Examen

12 janvier 2009, Trois heures

Les questions plus difficiles sont signalées par $\star$
Le barème est donné à titre indicatif.
Les documents personnels, les notes de cours ou de travaux dirigés, ainsi que téléphones portables, ne sont pas autorisés.

Exercice 1 **4 points**

Soit L un réel strictement positif et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite d'applications L-lipschitziennes avec $f_n(0) = 2$ pour tout entier n. On se propose de démontrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente de la suite (f_n), pour la norme $L^\infty(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.
2. Montrer que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est un ensemble borné pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Appliquer le théorème d'Acoli sur le compact $B(0, N)$, où N est un entier quelconque.
4. $\star$ Utiliser le procédé diagonal de Cantor pour conclure.

Exercice 2 **6 points**

On rappelle que $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx$$

et $\overline{\mathcal{F}}$, définie par

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \quad \overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(x)\, dx,$$

vérifie

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ avec } \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}), \quad f = (2\pi)^{-1}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))\ pp.$$

Dans cet exercice on désignera, pour tout réel $r > 0$, par $\mathcal{E}_1(r)$ l'ensemble des fonctions f dans $L^1(\mathbb{R})$ telles que la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ de f est nulle presque partout en dehors de l'intervalle $[-r, r]$.

On se propose d'établir l'inégalité de *Bernstein* suivante : soit j un entier. Il existe une constante C telle que pour tout réel r strictement positif et toute fonction f de classe C^j sur $\mathbb{R}$, élément de $\mathcal{E}_1(r)$, on ait

$$\|f^{(j)}\|_{L^1} \leq C r^j \|f\|_{L^1},$$

où $f^{(j)}$ désigne la dérivée j-ème de f.

1. Soit f et h deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ et soit $g = \overline{\mathcal{F}}(h)$.
   (a) Montrer que fg appartient à $L^1(\mathbb{R})$.
   (b) En utilisant le théorème de Fubini, montrer que
   $$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) \star h.$$
2. Soit $f \in \mathcal{E}_1(r)$. Montrer que la fonction f_r définie par $f_r(x) = f(r^{-1}x)$ est dans $\mathcal{E}_1(1)$.
3. Calculer, pour tout $p \in [1, \infty]$, la norme $\|f_r\|_{L^p}$ (resp. $\|f_r^{(j)}\|_{L^p}$) en fonction de $\|f\|_{L^p}$ (resp. $\|f^{(j)}\|_{L^p}$).
4. Soit ϕ une fonction de classe C^∞, à support dans $\{x \in \mathbb{R},\, |x| \leq 2\}$, et telle que $\phi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$. Montrer que
   $$f_r = \frac{1}{2\pi} m \star f_r, \quad \text{avec} \quad m = \overline{\mathcal{F}}(\phi).$$
   On pourra utiliser la question 1b.
5. En déduire l'inégalité de Bernstein.

Exercice 3 **6 points**

On considère l'espace de Hilbert $L^2([0, L])$, muni du produit scalaire $\displaystyle\int_0^L \overline{f} g(x)\, dx$ et l'on pose $\omega = \pi/(2L)$.

1. Montrer que les fonctions $\varphi_p(x) = \sin((2p+1)\omega x)$, pour $p \in \mathbb{N}$, forment un système orthogonal, et calculer leur norme.
2. Pour $f \in L^2([0, L])$, dessiner sommairement la fonction $g \in L^2([-2L, 2L])$ définie de la manière suivante
   $$g(x) = \begin{cases} f(t) & \text{pour } 0 < x < L \\ -f(2L - x) & \text{pour } L < x < 2L \\ -g(-x) & \text{pour } -2L < x < 0\ . \end{cases} \tag{1}$$
   Montrer que le développement en série de Fourier de g ne contient que des sinus impairs du type $\sin((2p+1)\omega x)$.
3. En déduire que le système formé par les fonctions $\sin((2p+1)\omega x)$ est total, et que tout $f \in L^2([0, L])$ s'écrit comme $\sum c_p \varphi_p$, la série convergeant en moyenne quadratique, et donner la formule permettant de calculer les coefficients.
4. Soit l'équation aux dérivées partielles suivante
   $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1], \\ u(t, 0) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ u(0, x) = u^0(x) \in C^2([0, 1]). \end{cases}$$

Calculer (au moyen d'une décomposition en série de Fourier dans la variable x en utilisant la question précédente) la solution $u(t,x)$, que l'on supposera de classe $C^2(\mathbb{R}_+ \times [0,1])$.

Exercice 4 **4 points**

Les polynômes de Tchebychev T_n sont définis, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{cases} T_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad x \in [-1,1], \\ T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos(x)), \quad x \in [-1,1], n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

On admet que l'ensemble des polynômes de Tchebychev $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2([-1,1], dx/\sqrt{1-x^2})$.

1. Calculer le développement en série de Tchebychev de la fonction $f(x) = \text{signe}(x)$ définie sur l'intervalle $[-1,1]$.

2. En déduire que
$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$