Corrigé de l'examen du 3 mars 2009
Théorie des équations de Navier-Stokes

Problème 1. *L'objectif de cet problème est de donner une preuve des inégalités de Hardy*

$$\forall u \in \dot H^s(\mathbb{R}^d), \quad \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}}\,dx\right)^{\frac12} \leq C\|u\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)} \quad pour\, 0 \leq s < \frac{d}{2} \tag{1}$$

ainsi que des estimations précisées suivantes :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}}\,dx\right)^{\frac12} \leq C\|u\|^{\alpha}_{\dot B^{s-d(\frac12-\frac1p)}_{p,2}(\mathbb{R}^d)}\|u\|^{1-\alpha}_{\dot B^{s-d(\frac12-\frac1q)}_{q,2}(\mathbb{R}^d)} \tag{2}$$

$$pour\ 0 \leq s < \frac{d}{2}, \quad 2 \leq q < \frac{2d}{d-2s} < p \leq \infty \quad et\ \alpha = \frac{pq}{p-q}\left(\frac1q - \frac12 + \frac{s}{d}\right).$$

1. *Expliquer pourquoi (2) précise l'estimation (1).*

   C'est simplement une conséquence des injections continues entre espaces de Besov : on a en effet
   $$\dot H^s \subset \dot B^{s-d(\frac12-\frac1r)}_{r,2}, \quad \forall\, 2 \leq r \leq \infty.$$

2. *On souhaite tout d'abord démontrer que l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ (des fonctions C^∞ à support compact, dont le support ne rencontre pas l'origine) est dense dans $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$ si $s < d/2$. Soit donc $u \in \dot H^s(\mathbb{R}^d)$ tel que u est dans l'orthogonal de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ pour le produit scalaire de $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$.*

   (a) *Montrer que le support de $\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\widehat{u}(\xi))$ est nécessairement inclus dans $\{0\}$.*

   On a, pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$,
   $$(u \mid \phi)_{\dot H^s} = 0.$$
   Cela peut se ré-écrire
   $$\int |\xi|^{2s}\widehat{u}(\xi)\,\overline{\widehat{\phi}}(\xi)\,d\xi = 0$$
   et donc
   $$\Big(\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\widehat{u}(\xi)) \mid \phi\Big)_{L^2} = 0,$$
   ce qui donne le résultat demandé.

   (b) *Montrer que la masse de Dirac δ_0 n'est dans aucun espace $\dot H^t(\mathbb{R}^d)$, $t \in \mathbb{R}$.*

   La transformée de Fourier de la masse de Dirac étant la fonction 1, le résultat est dû au fait que la fonction $\xi \mapsto |\xi|^t$ n'est dans L^2 pour aucune valeur de t.

(c) *Conclure.*
La fonction $\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\widehat{u}(\xi))$ est une combinaison linéaire finie de dérivées de masse de dirac en zéro, ce qui contredit le fait que u est dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ par la question précédente.

(d) *Qu'en est-il si $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est remplacé par $H^s(\mathbb{R}^d)$?*
La masse de dirac appartient à $H^s(\mathbb{R}^d)$ dès que $s < -d/2$. Comme $\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\widehat{u}(\xi))$ appartient à H^{-s}, on obtient la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ dans H^s dès que $s \leq d/2$ (on rappelle que $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert pour tout réel s).

3. *On suppose dans cette question que $d = 3$ et $s = 1$, et l'on se propose de démontrer l'inégalité de Hardy*
$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\, dx \leq C\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{3}$$
Pour ce faire on introduit le champ de vecteurs $\mathcal{R} = x \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{3} x_i\partial_i$.

(a) Montrer que
$$\mathcal{R}\frac{1}{|x|^2} = -\frac{2}{|x|^2}.$$
Ce résultat découle d'un simple calcul, puisque
$$\frac{\partial}{\partial_j}\frac{1}{|x|^2} = -\frac{2x_j}{|x|^3}.$$

(b) *Par une intégration par parties, montrer le résultat (3) cherché si la fonction u est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$*
On a
$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^2} R|u(x)|^2\, dx.$$
Mais
$$R|u(x)|^2 = x \cdot \nabla|u(x)|^2 = 2\sum_{i,j} x_i u^j(x)\partial_i u^j(x),$$
donc
$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\, dx = -\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{x_i}{|x|^2} u^j(x)\partial_i u^j(x)\, dx.$$
Par Cauchy-Schwarz on a
$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{x_i}{|x|^2} u^j(x)\partial_i u^j(x)\, dx \leq \left\| \frac{x_i}{|x|^2} u^j(x) \right\|_{L^2} \|\partial_i u^j\|_{L^2},$$
d'où après sommation
$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2}.$$
Le résultat cherché est démontré si fonction u est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$.

(c) *Démontrer l'inégalité de Hardy (3) pour toute fonction u dans $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$.*
Le résultat s'obtient directement par densité.

4. *On souhaite maintenant démontrer le résultat (1) général. On admettra que le dual de $\dot{B}^s_{p,r}$ est $\dot{B}^{-s}_{p',r'}$, où $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r'}=1$. Soit $u\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, avec $s<d/2$.*

(a) *Montrer que*
$$\|u^2\|_{\dot{B}^{2s-\frac{d}{2}}_{2,1}}\leq C\|u\|^2_{\dot{H}^s}.$$
C'est une loi de produit vue en cours (on suppose ici que $0<s$, l'inégalité (2) n'ayant pas de sens si $s=0$ à cause de la contrainte sur q).

(b) *Conclure.*
On a vu également en cours que
$$\frac{1}{|\cdot|^{2s}}\in\dot{B}^{\frac{d}{2}-s}_{2,\infty},$$
donc l'inégalité provient simplement de la dualité des espaces $\dot{B}^{\frac{d}{2}-s}_{2,\infty}$ et $\dot{B}^{2s-\frac{d}{2}}_{2,1}$.

5. *On souhaite enfin démontrer l'inégalité (2). On rappelle l'algorithme de paraproduit :*
$$u^2=2T_uu+R(u,u),$$
$$\textit{avec}\quad T_uv=\sum_{j\in\mathbb{Z}}S_{j-1}u\,\Delta_jv\quad\textit{et}\quad R(u,v)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{\mu\in\{-1,0,1\}}\Delta_ju\,\Delta_{j-\mu}v.$$

(a) *Montrer que*
$$\|T_uu\|_{\dot{B}^{2s-d}_{\infty,1}}\leq C\|u\|^2_{\dot{B}^{s-\frac{d}{2}}_{\infty,2}}.$$
Cette inégalité a été démontrée en cours.

(b) *En déduire que sous les hypothèses de (2),*
$$|\langle|\cdot|^{-2s},T_uu\rangle|\leq C\|u\|^{2\alpha}_{\dot{B}^{s-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}_{p,2}(\mathbb{R}^d)}\|u\|^{2-2\alpha}_{\dot{B}^{s-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}_{q,2}(\mathbb{R}^d)}.$$
C'est une simple application de la dualité précédente, et d'injections continues entre espaces de Besov :
$$\dot{B}^{s-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}_{p,2}(\mathbb{R}^d)\subset\dot{B}^{s-\frac{d}{2}}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d).$$

(c) *Soit R un réel strictement positif, et soient deux fonctions f et g dans $L^p\cap L^q(\mathbb{R}^d)$. On définit*
$$I_1(R)=\int_{|x|\leq R}\frac{fg(x)}{|x|^{2s}}\,dx\quad\textit{et}\quad I_2(R)=\int_{|x|\geq R}\frac{fg(x)}{|x|^{2s}}\,dx.$$

Montrer que

$$I_1(R) \le R^{d-2s-\frac{2d}{p}} \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^p} \quad \textit{et} \quad I_2(R) \le R^{d-2s-\frac{2d}{q}} \|f\|_{L^q}\|g\|_{L^q}.$$

Il s'agit simplement d'une inégalité de Hölder.

(d) *Par un choix judicieux de R conclure que*

$$|\langle |\cdot|^{-2s}, fg\rangle| \le C\|f\|_{L^p}^{\alpha}\|g\|_{L^p}^{\alpha}\|f\|_{L^q}^{1-\alpha}\|g\|_{L^q}^{1-\alpha},$$

avec $\alpha = \dfrac{pq}{p-q}\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{s}{d}\right)$.

Il suffit de choisir

$$R = \left(\frac{\|f\|_{L^q}\|g\|_{L^q}}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^p}}\right)^{\frac{pq}{2d(p-q)}}.$$

(e) *En appliquant cette inégalité à $f = \Delta_j u$ et $g = \Delta_{j-\mu} u$ en déduire que sous les hypothèses de (2),*

$$|\langle |\cdot|^{-2s}, R(u,u)\rangle| \le C\|u\|^{2\alpha}_{\dot{B}^{s-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}_{p,2}(\mathbb{R}^d)}\|u\|^{2-2\alpha}_{\dot{B}^{s-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}_{q,2}(\mathbb{R}^d)}.$$

On a

$$\langle \rho^{-2s}, R(u,u)\rangle = \sum_{|\mu|\le 1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\langle \rho^{-2s}, \Delta_j u\Delta_{j-\mu} u\rangle.$$

Mais alors par la question précédente

$$\langle \rho^{-2s}, R(u,u)\rangle \le \sum_{|\mu|\le 1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(2^{2j(s-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}))}\|\Delta_j u\|_{L^p}\|\Delta_{j-\mu} u\|_{L^p}\Big)^{\alpha}$$
$$\times\Big(2^{2j(s-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}))}\|\Delta_j u\|_{L^q}\|\Delta_{j-\mu} u\|_{L^q}\Big)^{1-\alpha}.$$

Cela implique qu'il existe des suites $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $(c'_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ telles que

$$\langle \rho^{-2s}, R(u,u)\rangle \le C\|u\|^{2\alpha}_{B^{s-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}_{q,2}}\|u\|^{2(1-\alpha)}_{B^{s-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}_{p,2}}\sum_{|\mu|\le 1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(c_jc_{j-\mu})^{\alpha}(c'_jc'_{j-\mu})^{1-\alpha}.$$

Par les inégalités de Hölder on a donc

$$\langle \rho^{-2s}, R(u,u)\rangle \le C\|u\|^{2\alpha}_{B^{s-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}_{p,2}}\|u\|^{2(1-\alpha)}_{B^{s-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}_{q,2}}.$$

(f) *Démontrer l'inégalité de Hardy précisée.*

Elle suit directement des inégalités ci-dessus.

Problème 2. *Soit u_0 un champ de vecteurs à trois composantes, de divergence nulle, dont chacune des composantes dépend de deux variables réelles x_1 et x_2. On suppose que u_0 appartient à $L^2(\mathbb{R}^2)$. On note par u l'unique solution des équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2$ associée à u_0, qui vérifie*

$$\forall t \geq 0, \quad \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\, dt' = \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Soit w_0 un champ de vecteurs à trois composantes, de divergence nulle, dont chacune des composantes dépend de trois variables réelles x_1, x_2 et x_3. On suppose que $w_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, et l'on se propose de démontrer que si w_0 est assez petit dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ (comparativement à u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^2)$), alors il existe une unique solution globale des équations de Navier-Stokes suivantes :

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t v - \nu\Delta v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \\ div \ \ v = 0 \\ v_{|t=0} = u_0 + w_0. \end{cases}$$

On a noté ∇f (resp. Δf) pour le gradient (resp. le Laplacien) d'une fonction ou d'un vecteur f, étant entendu que si f ne dépend que de deux variables et non trois, alors il s'agit d'un gradient ou d'un Laplacien en deux variables seulement.

1. *Dans cette question, nous allons démontrer quelques résultats sur le produit de fonctions, l'une dépendant de deux variables et l'autre de trois variables.*

   (a) *Soit $a \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ et $b \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Montrer que pour presque tout $x_3 \in \mathbb{R}$,*

   $$\|ab(\cdot, x_3)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|a\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)}\|b(\cdot, x_3)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)}.$$

   Il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder associée à l'injection continue $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2) \subset L^4(\mathbb{R}^2)$.

   (b) *En déduire que*

   $$\|ab\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|a\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)}\|b\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}.$$

   On intègre l'inégalité ci-dessus (après avoir élevé les deux membres au carré) sur $\mathbb{R}$, et on utilise le fait que

   $$\int \|b(\cdot, x_3)\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)}\, dx_3 \leq \|b\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}$$

   qui provient simplement du fait que $|\xi_h| \leq |\xi|$.

   (c) *Soit $c \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $b \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Montrer que pour presque tout $x_3 \in \mathbb{R}$,*

   $$\|bc(\cdot, x_3)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)} \leq C\|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|b(\cdot, x_3)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)}.$$

   Ce résultat est une loi de produit en deux dimensions d'espace.

(d) *En déduire que*

$$\|bc\|_{\dot H^{-\frac12}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|b\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}.$$

On applique le même raisonnement qu'au-dessus, en remarquant cette fois que

$$|\xi|^{-1} \leq |\xi_h|^{-1}.$$

2. *Soit l'équation*

$$(PNS) \quad \left\{ \begin{array}{c} \partial_t w - \nu\Delta w + w\cdot\nabla w + w\cdot\nabla u + u\cdot\nabla w = -\nabla q \\ div\;\; w = 0 \\ w_{|t=0} = w_0. \end{array} \right.$$

On admettra que cette équation possède une solution dans l'espace $C([0,T];\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T];\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3))$ *pour un certain temps* $T>0$ *et que si le temps maximal* T^* *de la solution est fini, alors*

$$\lim_{T\to T^*}\|w\|_{L^4([0,T];\dot H^1(\mathbb{R}^3))} = \infty.$$

On souhaite montrer que cette solution est unique, et que si la donnée initiale est suffisamment petite, alors cette solution est globale.

(a) *En utilisant la question 1, montrer que*

$$\left|(u\cdot\nabla w|\; w)_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\right| \leq C\|u\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^2)}\|w\|_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\|w\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^3)}.$$

On écrit simplement

$$\left|(u\cdot\nabla w|\; w)_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\right| \leq \|u\cdot\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|w\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^3)}$$

et on applique l'estimation de la question 1 indiquant que

$$\|u\cdot\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|u\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^2)}\|w\|_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}.$$

(b) *En utilisant la question 1, montrer que*

$$\left|(w\cdot\nabla u|\; w)_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\right| \leq C\|u\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^2)}\|w\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w\|_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}.$$

On a

$$\left|(w\cdot\nabla u|\; w)_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\right| \leq \|w\cdot\nabla u\|_{\dot H^{-\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w\|_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}$$

donc par la question 1 on obtient

$$\left|(w\cdot\nabla u|\; w)_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\right| \leq C\|u\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^2)}\|w\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w\|_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}.$$

(c) *Écrire une estimation d'énergie dans* $\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)$ *sur le système* (PNS) *vérifié par* w*, et montrer que pour tout* $t \geq 0$*,*

$$\begin{aligned}\frac12\|w(t)\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)} + \nu\int_0^t \|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\,dt' &\leq \frac12\|w_0\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\\ &+ C\int_0^t \|w(t')\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\,dt'\\ &+ C\int_0^t \|u(t')\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^2)}\|w(t')\|^{\frac12}_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w(t')\|^{\frac32}_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\,dt'\\ &+ C\int_0^t \|u(t')\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^2)}\|w(t')\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w(t')\|_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\,dt'.\end{aligned}$$

On a

$$\frac12\|w(t)\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)} + \nu\int_0^t \|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\,dt' \leq \frac12\|w_0\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}$$
$$+ C\int_0^t \|w(t')\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\,dt' + \left|(w\cdot\nabla u|\ w)_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\right| + \left|(u\cdot\nabla w|\ w)_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\right|$$

et le résultat suit des inégalités précédentes et de l'interpolation

$$\|w(t)\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^3)} \leq C\|w(t)\|^{\frac12}_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w(t)\|^{\frac12}_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}.$$

(d) *En déduire qu'il existe une constante* $c > 0$ *telle que si*

$$\|w_0\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\exp\left(\frac{C}{\nu^2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{C}{\nu^4}\|u_0\|^4_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right) \leq c\nu$$

alors la solution w *du système* (PNS) *est globale.*

On commence par ré-écrire l'inégalité précédente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\|w(t)\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)} + \frac34\nu\int_0^t \|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\,dt' &\leq \|w_0\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\\ &+ C\int_0^t \|w(t')\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\,dt'\\ &+ \frac{C}{\nu^3}\int_0^t \|u(t')\|^4_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^2)}\|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\,dt'\\ &+ \frac{C}{\nu}\int_0^t \|u(t')\|^2_{\dot H^1(\mathbb{R}^2)}\|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\,dt'.\end{aligned}$$

Soit maintenant $T > 0$ le temps maximal tel que

$$\forall t \leq T, \quad \|w(t)\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)} \leq 2c\nu.$$

Alors pour tout $t \leq T$, l'inégalité précédente devient (pourvu que c soit suffisamment petit)

$$\|w(t)\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)} + \nu\int_0^t \|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\,dt' \leq \|w_0\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}$$
$$+ \frac{C}{\nu^3}\int_0^t \|u(t')\|^4_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^2)}\|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\,dt' + \frac{C}{\nu}\int_0^t \|u(t')\|^2_{\dot H^1(\mathbb{R}^2)}\|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\,dt'.$$

Une inégalité de Gronwall fournit

$$\|w(t)\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)} + \nu \int_0^t \|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\, dt' \leq \|w_0\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)} \times \exp\left(\frac{C}{\nu^3}\int_0^t \|u(t')\|^4_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^2)}\, dt' + \frac{C}{\nu}\int_0^t \|u(t')\|^2_{\dot H^1(\mathbb{R}^2)}\, dt'\right)$$

ce qui donne le résultat par l'estimation d'énergie satisfaite par u.

(e) *Soient w_1 et w_2 deux solutions associées à la donnée initiale w_0 (non nécessairement petite dans $\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)$). Ecrire l'équation satisfaite par $w_1 - w_2$ et montrer, par des estimations analogues à celles écrites ci-dessus, que nécessairement $w_1 = w_2$.*

Soit $\delta = w_1 - w_2$, alors

$$\partial_t\delta - \nu\Delta\delta + \delta\cdot\nabla\delta + (w_1+u)\cdot\nabla\delta + \delta\cdot\nabla(w_1+u) = -\nabla P$$

On peut alors écrire une estimation similaire à celle écrite sur w ci-dessus, la seule différence provient des termes $w_1\cdot\nabla\delta$ et $\delta\cdot\nabla w_1$ qui sont estimés via les inégalités

$$\left|(w\cdot\nabla w_1|\ w)_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\right| \leq C\|w\|_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w_1\|_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\|w\|_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}$$

et

$$\left|(w_1\cdot\nabla w|\ w)_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\right| \leq C\|w_1\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^3)}\|w\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^3)}\|w\|_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}.$$

Par interpolation on a donc

$$\left|(w\cdot\nabla w_1|\ w)_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\right| + \left|(w_1\cdot\nabla w|\ w)_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\right| \leq \frac{\nu}{2}\|w\|^2_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)} + \frac{C}{\nu}\|w\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w_1\|^2_{\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)} + \frac{C}{\nu^3}\|w\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\|w_1\|^4_{\dot H^1(\mathbb{R}^3)}$$

et on conclut comme ci-dessus par une estimation de Gronwall.

3. *En déduire un théorème d'existence et d'unicité pour le système (NS) présenté ci-dessus.*

Le théorème s'énonce de la manière suivante. Il existe une constante $C > 0$ telle qu'on ait le résultat suivant : soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $w_0 \in \dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\|w_0\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}\exp\left(\frac{C}{\nu^2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{C}{\nu^4}\|u_0\|^4_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right) \leq c\nu.$$

Alors il existe une unique solution v au système (NS) associée à la donnée $u_0 + w_0$, telle que si u est la solution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles associée à u_0, alors $v - u \in L^\infty(\mathbb{R}^+;\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+;\dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3))$.