

Chapitre 4

Analyse de Fourier

4.1 Fonctions mesurables périodiques

Définition 4.1.1 Soit f une fonction mesurable à valeurs complexes définie pp. sur \mathbf{R} . On dira que f est périodique de période 1 si

$$f(x+1) = f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}.$$

Auquel cas

$$f(x+k) = f(x) \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z} \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}.$$

A priori, l'ensemble de mesure nulle \mathcal{N}_k sur lequel cette relation n'a pas lieu dépend de $k \in \mathbf{Z}$; mais en choisissant

$$\mathcal{N} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{N}_k$$

on voit que l'égalité ci-dessus a lieu pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{N}$ et tout $k \in \mathbf{Z}$; de plus \mathcal{N} est de mesure nulle comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle.

Alors f passe au quotient et définit une application $\tilde{f} : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$; inversement, l'application \tilde{f} détermine f de façon unique. Dans la suite, on notera $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Soit donc f une fonction mesurable à valeurs complexes définie pp. sur \mathbf{R} ; soient $p \in [1, \infty[$ et $a \in \mathbf{R}$ quelconque; alors

$$\int_a^{a+1} |f(x)|^p dx = \int_0^1 |f(x)|^p dx.$$

Définition 4.1.2 Pour tout $p \in [1, \infty[$, on note $L^p(\mathbf{T})$ l'espace des fonctions f à valeurs complexes définies et mesurables pp. sur \mathbf{R} et de période 1 tq. $f|_{[a, a+1[} \in L^p([a, a+1[)$, où a est un réel quelconque. On note

$$\|f\|_{L^p(\mathbf{T})} = \left(\int_a^{a+1} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Enfin, si f est une fonction mesurable à valeurs complexes définie pp. sur \mathbf{R} et périodique de période 1, on a

$$\sup_{x \in [a, a+1[} |f(x)| = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)| \text{ pour tout } a \in \mathbf{R}.$$

Définition 4.1.3 On note $L^\infty(\mathbf{T})$ le sous-espace fermé de $L^\infty(\mathbf{R})$ formé des fonctions périodiques de période 1. De plus, pour $f \in L^\infty(\mathbf{T})$, on a

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbf{T})} = \sup_{x \in [a, a+1[} |f(x)| = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|.$$

4.2 Séries de Fourier

Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, posons

$$e_k(x) = e^{i2\pi kx}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

On remarque que

$$\int_0^1 \overline{e_k(x)} e_l(x) dx = \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbf{Z}.$$

Ainsi, la suite $(e_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est-elle orthonormée dans $L^2(\mathbf{T})$.

Etant donnée une fonction $f \in L^1(\mathbf{T})$, on note

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 \overline{e_k(x)} f(x) dx, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Lemme 4.2.1 (Riemann-Lebesgue) Pour tout $f \in L^1(\mathbf{T})$, la suite $\hat{f}(k)$ vérifie

$$\hat{f}(k) \rightarrow 0 \text{ pour } |k| \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Comme $e_k(-x - \frac{1}{2k}) = -e_k(-x)$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_0^1 e_k(-x) f(x) dx = - \int_0^1 e_k(-x - \frac{1}{2k}) f(x) dx \\ &= - \int_{\frac{1}{2k}}^{1+\frac{1}{2k}} e_k(-y) f(y - \frac{1}{2k}) dx = - \int_0^1 e_k(-y) f(y - \frac{1}{2k}) dx = -\widehat{\tau_{1/2k} f}(k). \end{aligned}$$

Donc

$$\hat{f}(k) = -\frac{1}{2} \int_0^1 e_k(-y) (\tau_{1/2k} f(y) - f(y)) dy$$

de sorte que

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{2} \|\tau_{1/2k} f - f\|_{L^1(\mathbf{T})} \rightarrow 0$$

lorsque $|k| \rightarrow \infty$, d'après le Lemme 2.4.6. ■

La série de Fourier de f est

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{f}(k) e_x(x);$$

les questions suivantes se posent alors naturellement :

- pour quelles classes de fonctions f la série de Fourier de f est-elle convergente, et dans l'affirmative, en quel sens converge-t-elle ?
- lorsque la série de Fourier de f converge, converge-t-elle vers f ? et dans l'affirmative, en quel sens converge-t-elle ?
- quelles sont les propriétés de la fonction f qu'on peut lire aisément sur la suite des coefficients de Fourier ?

Pour $N \in \mathbf{N}$, notons $S_N[f]$ la somme partielle de la série de Fourier :

$$S_N[f](x) = \sum_{|k| \leq N} \hat{f}(k) e_k(x).$$

Lemme 4.2.2 *Pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $f \in L^2(\mathbf{T})$, la somme partielle de la série de Fourier $S_N[f]$ est la projection orthogonale de f sur le sev. de dimension finie $\text{Vect}\{e_k \mid |k| \leq N\}$.*

Démonstration. Comme la famille $(e_k)_{|k| \leq N}$ est orthonormée, on a

$$f - S_N[f] \perp e_k \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z}.$$

Donc $S_N[f]$ est la projection orthogonale de f sur $\text{Vect}\{e_k \mid |k| \leq N\}$. ■

En particulier, si on savait que la famille $(e_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est totale dans $L^2(\mathbf{T})$, on en déduirait immédiatement que, pour tout $f \in L^2(\mathbf{T})$

$$S_N[f] \rightarrow f \text{ dans } L^2(\mathbf{T}) \text{ pour } N \rightarrow \infty.$$

Avant que d'étudier si la suite $(e_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est totale dans $L^2(\mathbf{T})$, nous allons donner une autre expression de $S_N[f]$, plus commode d'un certain point de vue. En effet

$$S_N[f](x) = \sum_{|k| \leq N} \int_0^1 f(y) e_k(x) e_k(-y) dy = \int_0^1 f(y) \sum_{|k| \leq N} e_k(x-y) dy,$$

de sorte que

$$S_N[f](x) = \int_0^1 D_N(x-y) f(y) dy, \quad N \in \mathbf{Z}$$

où la fonction D_N est le noyau de Dirichlet, défini comme suit :

NOYAU DE DIRICHLET

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \sum_{|k| \leq N} e_k(x) = e^{-i2\pi Nx} \frac{e^{i2\pi(2N+1)x} - 1}{e^{i2\pi x} - 1} \\ &= e^{-i2\pi Nx} \frac{e^{i2\pi(N+\frac{1}{2})x} (e^{i2\pi(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i2\pi(N+\frac{1}{2})x})}{e^{i\pi x} (e^{i\pi x} - e^{-i\pi x})} \\ &= \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}. \end{aligned}$$

Il existe des fonctions f continues sur \mathbf{T} telles que $S_N[f]$ ne converge pas uniformément vers f pour $N \rightarrow \infty$ — en fait, on peut montrer que pour tout $x_0 \in \mathbf{T}$, l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathbf{T})$ telles que

$$\sup_{N \geq 0} |S_N(f)(x_0)| = \infty$$

est dense dans $C(\mathbf{T})$ pour la topologie de la convergence uniforme. Ce résultat s'obtient par un argument abstrait de topologie (par le théorème de Banach-Steinhaus, lui-même basé sur un argument de catégorie de Baire). Un exemple explicite d'une fonction f continue sur \mathbf{T} telle que $S_N[f]$ ne converge pas uniformément vers f lorsque $N \rightarrow \infty$ est dû à Du Bois-Reymond (1873).

D'autre part, si $f \in L^2(\mathbf{T})$, on sait aujourd'hui que $S_N[f](x) \rightarrow f(x)$ pp. en $x \in \mathbf{T}$; ceci est un résultat difficile obtenu par Carleson (1965).

Ces deux remarques suggèrent que l'approximation de f par $S_N[f]$ n'est pas la plus naturelle pour établir que la suite $(e_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est totale dans $L^2(\mathbf{T})$.

4.2.1 La théorie de Fejer

Au lieu de s'intéresser à la convergence de $S_N[f]$ vers f , on va étudier un problème plus simple, à savoir la convergence au sens de Cesarò de $S_N[f]$ vers f .

On pose donc

$$\Sigma_N[f] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n[f].$$

A partir de l'expression de $S_N[f]$ basée sur le noyau de Dirichlet, on va mettre $\Sigma_N[f]$ sous la forme

$$\Sigma_N[f](x) = \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy, \quad N \in \mathbf{Z}$$

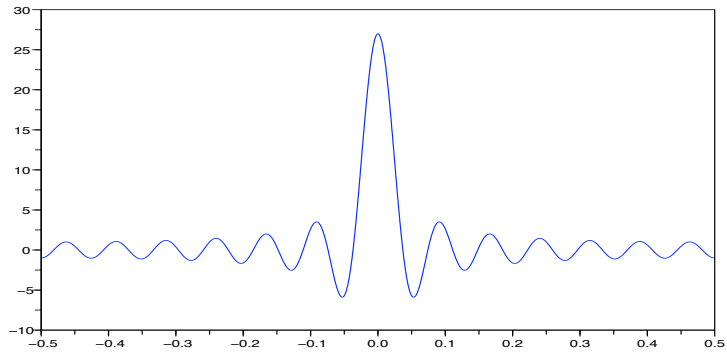
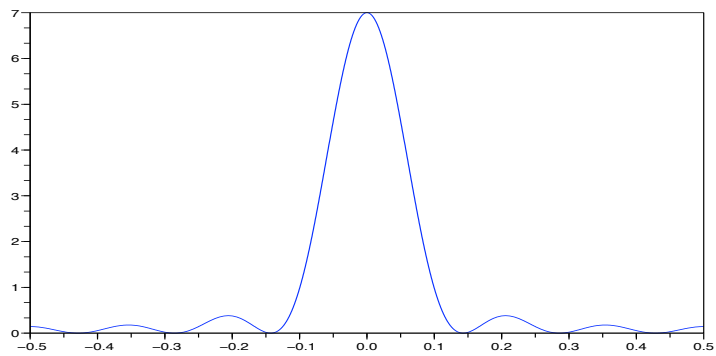
où la fonction F_N est le noyau de Dirichlet, défini comme suit :

NOYAU DE FEJER

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{\sin(\pi x)} \Im \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\pi(2k+1)x} \right) \\ &= \frac{1}{N \sin(\pi x)} \Im \left(e^{i\pi x} \frac{e^{i2\pi Nx} - 1}{e^{i2\pi x} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{N \sin(\pi x)} \Im \left(e^{i\pi Nx} \frac{e^{i\pi Nx} - e^{-i\pi Nx}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \right) \\ &= \frac{1}{N \sin(\pi x)} \Im \left(e^{i\pi Nx} \frac{\sin(\pi Nx)}{\sin(\pi x)} \right) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(\pi Nx)}{\sin(\pi x)} \right)^2, \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

expression qui se prolonge par continuité en 0 en posant

$$F_N(0) = N.$$

FIG. 4.1 – Le noyau de Dirichlet pour $N = 13$ FIG. 4.2 – Le noyau de Fejer pour $N = 7$

On remarque que, par opposition avec le noyau de Dirichlet, le noyau de Fejer est positif ou nul. On verra bientôt l'importance considérable de ce fait.

Regroupons ensemble, dans l'expression du noyau de Fejer, tous les termes de la forme $e_k(x)$: on trouve que

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{|k| \leq n} e_k(x) = \frac{1}{N} \sum_{|k| \leq N-1} \left(\sum_{|k| \leq n \leq N-1} 1 \right) e_k(x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{|k| \leq N-1} (N - |k|) e_k(x) = \sum_{|k| \leq N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N} \right) e_k(x) \end{aligned}$$

Théorème 4.2.3 (Fejer) Soit $1 \leq p < \infty$.

1) Pour tout $f \in L^p(\mathbf{T})$, $\Sigma_N[f] \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbf{T})$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

2) Soit $f \in C(\mathbf{T})$; alors $\Sigma_N[f] \rightarrow f$ uniformément sur \mathbf{T} lorsque $N \rightarrow \infty$.

Démonstration. Le calcul de la série de Fourier du noyau de Fejer ci-dessus montre que

$$\int_0^1 F_N(x) dx \hat{F}_N(0) = 1.$$

Commençons par démontrer le point 1). Il vient

$$\begin{aligned} f(x) - \Sigma_N[f](x) &= f(x) - \int_0^1 f(x-y) F_N(y) dy = \int_{-1/2}^{1/2} (f(x) - f(x-y)) F_N(y) dy \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} (f - \tau_y f)(x) F_N(y) dy. \end{aligned}$$

Par conséquent, comme $F_N \geq 0$

$$\|f - \Sigma_N[f]\|_p \leq \int_{-1/2}^{1/2} \|f - \tau_y f\|_p F_N(y) dy.$$

Soit alors $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$; on a

$$\begin{aligned} \|f - \Sigma_N[f]\|_p &\leq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \|f - \tau_y f\|_p F_N(y) dy \\ &\quad + \int_{\epsilon}^{1/2} \|f - \tau_y f\|_p F_N(y) dy + \int_{-1/2}^{-\epsilon} \|f - \tau_y f\|_p F_N(y) dy. \end{aligned}$$

Lorsque $y \in]-\frac{1}{2}, -\epsilon[\cup]\epsilon, \frac{1}{2}[$, on a

$$F_N(y) \geq \frac{1}{N\pi^2\epsilon^2}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|f - \Sigma_N[f]\|_p &\leq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \|f - \tau_y f\|_p F_N(y) dy + \frac{2}{N\pi^2\epsilon^2} \cdot 2\|f\|_p \\ &\leq \sup_{|y| \leq \epsilon} \|f - \tau_y f\|_p \int_{-\epsilon}^{\epsilon} F_N(y) dy + \frac{4\|f\|_p}{N\pi^2\epsilon^2}. \end{aligned}$$

En passant à la limite supérieure pour $N \rightarrow \infty$ à ϵ fixé, on en déduit que

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \|f - \Sigma_N[f]\|_p \leq \sup_{|y| \leq \epsilon} \|f - \tau_y f\|_p.$$

Enfin, en passant à la limite pour $\epsilon \rightarrow 0$ dans cette dernière inégalité, on trouve que

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \|f - \Sigma_N[f]\|_p = 0$$

d'après le Lemme 2.4.6, cqfd.

Le point 2) se vérifie de même en utilisant la norme du sup au lieu de la norme L^p . ■

La démonstration ci-dessus montre à quel point la positivité de F_N est cruciale pour ce résultat. On laisse au lecteur le soin de se convaincre qu'il n'est pas possible d'adapter cette démonstration au cas des sommes partielles de la série de Fourier de f — c'est à dire d'y remplacer $\Sigma_N[f]$ par $S_N[f]$. En effet, le noyau de Dirichlet n'est pas positif ou nul sur \mathbf{T} .

4.2.2 La théorie L^2

Théorème 4.2.4 *La suite $(e_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{T})$.*

Démonstration. On sait déjà que cette suite est orthonormée dans $L^2(\mathbf{T})$. D'après le théorème de Fejer, elle est totale dans $L^2(\mathbf{T})$, cqfd. ■

La théorie L^2 des séries de Fourier est alors un cas particulier de la théorie des espaces de Hilbert séparables de dimension infinie. En voici les résultats principaux, rassemblés dans l'énoncé ci-dessous.

Théorème 4.2.5 *Soit $f \in L^2(\mathbf{T})$. Alors*

1) *la suite $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbf{Z}}$ vérifie l'égalité de Parseval*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2;$$

2) *pour $f, g \in L^2(\mathbf{T})$, on a*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx;$$

3) *on a*

$$S_N[f] \rightarrow f \text{ dans } L^2(\mathbf{T}) \text{ pour } N \rightarrow \infty$$

4) *de même*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{f}(k) e_k(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}.$$

Démonstration. Les points 1) et 2) traduisent l'égalité de Parseval pour la base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{T})$.

Le point 3) découle de l'égalité de Parseval appliquée á

$$g_N = f - S_N[f] = (I - P_{V_N})f$$

où P_{V_N} est la projection orthogonale sur $\text{Vect}\{e_k \mid |k| \leq N\}$ — voir le Lemme 4.2.2. Donc

$$\hat{g}_N(k) = 0 \text{ si } |k| \leq N, \text{ et } \hat{g}_N(k) = \hat{f}(k) \text{ si } |k| > N.$$

Ainsi

$$\|f - S_N[f]\|_2^2 = \sum_{|k| > N} |\hat{f}(k)|^2 \rightarrow 0 \text{ pour } N \rightarrow \infty$$

comme reste d'une série convergente d'après le point 1).

Le point 4) se démontre de même : il s'agit de faire voir que

$$f - \sum_{-N_1 \leq k \leq N_2} \hat{f}(k)e_k \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\mathbf{T}) \text{ pour } N_1, N_2 \rightarrow \infty.$$

Or

$$\left\| f - \sum_{-N_1 \leq k \leq N_2} \hat{f}(k)e_k \right\|_2^2 \leq \sum_{|k| > \min(N_1, N_2)} |\hat{f}(k)|^2 \rightarrow 0 \text{ pour } \min(N_1, N_2) \rightarrow \infty$$

comme ci-dessus, cqfd. ■

Le résultat ci-dessous caractérisant les parties compactes de $L^2(\mathbf{T})$ est une application directe de l'égalité de Parseval.

Théorème 4.2.6 *Soit \mathcal{F} une partie bornée de $L^2(\mathbf{T})$. Alors \mathcal{F} est relativement compacte ssi*

$$\sum_{|k| > N} |\hat{f}(k)|^2 \rightarrow 0 \text{ pour } N \rightarrow \infty \text{ uniformément en } f \in \mathcal{F}.$$

Démonstration. Supposons que \mathcal{F} est relativement compact. Soit donc $\epsilon > 0$; comme \mathcal{F} est précompact, il existe $f_1, \dots, f_M \in \mathcal{F}$ tq. pour tout $f \in \mathcal{F}$, il existe $m \in \{1, \dots, M\}$ vérifiant

$$\|f - f_m\|_{L^2}^2 \leq \epsilon.$$

D'après l'égalité de Parseval, les M séries

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{f}_m(k)|^2$$

sont convergentes, puisque $f_m \in L^2(\mathbf{T})$. Les restes de ces séries convergent donc vers 0, et comme ces séries sont en nombre fini, il existe donc $N \in \mathbf{N}$ tq.

$$\sum_{|k| > N} |\hat{f}_m(k)|^2 < \epsilon.$$

Or, toujours d'après l'égalité de Parseval, on a

$$\sum_{|k|>N} |\hat{f}(k) - \hat{f}_m(k)|^2 \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{f} - \hat{f}_m(k)|^2 = \|f - f_m\|_{L^2}^2 \leq \epsilon.$$

Donc

$$\sum_{|k|>N} |\hat{f}(k)|^2 \leq 2 \sum_{|k|>N} |\hat{f}(k) - \hat{f}_m(k)|^2 + 2 \sum_{|k|>N} |\hat{f}_m(k)|^2 \leq 4\epsilon.$$

Comme ϵ peut-être choisi arbitrairement petit, et que N dépend seulement de ϵ à travers M , on en déduit que la condition de l'énoncé est nécessaire.

Cette condition est également suffisante : en effet, si elle est vérifiée, l'ensemble

$$\hat{\mathcal{F}} = \{(\hat{f}(k))_{k \in \mathbf{Z}} \mid f \in \mathcal{F}\}$$

est une partie de $\ell^2(\mathbf{Z})$ tq. il existe $q : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}_+$ vérifiant

$$q(k) \rightarrow +\infty \text{ pour } |k| \rightarrow \infty \text{ et } \sum_{k \in \mathbf{Z}} q(k)^2 |f(k)|^2 \leq 1 \text{ pour tout } f \in \mathcal{F}.$$

Voici comment on peut construire une telle suite q . D'après la condition de l'énoncé, il existe $N_1 > 0$ tq.

$$\sum_{|k|>N_1} |\hat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2}, \text{ pour tout } f \in \mathcal{F};$$

puis il existe $N_2 > N_1$ tq.

$$\sum_{|k|>N_2} |\hat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{4}, \text{ pour tout } f \in \mathcal{F}.$$

Par récurrence, on construit ainsi une suite $1 < N_1 < N_2 < \dots < N_m$ tq.

$$\sum_{|k|>N_m} |\hat{f}(k)|^2 \leq 2^{-m}, \text{ pour tout } f \in \mathcal{F}.$$

En sommant toutes ces inégalités, on trouve que

$$\sum_{|k|>N_1} \left(\sum_{m \geq 1} m \mathbf{1}_{N_{m-1} < |k| \leq N_m} \right) |\hat{f}(k)|^2 \leq 1,$$

ce qui suggère de prendre

$$q(|k|) = \sum_{m \geq 1} m \mathbf{1}_{N_{m-1} < |k| \leq N_m}.$$

Avec ce choix de q , il est clair que $\hat{\mathcal{F}}$ est inclus dans le cube de Hilbert $\mathcal{C}(q) \subset \ell^2(\mathbf{Z})$, lequel est compact. Ceci montre que $\hat{\mathcal{F}}$ est relativement compact dans $\ell^2(\mathbf{Z})$.

Or, d'après le théorème de Riesz-Fischer appliqué à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{T})$ et à sa base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbf{Z}}$, l'application

$$L^2(\mathbf{T}) \ni f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme isométrique. Par conséquent \mathcal{F} est relativement compact dans $L^2(\mathbf{T})$ puisque son image $\hat{\mathcal{F}}$ par l'isomorphisme ci-dessus est relativement compact dans $\ell^2(\mathbf{Z})$. ■

4.2.3 Convergence ponctuelle des sommes partielles

Ni la théorie de Fejer, ni la théorie L^2 ne répondent toutefois à la question pourtant naturelle de la convergence ponctuelle des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction donnée. L'observation suivante est le point crucial pour la réponse à cette question.

Lemme 4.2.7 (U. Dini) *Soit f continue par morceaux sur \mathbf{T} et $x_0 \in \mathbf{T}$ fixé. Supposons que*

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{|f(x_0 + y) + f(x_0 - y) - 2f(x_0)|}{|y|} dy < \infty.$$

Alors

$$S_N[f](x_0) \rightarrow f(x_0) \text{ pour } N \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Ecrivons que

$$\begin{aligned} f(x_0) - S_N[f](x_0) &= f(x_0) - \int_{-1/2}^{1/2} f(x_0 - y) D_N(y) dy \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} (f(x_0) - f(x_0 - y)) D_N(y) dy \end{aligned}$$

où D_N est le noyau de Dirichlet, dont on rappelle que

$$\int_{-1/2}^{1/2} D_N(y) dy = \hat{D}_N(0) = 1.$$

Comme D_N est une fonction paire, on peut symétriser la dernière intégrale dans le membre de droite ci-dessus, pour trouver que

$$\begin{aligned} f(x_0) - S_N[f](x_0) &= f(x_0) - \int_{-1/2}^{1/2} f(x_0 - y) D_N(y) dy \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} (f(x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0 + y) + f(x_0 - y))) D_N(y) dy. \end{aligned}$$

Pour $|y| \leq \frac{1}{2}$, on a $|\sin(\pi y)| \geq 2|y|$, de sorte que la fonction

$$\phi_{x_0}(y) = \frac{f(x_0 + y) + f(x_0 - y) - 2f(x_0)}{\sin(\pi y)}, \quad \text{pour } y \neq 0$$

appartient à $L^1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ puisque

$$|\phi_{x_0}(y)| \leq \frac{|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)|}{2|y|}.$$

En appliquant le lemme de Riemann-Lebesgue à la fonction périodique impaire de période un dont la restriction à $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ vaut ϕ_{x_0} , on trouve que

$$f(x_0) - S_N[f](x_0) = - \int_{-1/2}^{1/2} \phi_{x_0}(y) \sin(\pi(2N+1)y) dy \rightarrow 0 \text{ pour } N \rightarrow \infty,$$

cqfd. ■

Corollaire 4.2.8 *Soit f höldérienne d'exposant $\alpha > 0$ sur \mathbf{T} . Alors*

$$S_N[f](x) \rightarrow f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbf{T} \text{ lorsque } N \rightarrow \infty.$$

Démonstration. En effet, pour une telle fonction f , on a

$$\frac{|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x_0)|}{|y|} = O(|y|^{\alpha-1})$$

pour tout $x \in \mathbf{T}$. ■

4.2.4 Propriétés des séries de Fourier

Notons

$$D_x = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx}$$

Proposition 4.2.9 *Pour f et $g \in L^1(\mathbf{T})$, on note $f \star g$ l'élément de $L^1(\mathbf{T})$ défini par*

$$f \star g(x) = \int_0^1 f(x-y)g(y)dy.$$

1) *pour tout $f \in C^1(\mathbf{T})$, et plus généralement pour $f \in C(\mathbf{T})$ de classe C^1 par morceaux, on a*

$$\widehat{D_x f}(k) = k \hat{f}(k), \quad k \in \mathbf{Z};$$

2) *pour tout $f \in C^n(\mathbf{T})$, plus généralement pour $f \in C^{n-1}(\mathbf{T})$ de classe C^n par morceaux, on a*

$$\widehat{D_x^n f}(k) = k^n \hat{f}(k), \quad k \in \mathbf{Z};$$

3) *pour tout $f \in L^1(\mathbf{T})$ et tout $z \in \mathbf{R}$, on a*

$$\widehat{\tau_z f}(k) = e_k(-z) \hat{f}(k), \quad k \in \mathbf{Z};$$

4) *pour tout $f, g \in L^1(\mathbf{T})$, on a*

$$\widehat{f \star g}(k) = \hat{f}(k) \hat{g}(k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Démonstration. Observons que

$$D_x e_k = k e_k, \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z}.$$

Donc, pour $f \in C^1(\mathbf{T})$, on trouve, par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^1 e_k(-x) f(x) dx &= - \int_0^1 \frac{1}{k} D_x (e_k(-x)) f(x) dx \\ &= - \frac{1}{k} [e_k(-x) f(x)]_0^1 + \frac{1}{k} \int_0^1 e_k(-x) D_x f(x) dx \end{aligned}$$

ce qui démontre le point 1). Le point 2) découle du point 1) par récurrence.

Pour le point 3),

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_z f}(k) &= \int_0^1 f(x-z) e_k(-x) dx \\ &= \int_0^1 f(x-z) e_k(-(x-z)) e_k(-z) dx \\ &= e_k(-z) \int_0^1 f(y) e_k(-y) dy = e_k(-z) \hat{f}(k) \end{aligned}$$

Soient enfin f et $g \in C(\mathbf{T})$. Alors, en appliquant le théorème de Fubini, on voit que

$$\begin{aligned} \widehat{f \star g}(k) &= \int_0^1 e_k(-x) \left(\int_0^1 f(x-y) g(y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 e_k(-(x-y)) f(x-y) e_k(-y) g(y) dy dx \\ &= \int_0^1 e_k(-y) g(y) \left(\int_0^1 e_k(-(x-y)) f(x-y) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 e_k(-y) g(y) \left(\int_{x-1}^x e_k(-z) f(z) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 e_k(-y) g(y) \left(\int_0^1 e_k(-z) f(z) dz \right) dy = \hat{f}(k) \hat{g}(k). \end{aligned}$$

Ceci démontre le point 4) pour des fonctions f et g continues et périodiques de période 1. Le cas général de fonctions L^1 s'en déduit par densité de $C(\mathbf{T})$ dans $L^1(\mathbf{T})$. ■

Une conséquence des points 1) et 2) est que l'on peut lire la régularité d'une fonction $f \in C(\mathbf{T})$ sur la rapidité avec laquelle les coefficients de Fourier de f tendent vers 0 à l'infini.

Corollaire 4.2.10 *Soit $f \in C(\mathbf{T})$ de classe C^1 par morceaux. Alors*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{f}(k) e_k(x) = f(x)$$

et la série de Fourier de f converge normalement sur \mathbf{T} .

Démonstration. D'après le point 1) de la proposition ci-dessus, on a

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{k} \widehat{D_x f}(k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Comme $D_x f$ est continue par morceaux sur \mathbf{T} , c'est un élément de $L^2(\mathbf{T})$, de sorte que

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{D_x f}(k)|^2 < \infty.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{|k|} |\widehat{D_x f}(k)|^2 \leq \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{D_x f}(k)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{|k|^2} \right)^{1/2}$$

de sorte que

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(k)| < \infty$$

d'où le résultat. ■

4.3 Intégrale de Fourier

4.3.1 La transformée de Fourier sur L^1

Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$; on définit la transformée de Fourier de f par la formule

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx.$$

Lemme 4.3.1 (Riemann-Lebesgue) *Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$; la transformée de Fourier \hat{f} de f est une fonction continue tendant vers 0 à l'infini :*

$$\hat{f}(\xi) \rightarrow 0 \text{ lorsque } |\xi| \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Que \hat{f} tende vers 0 à l'infini se démontre comme dans le cas périodique, c'est à dire pour les coefficients des séries de Fourier.

Montrons que \hat{f} est continue : si $\xi_n \rightarrow \xi$ pour $n \rightarrow \infty$, alors $e^{-i2\pi\xi_n x} f(x) \rightarrow e^{-i2\pi\xi x} f(x)$ pp. pour $n \rightarrow \infty$; d'autre part $|e^{-i2\pi\xi_n x} f(x)| = |f(x)|$ et donc

$$\hat{f}(\xi_n) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i2\pi\xi_n x} f(x) dx \rightarrow \int_{\mathbf{R}} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx = \hat{f}(\xi)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, cqfd. ■

Voici quelques propriétés de base de l'intégrale de Fourier.

Proposition 4.3.2 *Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$. Alors*

1) $\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{-i2\pi\xi y} \hat{f}(\xi)$ pour tous $y, \xi \in \mathbf{R}$;

2) pour tout $k \in \mathbf{R}$, notons e_k la fonction définie par $e_k(x) := e^{-i2\pi kx}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$; alors $\widehat{e_k f} = \tau_k \hat{f}$;

3) pour tout $g \in L^1(\mathbf{R})$, on a

$$\widehat{f \star g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbf{R};$$

4) notons \check{f} la fonction définie par $\check{f}(x) = f(-x)$;

$$\text{si } g = \check{f}, \quad \text{alors } \hat{g} = \overline{\hat{f}};$$

5) pour tout $\lambda > 0$, notons $m_\lambda f$ la fonction définie par $m_\lambda f(x) = \lambda f(x/\lambda)$; alors

$$\frac{1}{\lambda} \widehat{m_\lambda f} = m_{1/\lambda} \hat{f};$$

6) si $x \mapsto |x|^m f(x)$ appartient à $L^1(\mathbf{R})$, alors \hat{f} est de classe C^m sur \mathbf{R} et l'on a

$$D_\xi^m \hat{f} = (-1)^m \widehat{(x^m f)},$$

où $D_\xi = \frac{1}{2i\pi} \frac{d}{d\xi}$.

Démonstration. Les points 1), 2), 4) et 5) résultent de changement de variables affines très simples.

L'énoncé 3) se démontre d'abord dans le cas où $f, g \in C_c(\mathbf{R})$ comme dans le cas des séries de Fourier; on conclut ensuite par densité de $C_c(\mathbf{R})$ dans $L^1(\mathbf{R})$.

L'énoncé 6) est une application directe du théorème de dérivation sous le signe somme. ■

Théorème 4.3.3 (Formule d'inversion de Fourier) Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ tq. sa transformée de Fourier \hat{f} satisfait

$$\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}).$$

Alors

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{i2\pi\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}.$$

Démonstration.

Une fonction auxiliaire : soit $\phi : x \mapsto e^{-|x|}$; alors

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{2}{1 + 4\pi^2\xi^2}$$

En effet

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-|x|+i2\pi\xi x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{x+i2\pi\xi x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x+i2\pi\xi x} dx \\ &= \frac{1}{1+i2\pi\xi} + \frac{1}{1-i2\pi\xi} = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}. \end{aligned}$$

Pour $\lambda > 0$, on pose

$$\phi_\lambda(x) = e^{-\lambda|x|}$$

on trouve alors que

$$\hat{\phi}_\lambda(\xi) = \frac{1}{\lambda} \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2\xi^2}$$

Une formule de convolution : soit $f \in L^1(\mathbf{R})$; on a

$$f \star \hat{\phi}_\lambda(x) = \int_{\mathbf{R}} \phi_\lambda(z) \hat{f}(z) e^{i2\pi z x} dz$$

En effet, en appliquant le théorème de Fubini, on trouve que

$$\begin{aligned} f \star \hat{\phi}_\lambda(x) &= \int_{\mathbf{R}} f(x-y) \left(\int_{\mathbf{R}} \phi_\lambda(z) e^{i2\pi z y} dz \right) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} \phi_\lambda(z) \left(\int_{\mathbf{R}} f(x-y) e^{i2\pi z y} dy \right) dz \\ &= \int_{\mathbf{R}} \phi_\lambda(z) \left(\int_{\mathbf{R}} f(u) e^{i2\pi z(x-u)} du \right) dz = \int_{\mathbf{R}} \phi_\lambda(z) \hat{f}(z) e^{i2\pi z x} dz. \end{aligned}$$

La fonction $\hat{\phi}_\lambda$ comme approximation de l'identité : d'abord pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\hat{\phi}_\lambda(\xi) \geq 0 \text{ et } \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}_\lambda(\xi) d\xi = 1.$$

Soit alors $g \in L^p(\mathbf{R})$ pour $1 \leq p < \infty$; alors

$$\|g - g \star \hat{\phi}_\lambda\|_{L^p} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \lambda \rightarrow 0.$$

En effet

$$\begin{aligned} g(x) - g \star \hat{\phi}_\lambda(x) &= g(x) - \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}_\lambda(y) g(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}_\lambda(y) (g(x) - g(x-y)) dy = \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}_\lambda(y) (g - \tau_y g)(x) dy \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|g - g \star \hat{\phi}_\lambda\|_{L^p} &\leq \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}_\lambda(y) \|g - \tau_y g\|_{L^p} dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda} \hat{\phi}\left(\frac{y}{\lambda}\right) \|g - \tau_y g\|_{L^p} dy = \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}(y) \|g - \tau_{\lambda z} g\|_{L^p} dz \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.4.6

$$\|g - \tau_{\lambda z} g\|_{L^p} \rightarrow 0 \text{ pp. en } z \text{ pour } \lambda \rightarrow 0.$$

D'autre part,

$$\hat{\phi}(y)\|g - \tau_{\lambda z}g\|_{L^p} \leq 2\|g\|_{L^p}\hat{\phi}(y)$$

de sorte que, comme la fonction $\hat{\phi}$ appartient à $L^1(\mathbf{R})$, le théorème de convergence dominée entraîne la convergence annoncée.

Conclusion : partons de la formule de convolution ci-dessus

$$f \star \hat{\phi}_\lambda(x) = \int_{\mathbf{R}} \phi_\lambda(z)\hat{f}(z)e^{i2\pi z x} dz.$$

Observons que

$$\phi_\lambda(z)\hat{f}(z)e^{i2\pi z x} \rightarrow \hat{f}(z)e^{i2\pi z x} \text{ pp. en } z \text{ lorsque } \lambda \rightarrow 0;$$

de plus

$$|\phi_\lambda(z)\hat{f}(z)e^{i2\pi z x}| \leq |\hat{f}(z)| \text{ et } \hat{f} \in L^1(\mathbf{R}).$$

Par convergence dominée, le membre de droite de la formule de convolution converge vers

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(z)e^{i2\pi z x} dz$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$. Le membre de gauche converge vers f dans $L^1(\mathbf{R})$; il existe donc une suite $\lambda_n \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$ telle que

$$f \star \hat{\phi}_{\lambda_n}(x) \rightarrow f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

On en déduit que

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(z)e^{i2\pi z x} dz \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}$$

cqfd. ■

4.3.2 La transformée de Fourier sur L^2

La théorie L^2 des séries de Fourier reposait sur le fait que la suite de fonctions $(e^{-i2\pi kx})_{k \in \mathbf{Z}}$ constitue une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{T})$. Il est impossible de s'inspirer ici de cette idée car aucune fonction de la forme $x \mapsto e^{-i2\pi \xi x}$ n'appartient à $L^2(\mathbf{R})$.

Malgré tout, on a un analogue de l'égalité de Parseval :

EGALITÉ DE PLANCHEREL

Pour tout $f, g \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{g}(\xi)}\hat{f}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(x)}f(x)dx.$$

En particulier, pour $f = g$, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Démonstration. Posons

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)} \text{ et } F = \tilde{f} \star f.$$

Evidemment, $\tilde{f} \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$ de sorte que, d'après l'inégalité de Young, $F \in L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R})$, avec

$$\|F\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}^2 \text{ et } \|F\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^2}^2.$$

En fait

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-(x-y))} f(y) dy = (\tau_x f | f)_{L^2}$$

pp. en $x \in \mathbf{R}$. D'autre part, d'après le lemme 2.4.6, on sait que, pour $f \in L^2(\mathbf{R})$ fixée, l'application

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \tau_x f \in L^2(\mathbf{R})$$

est uniformément continue, de sorte que la relation ci-dessus montre que F est égale pp.à la fonction continue $x \mapsto (\tau_x f | f)_{L^2}$. Dans la suite, on identifiera la classe d'équivalence F de fonctions égales pp. avec ce représentant continu particulier, en posant

$$F(x) = (\tau_x f | f)_{L^2} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

On utilise alors la formule de convolution par la fonction ϕ_λ , c'est à dire la deuxième étape de la démonstration de la formule d'inversion de Fourier. Comme $F \in L^1(\mathbf{R})$,

$$F \star \hat{\phi}_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(z) \phi_\lambda(z) e^{i2\pi z x} dz$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$, de sorte qu'en particulier, pour $x = 0$, l'on a

$$F \star \hat{\phi}_\lambda(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(z) \phi_\lambda(z) dz.$$

Or $F \in C_b(\mathbf{R})$: en procédant comme dans la troisième étape de la preuve de la formule d'inversion de Fourier, on voit que

$$\|F - F \star \hat{\phi}_\lambda\|_{L^\infty} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(y) \|F - \tau_{\lambda z} F\|_{L^\infty} dz.$$

Comme F est uniformément continue,

$$\|F - \tau_{\lambda z} F\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \text{ pour tout } z \in \mathbf{R}$$

lorsque $\lambda \rightarrow 0$; d'autre part

$$|\hat{\phi}(y)| \|F - \tau_{\lambda z} F\|_{L^\infty} \leq 2\|F\|_{L^\infty} \hat{\phi} \in L^1(\mathbf{R})$$

de sorte que, par convergence dominée, l'on a

$$F \star \hat{\phi}_\lambda \rightarrow F \text{ uniformément sur } \mathbf{R}$$

lorsque $\lambda \rightarrow 0$. En particulier,

$$F \star \hat{\phi}_\lambda(0) \rightarrow F(0) = \|f\|_{L^2}^2 \text{ pour } \lambda \rightarrow 0.$$

Enfin

$$\hat{F} = \widehat{(\bar{f} \star f)} = |\hat{f}|^2,$$

tandis que

$$\phi_\lambda(z) \uparrow 1 \text{ pour tout } z \in \mathbf{R} \text{ lorsque } \lambda \downarrow 0.$$

Par convergence monotone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(z) \phi_\lambda(z) dz \uparrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(z)|^2 dz$$

ce qui démontre l'égalité de Plancherel pour $f = g$. ■

A partir de l'égalité de Plancherel, il devient très simple de définir la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$.

Théorème 4.3.4 (Transformation de Fourier-Plancherel) *Il existe une unique application linéaire $\mathcal{F} : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$ tq.*

1) *pour tout $f, g \in L^2(\mathbf{R})$, on a*

$$(\mathcal{F}f | \mathcal{F}g)_{L^2} = (f | g)_{L^2(\mathbf{R})};$$

2) *pour tout $f \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$ on a*

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) \text{ pp. en } \xi \in \mathbf{R}.$$

Cette application linéaire est un isomorphisme d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$ défini par

$$(\overline{\mathcal{F}}\phi)(x) = (\mathcal{F}f)(-x).$$

Pour établir ce résultat, on aura besoin du lemme de prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace complet.

Lemme 4.3.5 *Soit (X, d) un espace métrique, $A \subset X$ dense, (Y, δ) un espace complet, et une application $f : A \rightarrow Y$ uniformément continue.*

Alors f admet un unique prolongement par continuité à X .

Démonstration. L'existence et l'unicité de \mathcal{F} découlent immédiatement du lemme en posant $X = Y = L^2(\mathbf{R})$ et $A = L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$ qui est dense dans $L^2(\mathbf{R})$ puisque contenant $C_c(\mathbf{R})$ que l'on sait être dense dans $L^2(\mathbf{R})$, et en considérant l'application linéaire

$$L^1 \cap L^2(\mathbf{R}) \ni f \mapsto \hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$$

qui est une isométrie pour la norme L^2 , et donc est uniformément continue pour cette norme.

L'égalité de Plancherel qui a été démontrée sur $L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$ se prolonge alors immédiatement par continuité et densité en 1) sur $L^2(\mathbf{R})$.

Si $f \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$, on a $\hat{\phi}_\lambda \star f \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$ où $\phi_\lambda(x) = e^{-\lambda|x|}$ comme dans la preuve du théorème d'inversion de Fourier. De plus

$$\widehat{\hat{\phi}_\lambda \star f} = \phi_\lambda \star \hat{f} \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R}).$$

(La borne L^2 vient de l'égalité de Plancherel, et la borne L^1 de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de ce que ϕ_λ et $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$). D'après le théorème d'inversion de Fourier

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(\hat{\phi}_\lambda \star f) = \hat{\phi}_\lambda \star f.$$

Or $\phi_\lambda \star f \rightarrow f$ dans $L^2(\mathbf{R})$ pour $\lambda \rightarrow 0$ car $f \in L^2(\mathbf{R})$ — cf. la troisième étape de la preuve du théorème d'inversion de Fourier. Puisque \mathcal{F} et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des isométries de $L^2(\mathbf{R})$, en passant à la limite pour $\lambda \rightarrow 0$, on trouve que

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f) = f \text{ pour tout } f \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R}).$$

Par densité de $L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$ dans $L^2(\mathbf{R})$, comme \mathcal{F} et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des isométries pour la norme L^2 , on trouve que

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = I.$$

Puis en appliquant cette relation à $f(-x)$ où f est une fonction arbitraire de $L^2(\mathbf{R})$, on voit que

$$\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = I$$

cqfd. ■

Démonstration du lemme de prolongement. Voici comment on construit le prolongement \tilde{f} de f à X .

Soit $x \in X \setminus A$; comme A est dense dans X , il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de A convergeant vers x .

Comme cette suite converge, elle est de Cauchy dans X .

Comme f est uniformément continue sur A , la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans Y ; et comme Y est complet, on en déduit que cette suite admet une limite dans Y , que l'on choisira pour $\tilde{f}(x)$.

Si $(a'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une autre suite de points de A convergeant vers x , il résulte de l'uniforme continuité de \tilde{f} sur A que les deux suites $(f(a_n))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(f(a'_n))_{n \in \mathbf{N}}$ ont même limite dans Y . Ainsi, $\tilde{f}(x)$ est défini de façon unique.

Montrons que \tilde{f} est uniformément continue sur X . Soit $\epsilon > 0$; notons $\alpha = \alpha(\epsilon) > 0$ le module de continuité de f sur A . Autrement dit

$$a, a' \in A \text{ et } d(a, a') < \alpha \implies \delta(f(a), f(a')) < \epsilon.$$

Soient alors x et $x' \in X \setminus A$ quelconques tq. $d(x, x') < \alpha/3$; par densité de A dans X et d'après la construction de \tilde{f} , il existe a et $a' \in A$ tq.

$$d(x, a) < \alpha/3, \quad d(x', a') < \alpha/3 \text{ tandis que } \delta(\tilde{f}(x), f(a)) < \epsilon \text{ et } \delta(\tilde{f}(x'), f(a')) < \epsilon.$$

Donc

$$d(a, a') < d(a, x) + d(x, x') + d(x', a') < \alpha$$

de sorte que $\delta(f(a), f(a')) < \epsilon$ et

$$\delta(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) < \delta(\tilde{f}(x), f(a)) + \delta(f(a), f(a')) + \delta(\tilde{f}(a'), f(x')).$$

En conclusion

$$x, x' \in X \text{ et } d(x, x') < \alpha/3 \implies \delta(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) < 3\epsilon,$$

ce qui prouve que \tilde{f} est uniformément continue sur X .

L'unicité du prolongement continu de f vient de ce que deux applications continues de X dans Y coïncidant sur une partie dense de X sont nécessairement égales sur X tout entier. ■