Université Paris 7 Denis Diderot — Année 2006-2007

UFR de mathématiques — Licence L2

Algèbre et analyse pour la physique — MP3

Corrigé du partiel du 28/10/2006

Exercice 1. Soit D le déterminant à calculer ; en faisant $L_i \to L_i - L_1$ pour $i = 2, 3, 4$, on obtient :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 16 \\ 0 & 3 & 12 & 31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 16 \\ 3 & 12 & 31 \end{vmatrix}$$

puis on fait $L_1 \to L_1$, $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L_3 \to L_3 - 3L_1$, ce qui donne

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 13 \end{vmatrix} = 1$$

Exercice 2.

1. On a $P_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$, d'où

$$Q - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on voit que $\operatorname{rg}(Q - I) = 2$, car les deuxièmes et troisièmes colonnes sont linéairement indépendantes, donc $\dim\ker(Q - I) = 1$; donc Q n'est pas diagonalisable.

2. On a $P_R(\lambda) = \det(R - \lambda I) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$, d'où

$$R - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\operatorname{rg}(R-2I) = 1$ et donc $\dim\ker(R-2I) = 2$: R est diagonalisable.

3. On a $P_S(\lambda) = \det(S - \lambda I) = -\lambda^3$; si S était diagonalisable, on aurait $\ker S = \mathbb{R}^3$, et donc S devrait être la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas ; donc S n'est pas diagonalisable.

Exercice 3.

1. On a $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 3)$, d'où une seule valeur propre $\lambda = 0$ (le trinôme $\lambda^2 + 3\lambda + 3$ n'ayant pas de racine réelle) le sous-espace propre associé à 0, soit $\ker A$, est engendré par le vecteur $u = (1, 1, 1,)$ et est donc de dimension 1.
2. Soit E le sous -espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$ et F le sous -espace de $\mathbb{R}^3$ formé des vecteurs dont la somme des composantes est nulle ; on a $\dim E = 1$ et $\dim F = 2$ car c'est le noyau de la forme linéaire $(x, y, z) \to x + y + z$; de plus, on vérifie immédiatement que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$, que $Bu = (m + 2)u$ pour tout vecteur $u \in E$ et que $Bv = (m - 1)v$ pour tout vecteur $v \in F$. E est donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $m + 2$ et F le sous-espace propre associé à la valeur propre $m - 1$.
3. On a $P_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) = \lambda^3 + 6\lambda^2 - 64 = f(\lambda)$; une étude du graphe de la fonction f montre que ce polynôme n'admet qu'une racine réelle simple.
4. Au total, seul B est diagonalisable.

Exercice 4.

1. On a $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda-2)^2(\lambda+2)$; toutes les racines étant réelles, A est trigonalisable.

2.
$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & a\sqrt{2} & 3 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & a\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$
   on a donc :
$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\,(A-2I) &= 1 \quad \text{si} \quad a = 0 \\ &= 2 \quad \text{si} \quad a \neq 0 \end{aligned}$$
   A est donc diagonalisable si et seulement si $a = 0$

Exercice 5.

1. On commence par calculer le polynôme caractéristique de A : $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \frac{1}{2}(\lambda - 1)(2\lambda - 1)$.
   On vérifie que les vecteurs $u = (1,1)$ et $v = (1,2)$ sont respectivement vecteurs propres pour les valeurs propres $\lambda = 1$ et $\lambda = \frac{1}{2}$; si on pose
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
   alors la matrice de passage P a pour première colonne le vecteur-colonne u et pour deuxième colonne le vecteur-colonne v, soit
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   d'où
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-2^{-n} & -1+2^{-n} \\ 2-2^{1-n} & -1+2^{1-n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. On a donc $X_n = A^n\,X_0$, soit

$$\begin{aligned} u_n &= (2-2^{-n})\,u_0 + (-1+2^{-n})\,v_0 \\ v_n &= (2-2^{1-n})\,u_0 + (-1+2^{1-n})\,v_0 \end{aligned}$$

Ces deux suites convergent vers $2u_0 - v_0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 6.

1. Si u est vecteur propre de B pour une certaine valeur propre λ, alors $Bu = \lambda u$, et donc $Au = Iu + \alpha Bu = (1+\alpha\lambda)u$; donc u est vecteur propre de A pour la valeur propre $1+\alpha\lambda$.
   Il s'en suit que si B est diagonalisable, alors il existe une base formée de vecteurs propres de B, donc aussi de A, et ainsi, par définition, A est diagonalisable.
2. On voit facilement que $A - I = (1-m)B$ avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   On a $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = -\lambda^2(\lambda+1)$; comme il est visible que $\operatorname{rg} B = 1$, alors $\dim\ker B = 2$, et comme $\ker B$ est le sous-espace propre relatif à la valeur propre double $\lambda = 0$, B est diagonalisable, donc A aussi d'après 1. ; les valeurs propres de B étant 0 et -1, comme

ici $\alpha = 1 - m$, celles de A sont respectivement 1 et m.
Les vecteurs $u = (1, -1, 0)$ et $v = (1, 0, 1)$ sont vecteurs propres de B pour $\lambda = 0$, et $w = (1, -1, 1)$ est vecteurs propre de B pour $\lambda = -1$. Ces vecteurs forment visiblement une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 7.

1. E_{ii} est déjà diagonale.
2. $E_{ij} - \lambda I$ est une matrice triangulaire, supérieure si $i < j$, inférieure si $i > j$, dont tous les éléments diagonaux sont égaux à λ. On a donc $P_{E_{ij}}(\lambda) = \det(E_{ij} - \lambda I) = \lambda^n$; la seule valeur propre est 0 avec ordre de multiplicité égal à n ; si E_{ij} était diagonalisable, on devrait avoir $\ker E_{ij} = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que E_{ij} devrait être la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 8.

1. On a $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^3$; la seule valeur propre est 2, donc A est trigonalisable.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit immédiatement que $\ker(A - 2I)$ est engendré par le vecteur $u = (1, 1, 0)$, donc est de dimension 1 ; A n'est pas diagonalisable ; par ailleurs,

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cherchons un vecteur v non colinéaire à u dans $\ker(A - 2I)^2$: on aura alors $(A-2I)v \in \ker(A-2I)$ et donc Av sera de la forme $Av = 2v + \alpha u$;

le vecteur $v = (1, 0, -1)$ convient, et on a bien $Av = 2v - 2u$; il suffit de trouver un troisième vecteur w linéairement indépendant de u et v, et comme il sera dans $\mathbb{R}^3 = \ker(A - 2I)^3$, Aw sera de la forme $Aw = 2w + \beta u + \gamma v$: le vecteur $w = (1, 0, 0,)$ fait l'affaire, et on vérifie bien que $Aw = 2w - v$; dans la base (u, v, w), la matrice T de l'endomorphisme dont A est la matrice dans la base canonique est donc triangulaire supérieure.

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice P de changement de base a, comme d'habitude, pour colonnes respectives les vecteurs u, v et w :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a bien $A = PTP^{-1}$.

2. Le système peut s'écrire sous forme matricielle $X' = AX$, où $X(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ et X' est la dérivée de X ; comme $A = PTP^{-1}$, on obtient $P^{-1}X' = TP^{-1}X$ ou encore $Y' = TY$ en posant $Y = P^{-1}X$; si on pose $Y(t) = \big(a(t), b(t), c(t)\big)$, le système dans la nouvelle base s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} a' &= 2a - 2b \\ b' &= 2b - 2c \\ c' &= 2c \end{cases}$$

Ce système s'intègre facilement à partir de la dernière équation, et en reportant chaque fois dans l'équation précédente le résultat obtenu, ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & (K_1 t^2 - 2K_2 t + K_3)\, e^{2t} \\ b & = & (-K_1 t + K_2)\, e^{2t} \\ c & = & K_1\, e^{2t} \end{array}\right.$$

où K_1, K_2 et K_3 sont des constantes arbitraires.
$Y = P^{-1}X$ équivaut à

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

d'où les conditions initiales sur Y :

$$\left\{\begin{array}{l} a(0) = y(0) = 1 = K_3 \\ b(0) = -z(0) = -1 = K_2 \\ c(0) = x(0) - y(0) + z(0) = 1 = K_1 \end{array}\right.$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{lcl} a(t) & = & (t^2 + 2t + 1)\, e^{2t} \\ b(t) & = & -(t+1)\, e^{2t} \\ c(t) & = & e^{2t} \end{array}\right.$$

Revenant au système initial par $X = PY$, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x(t) & = & a(t) + b(t) + c(t) & = & (t^2 + t + 1)\, e^{2t} \\ y(t) & = & a(t) & = & (t+1)^2\, e^{2t} \\ z(t) & = & -b(t) & = & (t+1)\, e^{2t} \end{array}\right.$$