0 = \mathcal{H}$, $\mathcal{V}_\sigma^1 = \mathcal{V}_\sigma$ et que $\mathcal{V}_\sigma^{-1} = \mathcal{V}'_\sigma$.

La proposition suivante sera importante dans les paragraphes suivants.

Proposition 5.2.1. *L'espace $\mathcal{V}_\sigma^{\frac12}$ s'injecte continûment dans L^3 et l'espace $L^{\frac32}\cap\mathcal{V}'_\sigma$ s'injecte continûment dans $\mathcal{V}_\sigma^{-\frac12}$.*

Preuve : Cette proposition peut se démontrer en utilisant de l'interpolation abstraite. Nous préférons ici donner une démonstration auto-contenue dans l'esprit de celle du théorème 2.3.1 page 35. Supposons que $\|a\|_{\mathcal{V}_\sigma^{\frac12}} \leq 1$. Pour tout $\Lambda > 0$, on définit

$$a_\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j/\,\lambda_j<\Lambda} \langle a, e_j\rangle e_j \quad \text{et} \quad b_\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} a - a_\Lambda.$$

En utilisant le fait que

$$\big\{|a| > \Lambda\big\} \subset \big\{|a_\Lambda| > \tfrac{\Lambda}{2}\big\} \cup \big\{|b_\Lambda| > \tfrac{\Lambda}{2}\big\},$$

on peut écrire, en vertu de l'exercice 1.7,

$$\begin{aligned}
\|a\|^3_{L^3} &\leq 3^3 \int \Lambda^2\mu\big\{|a_\Lambda| > \tfrac{\Lambda}{2}\big\}\, d\Lambda + 3^3 \textstyle\int \Lambda^2\mu\big\{|b_\Lambda| > \tfrac{\Lambda}{2}\big\}\, d\Lambda \\
&\leq 3^3\times 2^6 \int \Lambda^{-4}\|a_\Lambda\|^6_{L^6}\, d\Lambda + 4\times 3^3 \int \|b_\Lambda\|^2_{L^2} d\,\Lambda. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.3.1 et la définition de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_\sigma^s}$, on a

$$\begin{aligned}
\|a_\Lambda\|^2_{L^6} &\leq C\|a_\Lambda\|^2_{\mathcal{V}_\sigma} \\
&\leq C \sum_{j/\,\lambda_j<\Lambda} \lambda_j^2 \langle a, e_j\rangle^2 \\
&\leq C\Lambda\|a\|^2_{\mathcal{V}_\sigma^{\frac12}}.
\end{aligned}$$

Sachant que $\|a\|_{\mathcal{V}_\sigma^{\frac12}} \leq 1$, on peut donc écrire en utilisant une nouvelle fois l'injection de $\mathcal{V}_\sigma$ dans L^6,

$$\|a_\Lambda\|^6_{L^6} \leq C\Lambda^2 \|a_\Lambda\|^2_{\mathcal{V}_\sigma}.$$

En insérant cette inégalité dans (5.7), on obtient donc finalement

$$\begin{aligned}
\|a\|^3_{L^3} &\leq C\int \Lambda^{-2}\|a_\Lambda\|^2_{\mathcal{V}_\sigma} d\Lambda + C\int \|b_\Lambda\|^2_{L^2} d\Lambda \\
&\leq \sum_j \int \Lambda^{-2}\lambda_j^2 \langle a, e_j\rangle^2 \mathbf{1}_{\Lambda>\lambda_j} d\Lambda + C\sum_j \int \langle a, e_j\rangle^2 \mathbf{1}_{\Lambda\leq\lambda_j} d\Lambda \\
&\leq C\sum_j \lambda_j \langle a, e_j\rangle^2 \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Cela démontre la première partie de la proposition. La seconde partie s'obtient par un argument de dualité. Par définition on a, pour tout a dans $\mathcal{V}_\sigma$,

$$\begin{aligned}\|a\|_{\mathcal{V}_\sigma^{-\frac{1}{2}}} &= \|(\lambda_j^{-\frac{1}{2}}\langle a, e_j\rangle)_{j\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}\\ &= \sup_{\|(\alpha_j)\|_{\ell^2}=1}\sum_j \lambda_j^{-\frac{1}{2}}\langle a, e_j\rangle\alpha_j.\end{aligned}\tag{5.8}$$

L'application L définie par

$$L\ :\ \begin{cases}\ell^2 & \rightarrow\ \mathcal{V}_\sigma^{\frac{1}{2}}\\ (\alpha_j) & \mapsto\ \displaystyle\sum_j \alpha_j\lambda_j^{-\frac{1}{2}}e_j\end{cases}$$

est une isométrie. Par (5.8), on a

$$\|a\|_{\mathcal{V}_\sigma^{-\frac{1}{2}}} = \sup_{\|\varphi\|_{\mathcal{V}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\leq 1}\sum_j (L^{-1}\varphi)_j\lambda_j^{-\frac{1}{2}}\langle a, e_j\rangle.$$

Pour tout φ dans $\mathcal{V}_\sigma$, on a

$$\sum_j (L^{-1}\varphi)_j\lambda_j^{-\frac{1}{2}}\langle a, e_j\rangle = \langle a,\varphi\rangle.$$

Si l'on suppose que a est dans $L^{\frac{3}{2}}$, comme $\varphi\in L^6$, on obtient que

$$\langle a,\varphi\rangle = \int_\Omega a(x)\varphi(x)dx.$$

Par l'inégalité de Hölder et la proposition 5.2.1 on trouve que

$$|\langle a,\varphi\rangle| \leq \|a\|_{L^{\frac{3}{2}}}\|\varphi\|_{L^3} \leq C\|a\|_{L^{\frac{3}{2}}}\|\varphi\|_{\mathcal{V}_\sigma^{\frac{1}{2}}}.$$

On a donc

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{V}_\sigma,\ \|\varphi\|_{\mathcal{V}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\leq 1}\sum_j (L^{-1}\varphi)_j\lambda_j^{-\frac{1}{2}}\langle a, e_j\rangle\|a\|_{\mathcal{V}_\sigma^{-\frac{1}{2}}} \leq C\|a\|_{L^{\frac{3}{2}}}.$$

Enfin, en revenant à la définition des espaces intermédiaires, on vérifie facilement la densité de $\mathcal{V}_\sigma$ dans $\mathcal{V}_\sigma^{\frac{1}{2}}$, d'où le résultat. ■

5.2.2 Un résultat d'existence globale

L'objectif de ce paragraphe est de montrer un théorème d'existence globale à données petites dans $\mathcal{V}_\sigma^{\frac{1}{2}}$: le **théorème de Fujita-Kato**.

Théorème 5.2.1. *Si la donnée initiale u_0 appartient à $\mathcal{V}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ et si $f\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma^{-\frac{1}{2}})$ alors il existe un temps strictement positif T tel que la solution u de (NS_ν) existe dans $L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$.*

Cette solution est unique et appartient à $\mathcal{C}([0,T];\mathcal{V}_\sigma^{\frac{1}{2}})$. En outre il existe une constante c (qui peut être choisie indépendante du domaine Ω) telle que, si

$$\|v_0\|_{\mathcal{V}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\nu}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}_\sigma^{-\frac{1}{2}})} \leq c\nu,$$

alors la solution est globale.

Preuve : Pour simplifier, nous allons ignorer la force extérieure dans la démonstration. Considérons la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ utilisée dans la démonstration du théorème de Leray. Il s'agit de démontrer que cette suite est bornée dans $L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$ pour un $T>0$.

Le théorème 3.3.1 implique que $u_k = \sum_{j=0}^k U_{j,k}(t)e_j$ avec, pour tout $j\in\{0,\cdots,k\}$,

$$U_{j,k}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (u_0|e_j)_{L^2}e^{-\nu\lambda_j^2 t} + \int_0^t e^{-\nu\lambda_j^2(t-t')}\langle Q(u_k(t'),u_k(t')),e_j\rangle dt'. \tag{5.9}$$

En utilisant la proposition 5.2.1 on a que pour tous champs de vecteurs a et b dans $\mathcal{V}_\sigma$,

$$\begin{aligned}\|\operatorname{div}(a\otimes b)\|_{\mathcal{V}_\sigma^{-\frac12}} &= \|(a\cdot\nabla b)\|_{\mathcal{V}_\sigma^{-\frac12}}\\ &\leq C\|a\cdot\nabla b\|_{L^{\frac32}}\\ &\leq C\|a\|_{L^6}\|\nabla b\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Par les injections de Sobolev et les propriétés de continuité de l'opérateur P_k, on obtient donc que

$$\|\operatorname{div}(a\otimes b)\|_{\mathcal{V}_\sigma^{-\frac12}} \leq C\|a\|_{\mathcal{V}_\sigma}\|b\|_{\mathcal{V}_\sigma}, \tag{5.10}$$

$$\|P_k\operatorname{div}(a\otimes b)\|_{\mathcal{V}_\sigma^{-\frac12}} \leq C\|a\|_{\mathcal{V}_\sigma}\|b\|_{\mathcal{V}_\sigma}. \tag{5.11}$$

Par définition de la norme de $\mathcal{V}_\sigma^{-\frac12}$, on en déduit qu'il existe une suite $(c_{j,k})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\ |\langle Q(u_k(t),u_k(t)),e_j\rangle| \leq Cc_{j,k}(t)\lambda_j^{\frac12}\|u_k(t)\|^2_{\mathcal{V}_\sigma} \quad\text{avec}\quad \sum_j c_{j,k}^2(t)=1. \tag{5.12}$$

En injectant cette inégalité dans (5.9), on obtient pour tout $t>0$,

$$|U_{j,k}(t)| \leq |(u_0|e_j)|e^{-\nu\lambda_j^2 t} + C\lambda_j^{\frac12}\int_0^t e^{-\nu\lambda_j^2(t-t')}c_{j,k}(t')\|u_k(t')\|^2_{\mathcal{V}_\sigma}dt'. \tag{5.13}$$

L'inégalité de Young $\|f\star g\|_{L^4}\leq\|f\|_{L^{\frac43}}\|g\|_{L^2}$ implique donc que pour tout $T>0$,

$$\|U_{j,k}\|_{L^4([0,T])} \leq |(u_0|e_j)|\lambda_j^{-\frac12}\left(\frac{1-e^{-4\nu\lambda_j^2T}}{4\nu}\right)^{\frac14} + \frac{C}{\nu^{\frac34}}\lambda_j^{-1}\left(\int_0^T c_{j,k}^2(t)\|u_k(t)\|^4_{\mathcal{V}_\sigma}dt\right)^{\frac12}.$$

En multipliant par λ_j et en prenant la norme ℓ^2 on trouve

$$\begin{aligned}\Big(\sum_j\lambda_j^2\|U_{j,k}\|^2_{L^4([0,T])}\Big)^{\frac12} \leq{}& \Big(\sum_j\lambda_j(u_0|e_j)^2\Big(\frac{1-e^{-4\nu\lambda_j^2T}}{4\nu}\Big)^{\frac12}\Big)^{\frac12}\\ &+\frac{C}{\nu^{\frac34}}\Big(\sum_j\int_0^T c_{j,k}^2(t)\|u_k(t)\|^4_{\mathcal{V}_\sigma}dt\Big)^{\frac12}.\end{aligned}$$

Par (5.12), comme $\sum_j c_{j,k}^2\leq 1$, on a

$$\Big(\sum_j\lambda_j^2\|U_{j,k}\|^2_{L^4([0,T])}\Big)^{\frac12} \leq \Big(\sum_j\lambda_j(u_0|e_j)^2\Big(\frac{1-e^{-4\nu\lambda_j^2T}}{4\nu}\Big)^{\frac12}\Big)^{\frac12} + \frac{C}{\nu^{\frac34}}\|u_k\|^2_{L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)}.$$

Notons $a_j \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda_j \|U_{j,k}\|_{L^4([0,T])}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \|a_j(t)\|^4_{\ell^2(\mathbb{N})} dt &= \int_0^T \Big(\sum_j a_j^2(t)\Big)^2 dt \\
&= \sum_{j,k} \int_0^T a_j(t)^2 a_k(t)^2 dt \\
&\leq \sum_{j,k} \|a_j\|^2_{L^4([0,T])} \|a_k\|^2_{L^4([0,T])} \\
&\leq \Big\| \big(\|a_j\|_{L^4([0,T])}\big) \Big\|^4_{\ell^2}.
\end{aligned}
$$

On obtient donc que

$$
\|u_k\|_{L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)} \leq \Big(\sum_j \lambda_j (u_0|e_j)^2 \Big(\frac{1-e^{-4\nu\lambda_j^2 T}}{4\nu}\Big)^{\frac12}\Big)^{\frac12} + \frac{C}{\nu^{\frac34}} \|u_k\|^2_{L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)}.
$$

Définissons

$$
T_k \stackrel{\text{def}}{=} \sup\Big\{ T > 0 \,/\, \|u_k\|_{L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)} \leq \frac{\nu^{\frac34}}{2C} \Big\}.
$$

Comme u_k appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_k)$, on a $T_k > 0$. De l'inégalité précédente, on tire alors

$$
\forall T \in [0, T_k]\,,\ \|u_k\|_{L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)} \leq 2\Big(\sum_j \lambda_j (u_0|e_j)^2 \Big(\frac{1-e^{-4\nu\lambda_j^2 T}}{4\nu}\Big)^{\frac12}\Big)^{\frac12}. \tag{5.14}
$$

Remarquons que pour tout $T > 0$, on a

$$
\Big(\sum_j \lambda_j (u_0|e_j)^2 \Big(\frac{1-e^{-4\nu\lambda_j^2 T}}{4\nu}\Big)^{\frac12}\Big)^{\frac12} \leq \frac{C}{\nu^{\frac14}} \|u_0\|_{\mathcal{V}_\sigma^{\frac12}}.
$$

Donc si $\|u_0\|_{\mathcal{V}_\sigma^{\frac12}} < \dfrac{\nu}{4C^2}$, on a, pour tout $T < T_k$,

$$
\|u_k\|_{L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)} < \frac{\nu^{\frac34}}{2C}.
$$

Cela implique que $T_k = +\infty$ et que pour tout $T > 0$,

$$
\|u_k\|_{L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)} \leq \frac{2C}{\nu^{\frac14}} \|u_0\|_{\mathcal{V}_\sigma^{\frac12}}.
$$

Dans le cas de grandes données, définissons le plus petit entier j_0 tel que

$$
\Big(\sum_{j>j_0} \lambda_j (u_0|e_j)^2\Big)^{\frac12} < \frac{\nu}{8C^2}. \tag{5.15}
$$

Alors en utilisant le fait que $1 - e^{-x} \leq x$ pour tout $x \geq 0$, on a pour tout $T < T_k$,

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_j \lambda_j (u_0|e_j)^2 \Big(\frac{1-e^{-4\nu\lambda_j^2 T}}{4\nu}\Big)^{\frac12}\Big)^{\frac12} &\leq \frac{\nu}{8C^2} + \Big(\sum_{j\leq j_0} \lambda_j (u_0|e_j)^2 \Big(\frac{1-e^{-4\nu\lambda_j^2 T}}{4\nu}\Big)^{\frac12}\Big)^{\frac12} \\
&\leq \frac{\nu}{8C^2} + \lambda_{j_0} T^{\frac14} \|u_0\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

En définissant
$$T_{u_0} \stackrel{\rm def}{=} \left(\frac{\nu}{8C^2\lambda_{j_0}\|u_0\|_{L^2}}\right)^4,$$
on obtient pour tout $T>0$ plus petit que $\min\{T_k; T_{u_0}\}$,
$$\|u_k\|_{L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)} < \frac{\nu^{\frac34}}{2C}.$$
On en déduit que pour tout k, on a $T \geq T_{u_0}$. Cela implique que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$. Comme de plus $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers la solution de Leray u de (NS_ν) dans l'espace $L^\infty([0,T];\mathcal{V}'_\sigma)$, on en conclut que u est dans $L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$. Par le théorème 5.1.1, cette solution est unique sur $[0,T]$, continue de $[0,T]$ dans $\mathcal{H}$ et vérifie l'égalité d'énergie sur $[0,T]$.

Le seul point à démontrer maintenant est la continuité de u de $[0,T]$ dans $\mathcal{V}_\sigma^{\frac12}$. Comme u appartient à $L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)$, on trouve par (5.10) que $Q(u,u)$ est dans $L^2([0,T];\mathcal{V}_\sigma^{-\frac12})$. Par le théorème 3.3.1, on obtient
$$(u(t)|e_j) = (u_0|e_j)e^{-\nu\lambda_j^2 t} + \int_0^t e^{-\nu\lambda_j^2(t-t')}\langle Q(u(t'),u(t')),e_j\rangle\,dt'.$$
En utilisant encore (5.10), par définition de la norme dans $\mathcal{V}_\sigma^{-\frac12}$, on trouve que
$$|(u(t)|e_j)| \leq |(u_0|e_j)|e^{-\nu\lambda_j^2 t} + C\lambda_j^{\frac12}\int_0^t c_j(t')e^{-\nu\lambda_j^2(t-t')}\|(u(t')\|^2_{\mathcal{V}_\sigma}\,dt' \text{ avec } \sum_j c_j^2(t) = 1. \quad (5.16)$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a
$$\|(u(t)|e_j)\|_{L^\infty([0,T])} \leq |(u_0|e_j)| + \frac{C}{\nu^{\frac12}}\lambda_j^{-\frac12}\left(\int_0^T c_j^2(t)\|u(t)\|^4_{\mathcal{V}_\sigma}\,dt\right)^{\frac12}.$$
En multipliant par $\lambda_j^{\frac12}$ et en prenant la norme ℓ^2 on trouve
$$\begin{aligned}\left(\sum_j \lambda_j\|(u(t)|e_j)\|^2_{L^\infty([0,T])}\right)^{\frac12} &\leq \|u_0\|_{\mathcal{V}_\sigma^{\frac12}} + \frac{C}{\nu^{\frac12}}\left(\sum_j\int_0^T c_j^2(t)\|u(t)\|^4_{\mathcal{V}_\sigma}\right)^{\frac12}\\ &\leq \|u_0\|_{\mathcal{V}_\sigma^{\frac12}} + \frac{C}{\nu^{\frac12}}\|u\|^2_{L^4([0,T];\mathcal{V}_\sigma)}.\end{aligned}$$
Cela donne clairement que u est dans $L^\infty([0,T];\mathcal{V}_\sigma^{\frac12})$. En fait cela va impliquer la continuité en utilisant l'argument suivant. Soit η un nombre strictement positif. Il existe un entier j_0 tel que
$$\left(\sum_{j>j_0}\lambda_j\|(u(t)|e_j)\|^2_{L^\infty([0,T])}\right)^{\frac12} < \frac{\eta}{4}.$$
Mais
$$\begin{aligned}\|u(t)-u(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma^{\frac12}} &\leq 2\left(\sum_{j>j_0}\lambda_j\|(u(t)|e_j)\|^2_{L^\infty([0,T])}\right)^{\frac12} + \left(\sum_{j\leq j_0}\lambda_j(u(t)-u(t')|e_j)^2\right)^{\frac12}\\ &\leq \frac{\eta}{2} + \lambda_{j_0}^{\frac12}\|u(t)-u(t')\|_{L^2}.\end{aligned}$$
Le théorème 3.3.1 dit que u est continue de $[0,T]$ dans $\mathcal{H}$. Cela termine la démonstration du théorème 5.2.1. ■

5.2.3 Quelques remarques sur ces solutions stables

Dans ce paragraphe, nous allons supposer que la force f est identiquement nulle. Nous allons montrer des résultats sur le temps maximal d'existence de la solution construite au paragraphe précédent.

Proposition 5.2.2. *Supposons que la donnée initiale u_0 appartienne à $\mathcal{V}_\sigma$. Alors le temps maximal d'existence $T^\star$ de la solution u dans $\mathcal{C}([0,T^\star[;\mathcal{V}_\sigma^{\frac{1}{2}})\cap L^4_{loc}([0,T^\star[;\mathcal{V}_\sigma)$ vérifie*

$$T^\star \geq \frac{c\nu^3}{\|\nabla u_0\|^4_{L^2}}. \tag{5.17}$$

Preuve : Par (5.14), il existe une constante $c>0$ telle que $T^\star$ soit minoré par tout réel T tel que

$$\sum_j \lambda_j (u_0|e_j)^2 \Big(\frac{1-e^{-\nu\lambda_j^2 T}}{\nu}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq c^{\frac{1}{2}}\nu^{\frac{3}{2}}. \tag{5.18}$$

Comme $1-e^{-\nu\lambda_j^2T}\leq \nu\lambda_j^2 T$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_j \lambda_j (u_0|e_j)^2 \Big(\frac{1-e^{-\nu\lambda_j^2 T}}{\nu}\Big)^{\frac{1}{2}} &\leq T^{\frac{1}{2}}\sum_j \lambda_j^2 (u_0|e_j)^2\\ &\leq T^{\frac{1}{2}}\|u_0\|^2_{\mathcal{V}_\sigma}.\end{aligned}$$

Quitte à diminuer c, on peut donc conclure que l'inégalité (5.18) est assurée dès que $T\leq \frac{c\nu^3}{\|\nabla u_0\|^4_{L^2}}$. ■

De cette proposition on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.1. *Si le temps maximal d'existence $T^\star$ d'une solution u de (NS_ν) dans $\mathcal{C}[0,T^\star[;\mathcal{V}_\sigma^{\frac{1}{2}})\cap L^4_{loc}([0,T^\star[;\mathcal{V}_\sigma))$ est fini alors*

$$\int_0^{T^\star}\|\nabla u(t)\|^4_{L^2}dt=+\infty \quad \textit{et} \quad T^\star\leq \frac{c}{\nu^5}\|u_0\|^4_{L^2}.$$

Preuve : Pour presque tout t, le champ $u(t)$ appartient à $\mathcal{V}_\sigma$. Donc par la proposition précédente, le temps maximal d'existence de la solution commençant au temps t, qui est, par unicité de la solution, égal à $T^\star - t$, vérifie

$$T^\star - t\geq \frac{c\nu^3}{\|\nabla u(t)\|^4_{L^2}}.$$

Cela peut s'écrire

$$\|\nabla u(t)\|^4_{L^2}\geq \frac{c\nu^3}{T^\star - t}.$$

Cela donne la première partie du corollaire. En prenant la racine carrée de cette inégalité puis en intégrant sur $[0,T^*[$, on trouve, par l'estimation d'énergie,

$$c\int_0^{T^\star}\frac{1}{(T^\star-t)^{\frac{1}{2}}}dt\leq \frac{\nu^{-\frac{5}{2}}}{2}\|u_0\|^2_{L^2}.$$

Le corollaire est démontré. ■

5.3 Exercices

Exercice 5.1. On reprend les notations de l'exercice 4.1. On suppose désormais que $d = 3$ et l'on note $\mathcal{V} := H_0^1(\Omega)$. On suppose que u_0 appartient à l'espace $\mathcal{V}^{\frac{1}{2}}$ défini par

$$\mathcal{V}^{\frac{1}{2}} := \Big\{ v \in \mathcal{V} \ \mid \ \|v\|_{\mathcal{V}^{\frac{1}{2}}} := \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k |(v \,|\, e_k)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty \Big\}.$$

1) Montrer qu'il existe $T > 0$ tel que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit uniformément bornée dans

$$L^4(0,T;\mathcal{V}) \cap \mathcal{C}([0,T];\mathcal{V}^{\frac{1}{2}}).$$

2) Montrer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^4(0,T;\mathcal{V}) \cap \mathcal{C}([0,T];\mathcal{V}^{\frac{1}{2}})$. En déduire que (E) a une solution $u \in L^4(0,T;\mathcal{V}) \cap \mathcal{C}([0,T];\mathcal{V}^{\frac{1}{2}})$ qui vérifie (4.7).

3) Cette solution est-elle unique ?

4) Que dire si $\|u_0\|_{\mathcal{V}^{\frac{1}{2}}}$ est très petit ?

Exercice 5.2. Dans tout cet exercice, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ et $p \in [2, +\infty[$. On se donne une solution de Leray u associée à u_0 dans $\mathcal{H}$ et f dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{V}'_\sigma)$.

1) Vérifier qu'il existe une constante C telle que pour tout $(v,w) \in \mathcal{V}_\sigma^2$ on ait

$$\big|\langle \mathrm{div}\,(w \otimes v), w\rangle\big| \leq C \|\nabla w\|_{L^2} \|w\|_{L^{\frac{6p}{p+4}}} \|v\|_{L^{\frac{3p}{p-2}}}.$$

2) En déduire que si de plus u est dans $L^p([0,T];L^{\frac{3p}{p-2}})$ alors u est l'unique solution de Leray sur $[0,T]$ et vérifie l'égalité d'énergie ainsi qu'une inégalité de stabilité que l'on énoncera.

Chapter 6

Théorie de Littlewood-Paley

6.1 Découpage dyadique

L'idée de base consiste à échantillonner les fréquences à l'aide d'un découpage de leur espace en couronnes de taille 2^q, où q décrit l'ensemble des entiers naturels. L'intérêt de cette technique réside dans le comportement vis-à-vis de la dérivation des distributions tempérées dont la transformée de Fourier est à support compact. Si le support de $\widehat{u}$ est inclus dans une boule de centre 0 et de rayon λ, alors une dérivation coûte au plus λ ; si le support de $\widehat{u}$ est inclus dans une couronne de centre 0, de petit rayon $r_1\lambda$ et de grand rayon $r_2\lambda$, notée $\mathcal{C}(0, r_1\lambda, r_2\lambda)$, alors une dérivation coûte exactement λ. Plus précisement, on a le lemme suivant :

Lemme (Inégalités de Bernstein). *Soit (r_1, r_2) un couple de réels strictement positifs tels que $r_1 < r_2$. Il existe une constante C telle que, pour tout entier k, tout couple de réels (a, b) tel que $b \geq a \geq 1$ et toute fonction u de L^a, on ait*

$$\text{Supp } \widehat{u} \subset B(0, r_1\lambda) \Rightarrow \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^b} \leq C^k \lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \|u\|_{L^a} \ ;$$

$$\text{Supp } \widehat{u} \subset \mathcal{C}(0, r_1\lambda, r_2\lambda) \Rightarrow C^{-k}\lambda^k \|u\|_{L^a} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \leq C^k \lambda^k \|u\|_{L^a}.$$

Preuve : Par un argument d'échelle, on peut supposer que $\lambda = 1$. Soit ϕ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ valant 1 près de la boule de centre 0 et de rayon r_1, désignons par g sa transformée de Fourier inverse. Il est clair que $\widehat{u}(\xi) = \phi(\xi)\widehat{u}(\xi)$. On en déduit alors que

$$u(x) = \int g(y) u(x-y) dy.$$

Par dérivation, il vient, pour tout multi-entier α,

$$\partial^\alpha u(x) = \int (\partial^\alpha g)(y) u(x-y) dy.$$

On utilise alors l'inégalité de Young (voir page 20) et il vient

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^b} \leq \|\partial^\alpha g\|_{L^c} \|u\|_{L^a} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c} = 1 + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\cdot$$

Or, on a les majorations suivantes :

$$
\begin{aligned}
\|\partial^\alpha g\|_{L^c} &\leq \|\partial^\alpha g\|_{L^\infty} + \|\partial^\alpha g\|_{L^1}\\
&\leq \|(1+|\cdot|^2)^d \partial^\alpha g\|_{L^\infty}\\
&\leq \|(\mathrm{Id}-\Delta)^d\big((\cdot)^\alpha \phi\big)\|_{L^1}\\
&\leq C^k.
\end{aligned}
$$

D'où le premier point du lemme. Pour démontrer le second, considérons une fonction $\widetilde{\phi}$ de $\mathcal{D}$, à support compact ne contenant pas l'origine, et valant 1 près de $\mathcal{C}(0,r_1,r_2)$. Pour tout multi-index α de longueur k, posons

$$
g_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1} h_\alpha \quad \text{avec} \quad h_\alpha(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} (i\xi)^\alpha |\xi|^{-2k} \widetilde{\phi}(\xi).
$$

En utilisant l'identité algébrique

$$
\sum_{|\alpha|=k} (i\xi)^\alpha (-i\xi)^\alpha = |\xi|^{2k}, \tag{6.1}
$$

et le fait que $\widehat{u} = \widetilde{\phi}\widehat{u}$, on peut écrire que

$$
\widehat{u}(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} \widehat{g}_\alpha(\xi)\,(-i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi).
$$

Ceci implique que

$$
u = \sum_{|\alpha|=k} g_\alpha \star \partial^\alpha u.
$$

D'où le résultat à nouveau d'après les inégalités de Young. ■

Après avoir justifié son introduction, définissons une partition de l'unité dyadique. Nous l'utiliserons dans toute la suite de ces notes.

Proposition 6.1.1. *Désignons par $\mathcal{C}$ la couronne de centre 0, de petit rayon $3/4$ et de grand rayon $8/3$. Il existe alors deux fonctions positives radiales χ et φ appartenant respectivement à $\mathcal{D}(B(0,4/3))$ et à $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ telles que :*

$$
\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1, \tag{6.2}
$$

$$
|p-q| \geq 2 \Rightarrow \mathrm{Supp}\ \varphi(2^{-q}\cdot) \cap \mathrm{Supp}\ \varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset, \tag{6.3}
$$

$$
q \geq 1 \Rightarrow \mathrm{Supp}\ \chi \cap \mathrm{Supp}\ \varphi(2^{-q}\cdot) = \emptyset, \tag{6.4}
$$

si $\widetilde{\mathcal{C}} = B(0,2/3) + \mathcal{C}$, alors $\widetilde{\mathcal{C}}$ est une couronne et l'on a

$$
|p-q| \geq 5 \Rightarrow 2^p \widetilde{\mathcal{C}} \cap 2^q \mathcal{C} = \emptyset, \tag{6.5}
$$

$$
\frac{1}{2} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1. \tag{6.6}
$$

Preuve : Fixons un réel α dans l'intervalle $]1, 4/3[$ et notons $\mathcal{C}'$ la couronne de centre 0, de petit rayon α^{-1} et de grand rayon 2α. On choisit alors une fonction θ, radiale, à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, indéfiniment différentiable, supportée dans $\mathcal{C}$ et valant 1 près de $\mathcal{C}'$.

Le point important est le suivant. Pour tout couple d'entiers (p,q) on a

$$|p-q| \geq 2 \Rightarrow 2^q\mathcal{C} \cap 2^p\mathcal{C} = \emptyset. \tag{6.7}$$

En effet, supposons que $2^p\mathcal{C} \cap 2^q\mathcal{C} \neq \emptyset$, et que $p \geq q$. Il en résulte que $2^p \times 3/4 \leq 4 \times 2^{q+1}/3$, ce qui oblige $p-q$ à être inférieur ou égal à 1. Posons maintenant

$$S(\xi) = \sum_{q\in\mathbf{Z}} \theta(2^{-q}\xi).$$

D'après (6.7), cette somme est localement finie sur l'espace $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. La fonction S est donc de classe C^∞ sur cet espace. Le réel α étant strictement supérieur à 1,

$$\bigcup_{q\in\mathbf{Z}} 2^q\mathcal{C}' = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Comme θ est positive et vaut 1 près de $\mathcal{C}'$, il résulte de la propriété de recouvrement ci-dessus que la fonction S est strictement positive. On pose alors

$$\varphi = \frac{\theta}{S}\cdot \tag{6.8}$$

Vérifions que φ convient. Il est évident que $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{C})$. La fonction $1 - \sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi)$ est, d'après (6.7), de classe C^∞. Or, vu le support de φ, on a

$$|\xi| \geq \frac{4}{3} \Rightarrow \sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi) = 1. \tag{6.9}$$

D'où les identités (6.2) et (6.3) en posant

$$\chi(\xi) = 1 - \sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi). \tag{6.10}$$

L'identité (6.4) est une conséquence immédiate de (6.7) et de (6.9). Démontrons maintenant l'identité (6.5), qui nous sera utile dans la section 6.4. Il est clair que la couronne $\widetilde{\mathcal{C}}$ est la couronne de centre 0, de petit rayon $1/12$ et de grand rayon $10/3$. Alors, il vient

$$2^p\widetilde{\mathcal{C}} \cap 2^q\mathcal{C} \neq \emptyset \Rightarrow \Big(\frac{3}{4}\times 2^q \leq 2^p \times \frac{10}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{12}\times 2^p \leq 2^q\frac{8}{3}\Big)\cdot$$

D'où la relation (6.5).

Démontrons maintenant les inégalités (6.6). Comme χ et φ prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, il est clair que

$$\chi^2(\xi) + \sum_{q\geq 0}\varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1. \tag{6.11}$$

Minorons les sommes de carrés. On a $(\Sigma_0(\xi) + \Sigma_1(\xi))^2 = 1$ avec

$$\Sigma_0(\xi) = \sum_{q \text{ pair}}\varphi(2^{-q}\xi) \quad \text{et} \quad \Sigma_1(\xi) = \chi(\xi) + \sum_{q \text{ impair}}\varphi(2^{-q}\xi).$$

Il en résulte que $1 \leq 2(\Sigma_0^2(\xi) + \Sigma_1^2(\xi))$. Or, d'après (6.7), il vient

$$\Sigma_0^2(\xi) = \sum_{q \text{ pair}} \varphi^2(2^{-q}\xi) \quad \text{et} \quad \Sigma_1^2(\xi) = \chi^2(\xi) + \sum_{q \text{ impair}} \varphi^2(2^{-q}\xi)$$

d'où la proposition. ■

Nous allons maintenant fixer les notations qui nous serviront dans toute la suite de ce cours. On choisit une fois pour toutes deux fonctions χ et φ satisfaisant les propriétés (6.2)–(6.6).

Notations. Posons $h = \mathcal{F}^{-1}\varphi$ et $\widetilde{h} = \mathcal{F}^{-1}\chi$. On définit alors

$$\Delta_q u = 0 \text{ si } q \leq -2, \quad \text{et } \Delta_{-1} u = \chi(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\widehat{u}(\xi)),$$

$$\text{si } q \geq 0,\ \Delta_q u(x) = \varphi(2^{-q}D)u(x) = 2^{qd}\int h(2^q y)u(x-y)dy,$$

$$S_q u = \sum_{p \leq q-1} \Delta_p u.$$

Remarquons que l'on a $\varphi(\xi) = \chi(2\xi) - \chi(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. En conséquence,

$$S_q u(x) = \chi(2^{-q}D)u(x) = 2^{qd}\int \widetilde{h}(2^q y)u(x-y)dy \quad \text{si} \quad q \geq 0.$$

Maintenant, nous allons faire opérer ce découpage sur les distributions tempérées, c'est-à-dire voir en quel sens on peut écrire

$$\mathrm{Id} = \sum_q \Delta_q.$$

Proposition 6.1.2. *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On a alors, au sens de la convergence dans l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,*

$$u = \lim_{q \to +\infty} S_q u.$$

Preuve : Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a $< u - S_q u, f > = < u, f - S_q f >$. Il suffit donc de démontrer que l'on a, dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$f = \lim_{q \to \infty} S_q f,$$

ou encore, en travaillant côté Fourier,

$$\widehat{f} = \lim_{q \to \infty} \widehat{S_q f}.$$

La topologie usuelle de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ peut être définie par les semi-normes

$$N_{n,\alpha}(g) = \sup_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|)^n |\partial^\alpha g(\xi)|.$$

D'après la formule de Leibniz, il vient

$$N_{n,\alpha}(\widehat{f} - \widehat{S_q f}) \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d}\Big\{(1+|\xi|)^n \Big(|1-\chi(2^{-q}\xi)| \times |\partial^\alpha \widehat{f}(\xi)|)$$
$$+ \sum_{0<\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta} 2^{-q|\beta|}|(\partial^\beta\chi)(2^{-q}\xi)| \times |\partial^{\alpha-\beta}\widehat{f}(\xi)|\Big)\Big\}.$$

Comme χ vaut identiquement 1 près de l'origine, il en résulte que

$$N_{n,\alpha}(f - S_q f) \leq C_\alpha 2^{-q} \sup_{|\beta|\leq|\alpha|} N_{n+1,\beta}(f).$$

D'où la proposition. ■

6.2 Espaces de Sobolev

L'appartenance aux espaces de Sobolev va se traduire par des propriétés de décroissance en q de la norme L^2 de $\Delta_q u$. Définissons maintenant une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^s}$ en terme de décomposition dyadique. Comme le support de la transformée de Fourier de $\Delta_q u$ est inclus dans la couronne $2^q\mathcal{C}$, il est clair, d'après la définition de la norme sur H^s que l'on a

$$\frac{1}{C^{|s|+1}} 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^2} \leq \|\Delta_q u\|_{H^s} \leq C^{|s|+1} 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^2}. \tag{6.12}$$

D'après la relation (6.11), il vient

$$\frac{1}{2}\|u\|_{H^s}^2 \leq \int \chi^2(\xi)(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{q\geq 0}\int \varphi^2(2^{-q}\xi)(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \|u\|_{H^s}^2.$$

Grâce à (6.12), on a démontré la proposition suivante :

Proposition 6.2.1. *Il existe une constante C telle que l'on ait, pour tout réel s,*

$$\frac{1}{C^{|s|+1}}\|u\|_{H^s}^2 \leq \sum_q 2^{2qs}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2 \leq C^{|s|+1}\, \|u\|_{H^s}^2.$$

Dans toute la suite, on notera

$$|u|_s = (\sum_q 2^{2qs}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2)^{1/2}.$$

Le résultat suivant nous sera fort utile.

Proposition 6.2.2. *Soit $\widetilde{\mathcal{C}}$ une couronne. Il existe une constante C telle que l'on ait, pour tout réel s la propriété suivante : soit $(u_q)_{q\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que* Supp $\widehat{u}_q \subset 2^q\widetilde{\mathcal{C}}$*. Si la série $(2^{qs}\|u_q\|_{L^2})_{q\in\mathbf{N}}$ est de carré sommable, alors*

$$u = \sum_q u_q \in H^s \quad et \quad |u|_s^2 \leq C^{2|s|+2}\sum_q 2^{2qs}\|u_q\|_{L^2}^2.$$

Soit B une boule de centre 0. Il existe une constante C telle que l'on ait pour tout $s>0$ la propriété suivante : soit $(u_q)_{q\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que Supp $\widehat{u}_q \subset 2^q B$*. Si la série $(2^{qs}\|u_q\|_{L^2})_{q\in\mathbf{N}}$ est de carré sommable alors*

$$u \in H^s \quad et \quad |u|_s^2 \leq \frac{C^{2s+2}}{s^2}\sum_q 2^{2qs}\|u_q\|_{L^2}^2.$$

Preuve : Il existe un entier N tel que l'on ait

$$|p-q| > N \Rightarrow 2^p\widetilde{\mathcal{C}} \cap 2^q\mathcal{C} = \emptyset.$$

D'où il vient que

$$\Delta_q u = \sum_{|p-q|\leq N} \Delta_q u_p.$$

L'inégalité triangulaire et le fait que $\|\Delta_q u_p\|_{L^2} \leq \|u_p\|_{L^2}$ assurent que

$$\|\Delta_q u\|_{L^2} \leq \sum_{|p-q|\leq N} \|u_p\|_{L^2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{q\geq 0} 2^{2qs}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2 &\leq \sum_{|p-q|\leq N} 2^{2(q-p)s}2^{2ps}\|u_p\|_{L^2}^2\\ &\leq \left(\sum_{p\geq 0} 2^{2ps}\|u_p\|_{L^2}^2\right)\left(\sum_{r=-N}^{N} 2^{2rs}\right).\end{aligned}$$

L'application de la proposition 6.2.1 conclut alors la démonstration du premier point.

Pour démontrer le second point, notons d'emblée que la série $(u_q)_{q\in\mathbf{N}}$ est une série absolument convergente dans l'espace L^2. De plus, le support de la transformée de Fourier de u_q étant inclus dans $2^q B$, il existe un entier N tel que

$$\Delta_q u = \sum_{p\geq q-N} \Delta_q u_p.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^2} &\leq \sum_{p\geq q-N} 2^{qs}\|u_p\|_{L^2}\\ &\leq \sum_{p\geq q-N} 2^{(q-p)s}2^{ps}\|u_p\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Le réel s étant strictement positif, on a :

$$\left(\sum_q 2^{2qs}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2^{Ns}}{1-2^{-s}}\left(\sum_p 2^{2ps}\|u_p\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition. ■

6.3 Espaces de Hölder

Avant toute chose, nous allons rappeler la définition classique des **espaces de Hölder.**

Définition 6.3.1. *Soit r un réel strictement positif non entier.*

Si r appartient à l'intervalle $]0,1[$, on désigne par $C^r(\mathbb{R}^d)$, ou bien par C^r en l'absence d'ambiguïté, l'espace des fonctions u bornées sur $\mathbb{R}^d$ telles qu'il existe une constante C vérifiant, pour tout x et y de $\mathbb{R}^d$,

$$|u(x)-u(y)| \leq C|x-y|^r.$$

Si $r>1$, on désigne par $C^r(\mathbb{R}^d)$, ou bien par C^r en l'absence d'ambiguïté, l'espace des fonctions u telles que, pour tout multi-entier α de longueur plus petite que la partie entière de r, notée $[r]$, on ait

$$\partial^\alpha u \in C^{r-[r]}.$$

Il est clair que la norme

$$\widetilde{\|}u\|_r = \sum_{\alpha/|\alpha|\leq[r]} \left(\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} + \sup_{x\neq y} \frac{|\partial^\alpha u(x)-\partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^{r-[r]}}\right)$$

munit l'espace C^r d'une structure d'espace de Banach.

À l'instar des espaces de Sobolev, les espaces de Hölder peuvent être définis à l'aide de la décomposition de Littlewood-Paley. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Proposition 6.3.1. *Il existe une constante C telle que, pour tout réel strictement positif non entier r et toute fonction u appartenant à C^r, on ait*

$$\sup_q 2^{qr}\|\Delta_q u\|_{L^\infty} \leq \frac{C^{r+1}}{[r]!}\widetilde{\|u\|}_r.$$

Soit B une boule de $\mathbb{R}^d$. Il existe alors une constante C telle que, pour tout réel r strictement positif non entier, on ait la propriété suivante :

Considérons une distribution tempérée u telle que

$$u = \sum_{q\geq 0} u_q \quad avec \quad \mathrm{Supp}\ \widehat{u}_q \subset 2^q B.$$

Si la suite $(2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty})_{q\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors

$$\widetilde{\|u\|}_r \leq C\biggl(\frac{1}{r-[r]} + \frac{1}{[r]+1-r}\biggr)\sup_{q\geq 0} 2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty}.$$

Preuve : Pour démontrer le premier point, on commence par écrire l'opérateur Δ_q sous forme intégrale, ce qui donne pour $q\in\mathbb{N}$,

$$\Delta_q u(x) = 2^{qd}\int h(2^q(x-y))u(y)dy.$$

Le fait que la fonction φ soit identiquement nulle au voisinage de l'origine entraîne, par définition de h, que tous les moments de cette fonction sont nuls, c'est-à-dire que, pour tout multi-entier α,

$$\int x^\alpha h(x)dx = 0.$$

D'où il vient

$$\Delta_q u(x) = 2^{qd}\int h(2^q(x-y))\Bigl(u(y) - \sum_{k=0}^{[r]}\frac{1}{k!}D^k u(x)(y-x)^{(k)}\Bigr)dy. \tag{6.13}$$

La formule de Taylor à l'ordre $[r]$ entraîne que

$$\begin{aligned} u(y) - \sum_{k=0}^{[r]}\frac{1}{k!}D^k u(x)(y-x)^{(k)}dy \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{[r]-1}}{[r-1]!}\bigl(D^{[r]}u(x+t(y-x)) - D^{[r]}u(x)\bigr)\cdot(y-x)^{([r])}dt. \end{aligned}$$

Le fait que les fonctions $\partial^\alpha u$ soient dans l'espace $C^{r-[r]}$ assure que l'on a

$$\Bigl|u(y) - \sum_{k=1}^{[r]}\frac{1}{k!}D^k u(x)(y-x)^{(k)}dy\Bigr| \leq \frac{C}{[r]!}|y-x|^r\widetilde{\|u\|}_r.$$

Il résulte alors de (6.13) que

$$2^{qr}|\Delta_q u(x)| \leq \frac{C}{[r]!}2^{qd}\widetilde{\|u\|}_r\int\bigl(2^q|x-y|\bigr)^r|h(2^q(x-y))|dy.$$

Enfin, il est clair que $\|\Delta_{-1}u\|_{L^\infty} \leq \|\widetilde{h}\|_{L^1}\|u\|_{L^\infty}$, ce qui achève la preuve du premier point de la proposition.

Le second point est une généralisation de la réciproque du premier. Remarquons tout d'abord que $\|u_q\|_{L^\infty} \leq C2^{-qr}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. Ceci entraîne, d'après les inégalités de Bernstein que la série $\sum_q \partial^\alpha u_q$ est normalement convergente dans l'espace L^∞, et ce pour tout multi-entier α de longueur plus petite que $[r]$. On a donc

$$\partial^\alpha u \in L^\infty \quad \text{et} \quad \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} \leq C \sup_{q\geq 0} 2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty}. \tag{6.14}$$

Il nous reste donc à étudier le cas des dérivées partielles d'ordre $[r]$. Pour ce faire, on écrit

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq \sum_{q=0}^{N-1} |\partial^\alpha u_q(x) - \partial^\alpha u_q(y)| + \sum_{q\geq N} |\partial^\alpha u_q(x) - \partial^\alpha u_q(y)|\,;$$

l'entier N sera choisi judicieusement plus tard. On majore le premier terme de la somme en appliquant l'inégalité des accroissements finis :

$$|\partial^\alpha u_q(x) - \partial^\alpha u_q(y)| \leq |x-y| \sup_{|\beta|=[r]+1} \|\partial^\beta u_q\|_{L^\infty}.$$

D'après les inégalités de Bernstein, on a

$$|\partial^\alpha u_q(x) - \partial^\alpha u_q(y)| \leq C|x-y|2^{-q(r-[r]-1)} \sup_{q\geq 0} 2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty}. \tag{6.15}$$

Les termes de la seconde somme s'estiment brutalement, c'est-à-dire que l'on écrit

$$|\partial^\alpha u_q(x) - \partial^\alpha u_q(y)| \leq 2^{1-qr} \sup_{q\geq 0} 2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty}.$$

Il vient alors, en utilisant (6.15),

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq C\big(\sup_{q\geq 0} 2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty}\big)\Big(\sum_{q=0}^{N} 2^{-q(r-[r]-1)}|x-y| + \sum_{q\geq N+1} 2^{-q(r-[r])}\Big).$$

D'après (6.14), on peut supposer que $|x-y| \leq 1$. En posant

$$N = [-\log_2 |x-y|] + 1,$$

l'inégalité ci-dessus conclut la démonstration de la proposition. ∎

Comme nous le verrons dans la suite, il n'est pas sans intérêt de considérer des espaces de Hölder d'indice réel quelconque. On pose donc la définition suivante.

Définition 6.3.2. *Soit r un réel positif. On désigne par C^r l'ensemble des distributions tempérées qui vérifient*

$$\|u\|_r = \sup_q 2^{qr}\|\Delta_q u\|_{L^\infty} < \infty.$$

Il est tout à fait clair que ces espaces forment une chaîne décroissante d'espaces continûment inclus les uns dans les autres. De plus, la proposition 6.3.1 assure que, lorsque r est un réel positif non entier, cette définition coïncide avec la définition 6.3.1. En revanche, on prendra garde au fait que dans le cas $r \in \mathbb{N}$, l'espace obtenu n'est pas celui des fonctions bornées dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à r sont bornées (l'espace obtenu est en fait strictement plus grand). Pour cette raison, on notera parfois C^r_* l'espace défini ci-dessus dans le cas $r \in \mathbb{N}$.

C'est un exercice très facile laissé au lecteur que de démontrer que la norme $\|\cdot\|_r$ munit l'espace C^r d'une structure d'espace de Banach.

La proposition suivante complète l'analogie avec les espaces de Sobolev étudiés dans la section précédente.

Proposition 6.3.2. *Soit $\widetilde{\mathcal{C}}$ une couronne de $\mathbb{R}^d$. Il existe alors une constante C telle qu'étant donnés un réel r et une série $\sum u_q$, convergente vers u dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et vérifiant* $\operatorname{Supp}\, \widehat{u}_q \subset 2^q\widetilde{\mathcal{C}}$, *on ait*

$$\sup_{q\geq 0} 2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty} < \infty \Longrightarrow u \in C^r \quad \textit{et} \quad \|u\|_r \leq C^{|r|+1} \sup_q 2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty}.$$

Preuve : Il faut majorer $\|\Delta_p u\|_{L^\infty}$. Vu les hypothèses sur le support de la transformée de Fourier de u_q, il existe un entier N tel que

$$\Delta_p u = \sum_{q/|p-q|\leq N} \Delta_p u_q.$$

Comme $\|\Delta_p u_q\|_{L^\infty} \leq C\|u_q\|_{L^\infty}$, il vient

$$\|\Delta_p u\|_{L^\infty} \leq C \sum_{q/|p-q|\leq N} \|u_q\|_{L^\infty}.$$

De plus, le fait que $|p-q| \leq N$ entraîne que $2^q \leq C2^p$. D'où la proposition. ■

Remarque. La proposition ci-dessus permet en outre de vérifier que l'espace C^r de la définition 6.3.2 ne dépend pas de la décomposition de Littlewood-Paley choisie.

Étudions un peu plus précisément l'espace $C^1_\star$.

Proposition 6.3.3. *L'espace $C^1_\star$ est l'espace des fonctions bornées u telles qu'il existe une constante C qui vérifie, pour tout x et y dans $\mathbb{R}^d$,*

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C|y|.$$

Preuve : Supposons que la fonction u appartienne à $C^1_\star$. Considérons alors un point y de la boule unité de $\mathbb{R}^d$. En utilisant la décomposition dyadique de l'espace des fréquences et l'inégalité de Taylor à l'ordre 2 entre y et 0, il vient,

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq |y|^2 \sum_{q\leq N} \|D^2\Delta_q u\|_{L^\infty} + 4\sum_{q>N} \|\Delta_q u\|_{L^\infty}.$$

Le fait que u appartienne à $C^1_\star$ joint à l'application des inégalités de Bernstein, assure que

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C\|u\|_1 \left(|y|^2 \sum_{q\leq N} 2^q + 4\sum_{q>N} 2^{-q} \right).$$

Donc, à nouveau en choisissant $N = [-\log_2 y] + 1$, on obtient

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C\|u\|_1|y|.$$

Réciproquement, choisissons une fonction bornée u telle que, pour tout y dans $\mathbb{R}^d$, on ait $|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)| \leq C|y|$. Il s'agit de majorer $\|\Delta_q u\|_{L^\infty}$. On a bien sûr $\|\Delta_{-1}u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^\infty}$. Le fait que la fonction φ soit radiale, donc paire, entraîne que

$$\forall q \in \mathbb{N},\ 2^{qd}(h(2^q\cdot) \star u)(x) = 2^{qd} \int h(2^q y)u(x+y)dy.$$

Le fait que φ soit nulle près de l'origine assure que h est d'intégrale nulle. Donc on a

$$2^{qd}(h(2^q\cdot) \star u)(x) = 2^{qd-1} \int h(2^q y)\big(u(x+y)+u(x-y)-2u(x)\big)dy.$$

Comme la fonction $z \mapsto |z|h(z)$ est intégrable, on a

$$\|\Delta_q u\|_{L^\infty} \leq C 2^{-q} \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|}.$$

D'où la proposition. ∎

Proposition 6.3.4. *Il existe une constante C telle que, pour toute fonction u de $C^1_\star$ et pour tout x et y de $\mathbb{R}^d$ tels que $|x-y| \leq 1$, on ait*

$$|u(x)-u(y)| \leq C\|u\|_1 |x-y|(1-\log|x-y|).$$

Preuve : La démonstration est très semblable à celles qui précèdent. On écrit pour $|x-y| \leq 1$,

$$|u(x)-u(y)| \leq C|x-y| \sum_{q<N} 2^q \|\Delta_q u\|_{L^\infty} + C \sum_{q\geq N} \|\Delta_q u\|_{L^\infty}.$$

Il vient alors, par définition de $C^1_\star$,

$$|u(x)-u(y)| \leq C\|u\|_1((N+1)|x-y| + 2^{-N}).$$

En prenant, comme précédemment, $N = [-\log_2|x-y|]+1$, on conclut la démonstration de la proposition. ∎

Énonçons maintenant les inclusions de Sobolev.

Proposition 6.3.5. *Pour tout réel s supérieur ou égal à $d/2$, l'espace H^s est continûment inclus dans l'espace $C^{s-d/2}$.*

Preuve : Démontrer cet énoncé est très simple. Comme le support de la transformée de Fourier de $\Delta_q u$ est inclus dans la couronne $2^q\mathcal{C}$ si $q \geq 0$ et dans $B(0, \frac{4}{3})$ sinon, il vient, d'après les inégalités de Bernstein,

$$\|\Delta_q u\|_{L^\infty} \leq C 2^{qd/2} \|\Delta_q u\|_{L^2}.$$

Il suffit de remarquer que la norme ℓ^2 d'une série est plus grande que sa norme ℓ^∞ pour achever la démonstration. ∎

Le cas des indices entiers sort quelque peu du cadre de ces notes. La fin de cette section 6.3 est présentée ici à titre culturel et n'est pas nécessaire à la compréhension de la suite du chapitre.

L'espace $C^1_\star$ n'est pas inclus dans l'espace des fonctions lipschitziennes et donc $C^0_\star$ n'est pas inclus dans L^∞. Cependant, cette non-inclusion est relativement douce au sens suivant.

Proposition 6.3.6. *Il existe une constante C telle que, étant donnés un réel ϵ de l'intervalle $]0,1[$ et une fonction f appartenant à l'espace de Hölder C^ϵ, on ait*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|f\|_0 \log\left(e + \frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\right).$$

Pour démontrer cette proposition, on écrit f comme somme des $\Delta_q f$. D'où la majoration suivante :

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \sum_{q\leq N-1} \|\Delta_q f\|_{L^\infty} + \sum_{q\geq N} \|\Delta_q f\|_{L^\infty}.$$

En utilisant la définition des normes hölderiennes, il vient, pour tout entier strictement positif N,

$$\|f\|_{L^\infty} \leq (N+1)\|f\|_0 + \frac{2^{-(N-1)\epsilon}}{2^\epsilon - 1}\|f\|_\epsilon.$$

En choisissant

$$N = 1 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\log_2 \frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\right],$$

il vient

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|f\|_0 \left(1 + \log \frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\right).$$

D'où la proposition.

6.4 Calcul paradifférentiel

Dans cette section, on va s'intéresser à la façon dont opère le produit dans les espaces de Sobolev et de Hölder. Pour cela, nous allons utiliser le découpage dyadique de l'espace des fréquences ainsi que les caractérisations des espaces de Sobolev et de Hölder exposées dans les sections précédentes.

La façon de les utiliser est la suivante. Étant données deux distributions tempérées u et v, on écrit

$$u = \sum_p \Delta_p u \quad \text{et} \quad v = \sum_q \Delta_q v.$$

De manière formelle, le produit, lorsqu'il existe, va s'écrire

$$uv = \sum_{p,q} \Delta_p u\, \Delta_q v.$$

On va maintenant introduire la décomposition de Bony, décomposition qui reconnaît trois parties dans le produit uv ; la première relative aux termes où les fréquences de u sont grandes devant celles de v, la deuxième relative aux termes où les fréquences de v sont grandes devant celles de u et enfin la troisième relative aux termes où les fréquences de u et de v sont de taille comparable. Cela conduit à la définition suivante.

Definition. *On appelle* **paraproduit** *de v par u et on note $T_u v$ l'opérateur bilinéaire suivant :*

$$T_u v = \sum_{p\leq q-2} \Delta_p u \Delta_q v = \sum_q S_{q-1} u \Delta_q v.$$

On appelle **reste** *du produit uv et on note $R(u,v)$ l'opérateur bilinéaire symétrique suivant :*

$$R(u,v) = \sum_{|p-q|\leq 1} \Delta_p u \, \Delta_q v.$$

Il est immédiat, par définition des opérateurs de paraproduit et de reste, que l'on a

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v). \tag{6.16}$$

De l'étude précise de la façon dont paraproduit et reste opèrent dans les espaces de Sobolev et de Hölder, va se dégager quelques principes généraux facilement énonçables :

- Le paraproduit est toujours défini pour deux distributions à support compact et la régularité de $T_u v$ est principalement déterminée par celle de v.
- Le reste par contre n'est pas toujours défini, mais lorsqu'il l'est, les régularités de u et de v s'ajoutent pour déterminer la sienne.

Passons maintenant aux énoncés précis.

Théorème 6.4.1. *Il existe une constante C ne dépendant que de la dimension et telle que les opérateurs T et R précédemment définis vérifient les propriétés suivantes:*

$$\begin{aligned}
\forall s\in\mathbb{R}, \quad & \|T_u v\|_{C^s} && \leq C^{|s|+1}\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{C^s},\\
\forall s\in\mathbb{R}, \quad & \|T_u v\|_{H^s} && \leq C^{|s|+1}\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s},\\
\forall (s,t)\in\mathbb{R}\times]-\infty,0[, \quad & \|T_u v\|_{H^{s+t}} && \leq \frac{C^{|s+t|+1}}{-t}\|u\|_{C^t}\|v\|_{H^s},\\
\forall (s,t)\in\mathbb{R}\times]-\infty,0[, \quad & \|T_u v\|_{C^{s+t}} && \leq \frac{C^{|s+t|+1}}{-t}\|u\|_{C^t}\|v\|_{C^s},\\
\forall (s,t)\in\mathbb{R}^2/s+t>0, \quad & \|R(u,v)\|_{C^{s+t}} && \leq \frac{C^{|s+t|+1}}{s+t}\|u\|_{C^s}\|v\|_{C^t},\\
\forall (s,t)\in\mathbb{R}^2/s+t>0, \quad & \|R(u,v)\|_{H^{s+t}} && \leq \frac{C^{|s+t|+1}}{s+t}\|u\|_{C^s}\|v\|_{H^t},\\
\forall (s,t)\in\mathbb{R}^2/s+t>0, \quad & \|R(u,v)\|_{H^{s+t-\frac{d}{2}}} && \leq \frac{C^{|s+t|+1}}{s+t}\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^t},\\
\forall (s,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times]-\infty,0[, \quad & \|R(u,v)\|_{H^{-\frac{d}{2}-\varepsilon}} && \leq \frac{C}{\varepsilon}\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^{-s}}.
\end{aligned}$$

Preuve : D'après la relation (6.5), la transformée de Fourier du terme général du paraproduit est supportée dans $2^q\mathcal{C}'$, où $\mathcal{C}'$ est une couronne fixe. En vertu des propositions 6.2.2 et 6.3.2, il suffit alors de majorer convenablement les normes L^2 ou L^∞ de $S_{q-1}u\Delta_q v$ pour démontrer les propriétés d'opérance du paraproduit. D'après les inégalités de Bernstein, on a

$$\|S_{q-1}u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^\infty},$$

donc, en prenant $p\in\{2,+\infty\}$, il vient

$$2^{qs}\|S_{q-1}u\Delta_q v\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^\infty}\, 2^{qs}\|\Delta_q v\|_{L^p},$$

d'où les deux premiers résultats de continuité.

Si $t<0$, on écrit $S_{q-1}u = \sum_{p\leq q-2}\Delta_p u$, et donc, par définition de la norme $\|\cdot\|_t$,

$$\|S_{q-1}u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_t \sum_{p\leq q-2} 2^{-pt} \leq \frac{C}{-t}2^{-qt}\|u\|_t, \tag{6.17}$$

ce qui donne clairement les deux inégalités suivantes.

Étudions maintenant l'opérateur de reste. On peut écrire

$$R(u,v) = \sum_q R_q \quad \text{avec} \quad R_q = \sum_{i=-1}^{1} \Delta_{q-i} u \Delta_q v.$$

Par définition de Δ_q, le support de la transformée de Fourier de R_q est inclus dans $2^q B(0,24)$. Grâce à la deuxième partie des propositions 6.2.2 et 6.3.1, il suffit donc de majorer les normes L^∞ ou L^2 de R_q. Par exemple, comme

$$\|R_q\|_{L^2} \le \|\Delta_q v\|_{L^2} \sum_{i=-1}^{1} \|\Delta_{q-i} u\|_{L^\infty},$$

il vient

$$\|R_q\|_{L^2} \le \|\Delta_q v\|_{L^2} \sum_{i=-1}^{1} 2^{-(q-i)t} \|u\|_t.$$

Donc, on a

$$\|R_q\|_{L^2} \le C 2^{-qt} \|u\|_t \|\Delta_q v\|_{L^2}.$$

La démonstration dans le cas des produits d'espaces de Hölder est strictement similaire et le résultat dans le cas des produits d'espaces de Sobolev se déduit immédiatement du cas des produits d'un espace de Sobolev et d'un espace de Hölder d'après la proposition 2.3.

Les deux derniers points sont un peu plus délicats. Les méthodes précédentes ne sauraient fonctionner car elles sont limitées au cas où l'indice de l'espace est strictement positif. Cette difficulté impose de réutiliser le découpage dyadique de l'espace des fréquences. Il s'agit de majorer convenablement $\|\Delta_p R_q\|_{L^2}$. Pour cela, on revient à la définition de Δ_p par convolution.

$$\begin{aligned}
\|\Delta_p R_q\|_{L^2} &\le 2^{pd} \sum_{i=-1}^{1} \|h(2^p \cdot) \star (\Delta_{q-i} u \Delta_q v)\|_{L^2} \\
&\le 2^{pd} \|h(2^p \cdot)\|_{L^2} \sum_{i=-1}^{1} \|\Delta_{q-i} u \Delta_q v\|_{L^1} \\
&\le C 2^{pd/2} 2^{-q(s+t)} \sum_{i=-1}^{1} 2^{(q-i)s} \|\Delta_{q-i} u\|_{L^2}\, 2^{qt} \|\Delta_q v\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Comme le support de φ est inclus dans la couronne $\mathcal{C}$, il existe un entier N tel que

$$q < p - N \Longrightarrow \forall i \in \{-1, 0, 1\},\ \Delta_p(\Delta_{q-i} u \Delta_q v) = 0.$$

Donc, en posant $r_p = 2^{p(s+t-d/2)} \|\Delta_p R(u,v)\|_{L^2}$, il vient

$$r_p \le (r^1 \star r^2)_p$$

avec

$$r_q^1 = 2^{-q(s+t)} \quad \text{si} \quad q \ge -N \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{sinon},$$

$$r_q^2 = \sum_{i=-1}^{1} 2^{(q-i)s} \|\Delta_{q-i} u\|_{L^2}\, 2^{qt} \|\Delta_q v\|_{L^2}.$$

L'négalité de Hölder assure alors que

$$\|r\|_{\ell^2} \leq \|r^1\|_{\ell^2}\|r^2\|_{\ell^2} \leq C|u|_s|v|_t.$$

et la proposition 6.2.1 donne donc

$$|R(u,v)|_{s+t-d/2} \leq \frac{C^{s+t+1}}{s+t-d/2}|u|_s|v|_t.$$

La modification de la démonstration ci-dessus dans le cas où $t = -s$ est un exercice laissé au lecteur. ■

Nous allons maintenant déduire du théorème précédent les classiques *estimations douces* (ou *tame estimates* en anglais) relatives aux espaces de Sobolev et de Hölder.

Corollaire 6.4.1. *Il existe une constante C telle que, pour tout s strictement positif, on ait :*

$$\begin{array}{rcl} \|uv\|_s & \leq & C^{s+1}(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_s + \|u\|_s\|v\|_{L^\infty}), \\ |uv|_s & \leq & C^{s+1}(\|u\|_{L^\infty}|v|_s + |u|_s\|v\|_{L^\infty}). \end{array}$$

Preuve : La démonstration est extrêmement simple. On utilise la décomposition (6.16) en paraproduit et reste

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v).$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 6.4.1 ci-dessus. Pour traiter le terme de reste, on utilise de plus que l'espace L^∞ est continûment inclus dans $C^0_\star$. ■

6.5 Exercices

Exercice 6.1. *Soit $\mathcal{C}$ une couronne de $\mathbb{R}^d$ et $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dans tout cet exercice, u désignera une fonction dont la transformée de Fourier est supportée dans la couronne $\mathcal{C}$.*

1) Démontrer qu'il existe une famille de fonctions $(u_j)_{1\leq j\leq d}$ dont la transformée de Fourier est à support dans $\mathcal{C}$ et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^{2p}\, dx = \sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u_j\, u^{2p-1}\, dx \quad \text{et} \quad \|u_j\|_{L^{2p}} \leq C\|u\|_{L^{2p}}.$$

2) En déduire que $\|u^p\|_{L^2} \leq C\|\nabla(u^p)\|_{L^2}$.

Exercice 6.2. *Soit s un réel strictement positif. On considère une suite $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ de fonctions de L^2 dont toutes les dérivées partielles sont dans L^2 et telle que l'on ait*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \|\partial^\alpha u_q\|_{L^2} \leq c_{q,\alpha} 2^{-q(s-|\alpha|)} \quad \text{avec} \quad \sum_q c_{q,\alpha}^2 < \infty.$$

Démontrer que la série $\sum u_q$ converge dans L^2, que sa somme u appartient à H^s et que

$$\|u\|_{H^s}^2 \leq C\Big(\sum_q c_{q,0}^2 + \sum_{q,\,|\alpha|=[s]+1} c_{q,\alpha}^2\Big).$$

Indication: On écrira

$$\Delta_q u = \Delta_q \sum_{p<q} u_p + \Delta_q \sum_{p\geq q} u_p.$$

Exercice 6.3. *Soit f une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ nulle en 0 et s un réel strictement positif.*

1) Démontrer que, si u est dans H^s, alors

$$\lim_{q\to\infty} \|f(S_{q+1}u) - f(u)\|_{L^2} = 0.$$

En déduire que l'on a, dans L^2,

$$f(u) = \sum_q f(S_{q+1}u) - f(S_q u).$$

2) Démontrer que

$$\begin{aligned} f(S_{q+1}u) - f(S_q u) &= m_q \Delta_q u \quad \text{avec} \\ m_q &\stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^1 f'(S_q u + t\Delta_q u)\, dt. \end{aligned}$$

3) On suppose dorénavant que u appartient à $H^s \cap L^\infty$. Démontrer que, pour tout α, il existe une constante C (ne dépendant que de α, de f et de $\|u\|_{L^\infty}$) telle que

$$\|\partial^\alpha m_q\|_{L^\infty} \leq C 2^{q|\alpha|}.$$

4) En déduire que $f(u)$ appartient à H^s et qu'il existe une constante C (ne dépendant que de s, de f et de $\|u\|_{L^\infty}$) telle que

$$\|f(u)\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^s}.$$

Exercice 6.4. *Soit r un réel strictement négatif. Démontrer qu'une distribution u appartient à C^r si et seulement si il existe une constante C telle que*

$$\|S_q u\|_{L^\infty} \leq C 2^{-qr}.$$

Exercice 6.5. *Soit s un réel strictement négatif. Démontrer qu'une distribution u appartient à H^s si et seulement si il existe une constante C telle que*

$$\|S_q u\|_{L^2} \leq C c_q 2^{-qs} \quad \text{avec} \quad \sum_q c_q^2 = 1.$$

Comparer C avec $|u|_s$.

Exercice 6.6. *Soit σ une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ homogène de degré m en dehors de la boule $B(0, R_0)$ Démontrer que, pour tout réel r, l'opérateur $\sigma(D)$ défini par*

$$\sigma(D)u \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}^{-1}(\sigma \widehat{u})$$

est continu de C^r dans C^{r-m}.

Exercice 6.7. *Soit r un réel de l'intervalle $]-1, 0[$.*

Démontrer que l'espace C^r de la définition 6.3.2 est l'espace des distributions u telles qu'il existe une suite $(u^j)_{0\leq j\leq d}$ de fonctions C^{1+r} telles que

$$u = u^0 + \sum_{j=1}^{d} \partial_j u^j.$$

Exercice 6.8. Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $s + t > 0$ et $s \leq t$.

(i) Montrer que si de plus $s < \frac{d}{2}$ et $t < \frac{d}{2}$ alors l'application $(u, v) \mapsto uv$ est continue de $H^s(\mathbb{R}^d) \times H^t(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{s+t-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Montrer que si de plus $t > \frac{d}{2}$ alors l'application $(u, v) \mapsto uv$ est continue de $H^s(\mathbb{R}^d) \times H^t(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Bibliography

[1] G. Allaire et P.-L. Lions : Analyse numérique et optimisation, *cours de l'École Polytechnique.*

[2] J.-M. Bony : Intégration et analyse hilbertienne, *cours de l'École Polytechnique.*

[3] J.-M. Bony et C. Viterbo : Distributions, analyse de Fourier et systèmes dynamiques, *cours de l'École Polytechnique.*

[4] H. Brézis : Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, *Masson.*

[5] J.-Y. Chemin : Fluides parfaits incompressibles, *Astérisque*, **230** (1995).

[6] R. Danchin : Notes de cours d'analyse fonctionnelle, téléchargeable sur `http://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/`.

[7] M. Schechter : Principles of Functional Analysis, second edition, Graduate Studies in Mathematics, *American Mathematical Society.*

Index