Examen du 3 mars 2009

Théorie des équations de Navier-Stokes

Trois heures

Seules les notes personnelles dans le cadre du module sont autorisées. Les problèmes sont indépendants entre eux.

NB : Dans tout le sujet, les constantes seront notées par la même lettre C et pourront être différentes d'une ligne à l'autre.

Problème 1. L'objectif de cet problème est de donner une preuve des inégalités de Hardy

$$\forall u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \quad \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}}\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} \quad \text{pour } 0 \leq s < \frac{d}{2} \tag{1}$$

ainsi que des estimations précisées suivantes :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}}\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|u\|^{\alpha}_{\dot{B}^{s-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}_{p,2}(\mathbb{R}^d)} \|u\|^{1-\alpha}_{\dot{B}^{s-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}_{q,2}(\mathbb{R}^d)} \tag{2}$$

$$\text{pour } 0 \leq s < \frac{d}{2}, \quad 2 \leq q < \frac{2d}{d-2s} < p \leq \infty \quad \text{et } \alpha = \frac{pq}{p-q}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{s}{d}\right).$$

1. Expliquer pourquoi (2) précise l'estimation (1).

2. On souhaite tout d'abord démontrer que l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ (des fonctions C^∞ à support compact, dont le support ne rencontre pas l'origine) est dense dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ si $s < d/2$. Soit donc $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ tel que u est dans l'orthogonal de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ pour le produit scalaire de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$.
   (a) Montrer que le support de $\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\widehat{u}(\xi))$ est nécessairement inclus dans $\{0\}$.
   (b) Montrer que la masse de Dirac δ_0 n'est dans aucun espace $\dot{H}^t(\mathbb{R}^d)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (c) Conclure.
   (d) Qu'en est-il si $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est remplacé par $H^s(\mathbb{R}^d)$?

3. On suppose dans cette question que $d = 3$ et $s = 1$, et l'on se propose de démontrer l'inégalité de Hardy

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\, dx \leq C\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{3}$$

   Pour ce faire on introduit le champ de vecteurs $\mathcal{R} = x \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{3} x_i \partial_i$.

(a) Montrer que
$$\mathcal{R}\frac{1}{|x|^2} = -\frac{2}{|x|^2}.$$

(b) Par une intégration par parties, montrer le résultat (3) cherché si la fonction u est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$

(c) Démontrer l'inégalité de Hardy (3) pour toute fonction u dans $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$.

4. On souhaite maintenant démontrer le résultat (1) général. On admettra que le dual de $\dot{B}^s_{p,r}$ est $\dot{B}^{-s}_{p',r'}$, où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'} = 1$. Soit $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, avec $s < d/2$.

(a) Montrer que
$$\|u^2\|_{\dot{B}^{2s-\frac{d}{2}}_{2,1}} \leq C\|u\|^2_{\dot{H}^s}.$$

(b) Conclure.

5. On souhaite enfin démontrer l'inégalité (2). On rappelle l'algorithme de paraproduit :
$$u^2 = 2T_u u + R(u,u),$$
$$\text{avec} \quad T_u v = \sum_{j\in\mathbb{Z}} S_{j-1}u\,\Delta_j v \quad \text{et} \quad R(u,v) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\mu\in\{-1,0,1\}} \Delta_j u\,\Delta_{j-\mu} v.$$

(a) Montrer que
$$\|T_u u\|_{\dot{B}^{2s-d}_{\infty,1}} \leq C\|u\|^2_{\dot{B}^{s-\frac{d}{2}}_{\infty,2}}.$$

(b) En déduire que sous les hypothèses de (2),
$$|\langle|\cdot|^{-2s}, T_u u\rangle| \leq C\|u\|^{2\alpha}_{\dot{B}^{s-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}_{p,2}(\mathbb{R}^d)} \|u\|^{2-2\alpha}_{\dot{B}^{s-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}_{q,2}(\mathbb{R}^d)}.$$

(c) Soit R un réel strictement positif, et soient deux fonctions f et g dans $L^p \cap L^q(\mathbb{R}^d)$. On définit
$$I_1(R) = \int_{|x|\leq R} \frac{fg(x)}{|x|^{2s}}\,dx \quad \text{et} \quad I_2(R) = \int_{|x|\geq R} \frac{fg(x)}{|x|^{2s}}\,dx.$$

Montrer que
$$I_1(R) \leq R^{d-2s-\frac{2d}{p}}\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^p} \quad \text{et} \quad I_2(R) \leq R^{d-2s-\frac{2d}{q}}\|f\|_{L^q}\|g\|_{L^q}.$$

(d) Par un choix judicieux de R conclure que
$$|\langle|\cdot|^{-2s}, fg\rangle| \leq C\|f\|^{\alpha}_{L^p}\|g\|^{\alpha}_{L^p}\|f\|^{1-\alpha}_{L^q}\|g\|^{1-\alpha}_{L^q},$$

avec $\alpha = \dfrac{pq}{p-q}\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{s}{d}\right)$.

(e) En appliquant cette inégalité à $f = \Delta_j u$ et $g = \Delta_{j-\mu} u$ en déduire que sous les hypothèses de (2),

$$|\langle |\cdot|^{-2s}, R(u,u)\rangle| \leq C\|u\|^{2\alpha}_{\dot{B}^{s-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}_{p,2}(\mathbb{R}^d)} \|u\|^{2-2\alpha}_{\dot{B}^{s-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}_{q,2}(\mathbb{R}^d)}.$$

(f) Démontrer l'inégalité de Hardy précisée.

Problème 2. Soit u_0 un champ de vecteurs à trois composantes, de divergence nulle, dont chacune des composantes dépend de deux variables réelles x_1 et x_2. On suppose que u_0 appartient à $L^2(\mathbb{R}^2)$. On note par u l'unique solution des équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2$ associée à u_0, qui vérifie

$$\forall t \geq 0, \quad \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\, dt' = \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Soit w_0 un champ de vecteurs à trois composantes, de divergence nulle, dont chacune des composantes dépend de trois variables réelles x_1, x_2 et x_3. On suppose que $w_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, et l'on se propose de démontrer que si w_0 est assez petit dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ (comparativement à u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^2)$), alors il existe une unique solution globale des équations de Navier-Stokes suivantes :

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t v - \nu\Delta v + v\cdot\nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div}\ v = 0 \\ v_{|t=0} = u_0 + w_0. \end{cases}$$

On a noté ∇f (resp. Δf) pour le gradient (resp. le Laplacien) d'une fonction ou d'un vecteur f, étant entendu que si f ne dépend que de deux variables et non trois, alors il s'agit d'un gradient ou d'un Laplacien en deux variables seulement.

1. Dans cette question, nous allons démontrer quelques résultats sur le produit de fonctions, l'une dépendant de deux variables et l'autre de trois variables.

   (a) Soit $a \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ et $b \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Montrer que pour presque tout $x_3 \in \mathbb{R}$,

   $$\|ab(\cdot, x_3)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|a\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)}\|b(\cdot, x_3)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)}.$$

   (b) En déduire que

   $$\|ab\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|a\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)}\|b\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}.$$

   (c) Soit $c \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $b \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Montrer que pour presque tout $x_3 \in \mathbb{R}$,

   $$\|bc(\cdot, x_3)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)} \leq C\|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|b(\cdot, x_3)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)}.$$

   (d) En déduire que

   $$\|bc\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|b\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}.$$

2. Soit l'équation

$$(PNS) \qquad \begin{cases} \partial_t w - \nu\Delta w + w\cdot\nabla w + w\cdot\nabla u + u\cdot\nabla w = -\nabla q \\ \text{div } \ w = 0 \\ w_{|t=0} = w_0. \end{cases}$$

On admettra que cette équation possède une solution dans l'espace $C([0,T];\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T];\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3))$ pour un certain temps $T>0$ et que si le temps maximal T^* de la solution est fini, alors

$$\lim_{T\to T^*} \|w\|_{L^4([0,T];\dot H^1(\mathbb{R}^3))} = \infty.$$

On souhaite montrer que cette solution est unique, et que si la donnée initiale est suffisamment petite, alors cette solution est globale.

(a) En utilisant la question 1, montrer que

$$\left|(u\cdot\nabla w|\ w)_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\right| \le C\|u\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^2)}\|w\|_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\|w\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^3)}.$$

(b) En utilisant la question 1, montrer que

$$\left|(w\cdot\nabla u|\ w)_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\right| \le C\|u\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^2)}\|w\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w\|_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}.$$

(c) Écrire une estimation d'énergie dans $\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)$ sur le système (PNS) vérifié par w, et montrer que pour tout $t\ge 0$,

$$\begin{aligned}\frac12\|w(t)\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)} + \nu\int_0^t \|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\,dt' &\le \frac12\|w_0\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + C\int_0^t \|w(t')\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\,dt' \\ &\quad + C\int_0^t \|u(t')\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^2)}\|w(t')\|^{\frac12}_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w(t')\|^{\frac32}_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\,dt' \\ &\quad + C\int_0^t \|u(t')\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^2)}\|w(t')\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w(t')\|_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\,dt'.\end{aligned}$$

(d) En déduire qu'il existe une constante $c>0$ telle que si

$$\|w_0\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)} \exp\left(\frac{C}{\nu^2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{C}{\nu^4}\|u_0\|^4_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right) \le c\nu$$

alors la solution w du système (PNS) est globale.

(e) Soient w_1 et w_2 deux solutions associées à la donnée initiale w_0 (non nécessairement petite dans $\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)$). Ecrire l'équation satisfaite par w_1-w_2 et montrer, par des estimations analogues à celles écrites ci-dessus, que nécessairement $w_1=w_2$.

3. En déduire un théorème d'existence et d'unicité pour le système (NS) présenté ci-dessus.