Université Denis Diderot (Paris VII) **2006-2007**
MP 3

Quelques exercices corrigés
Suites et séries numériques

Dans les pages qui suivent nous proposons la corrections de quelques exercices de la feuille sur les suites et les séries. Les exercices 4, 6, 7, 11 (partiellement), 12, 15 et 16 sont corrigés, ainsi qu'un exercice supplémentaire sur les séries de Bertrand.
Quelques résultats importants sur la convergence des séries à termes positifs sont également rappellés au début.

Quelques résultats à savoir :

- La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- *(Règle de d'Alembert)* Soit u_n une suite dont les termes sont tous strictement positifs.
  Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$ alors la série de terme général u_n converge, alors que si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$ alors la série de terme général u_n diverge.
- *(Règle de Cauchy)* Soit u_n une suite dont les termes sont tous positifs.
  Si $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell < 1$ alors la série de terme général u_n converge, alors que si $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell > 1$ alors la série de terme général u_n diverge.

Exercice 4 (Moyenne de Cesaro)

1. – cas où $l \in \mathbf{R}$
   Il faut utiliser la définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers l et couper en deux la somme définissant $v_n - l$, on montre alors que les deux parties sont arbitrairement petites.

   Soit $\epsilon > 0$
   Soit $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, \mid u_n - l \mid < \frac{\epsilon}{2}$ (licite car u_n tend vers l.)
   Soit $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que

   $$\forall n \geq N_2, \frac{\sum_{k=0}^{N_1-1} |u_k - l|}{n+1} < \frac{\epsilon}{2}$$

   (licite car le numérateur est fixe et le dénominateur tend vers $+\infty$ donc le tout tend vers 0.)

Soit $N = \max(N_1, N_2)$, pour $n \geq N$ les deux majorations précédentes sont valables, on a alors :

$$|v_n - l| = |\frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n+1} - l| = |\frac{\sum_{k=0}^{n} (u_k - l)}{n+1}|$$

d'où

$$|v_n - l| \leq \frac{\sum_{k=0}^{n} |u_k - l|}{n+1}$$

grâce à l'inégalité triangulaire.

Ainsi

$$|v_n - l| \leq \frac{\sum_{k=0}^{N_1-1} |u_k - l|}{n+1} + \frac{\sum_{k=N_1}^{n} |u_k - l|}{n+1}$$

d'où

$$|v_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\sum_{k=N_1}^{n} \frac{\epsilon}{2}}{n+1}$$

or

$$\frac{\sum_{k=N_1}^{n} \frac{\epsilon}{2}}{n+1} = \frac{(n - N_1 + 1)\frac{\epsilon}{2}}{n+1} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

donc on a

$$\forall n \geq N, |v_n - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

et ce pour tout $\epsilon > 0$ donc la suite v_n tend vers l

- cas où $l = +\infty$

  Soit $A > 0$ et $\epsilon \in]0; 1[$

  Soit $A_1 = \frac{A+\epsilon}{1-\epsilon}$

  Soit $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, u_n > A_1$ (licite car u_n tend vers $+\infty$.)
  Soit $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, |\frac{\sum_{k=0}^{N_1-1} u_k}{n+1}| < \epsilon$$

  (licite car le numérateur est fixe et le dénominateur tend vers $+\infty$ donc le tout tend vers 0.)

Soit $N_3 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_3, \frac{n - N_1 + 1}{n+1} > 1 - \epsilon$$

(licite car le quotient tend vers 1 avec n)

Soit $N = \max(N_1, N_2, N_3)$, pour $n \geq N$ les trois inégalités précédentes sont valables, on a alors :

$$v_n = \frac{\sum_{k=0}^{N_1-1} u_k}{n+1} + \frac{\sum_{k=N_1}^{n} u_k}{n+1}$$

d'où

$$v_n \geq -\epsilon + \frac{\sum_{k=N_1}^{n} A_1}{n+1}$$

Ainsi

$$v_n \geq -\epsilon + \frac{(n - N_1 + 1)A_1}{n+1}$$

d'où

$$v_n \geq -\epsilon + (1-\epsilon)A_1 = A$$

et ce pour tout $A > 0$ donc la suite v_n tend vers $+\infty$

– Réciproque fausse en général :

  On considère $u_n = (-1)^n$.
  On montre alors par récurrence que $v_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ et $v_{2n+1} = 0$ donc v_n tend vers zéro mais u_n ne converge pas.

– Réciproque vraie si (u_n) monotone :
  En effet quand u_n est monotone elle admet toujours une limite $l \in \mathbf{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ donc en utilisant le sens direct on a que v_n tend vers le même l (or la limite de v est unique) donc $\lim u_n = \lim v_n$ ce qui établit la réciproque.

2. Définissons la suite (u'_k) par $u'_0 = 0$, $u'_1 = u_1$ puis
   $u'_2 = u_2$, $u'_3 = u_2$
   $u'_3 = u_3$, $u'_4 = u_3$, $u'_5 = u_3$

   et ainsi de suite avec à chaque fois une répétition de taille k du term u_k.

   Posons alors $v'_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} u'_k}{n+1}$ et $N = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
   On a par construction :

$$v'_N = v'_{\frac{n(n+1)}{2}} = v'_{\sum_{k=0}^{n} k} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=0}^{n} k u_k = \frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} w_n$$

or u_n tend vers l donc u'_n également (par construction) donc d'après la question précédente v'_n tend aussi vers l et comme N tend vers $+\infty$ avec n on a v'_N qui tend vers l également donc

$$w_n = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} v'_N = \frac{n+1}{2n} v'_N \sim \frac{v'_N}{2}$$

et w_n tend vers $\frac{l}{2}$

Exercice 6

Montrons que la suite u_n est décroissante. On calcule $u_{n+1} - u_n$ et l'on trouve

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\, dx \\ &\leq f(n+1) - f(n+1) = 0, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que sur $[n, n+1]$, $f(x)$ est toujours supérieure à $f(n+1)$ car f est décroissante.

Montrons maintenant que la suite u_n est minorée. On peut écrire

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\, dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n) - \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq 0, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que sur $[k, k+1]$, $f(x)$ est toujours inférieure à $f(k)$ car f est décroissante. On a aussi utilisé le fait que $f(x) \geq 0$ pour tout x, donc en particulier $f(n) \geq 0$.

La suite étant décroissante et minorée, on conclut qu'elle converge.

Appliquons ce résultat à la fonction $f(x) = \frac{1}{x}\cdot$ Cette fonction est positive et décroissante sur $]1, \infty[$ et le résultat précédent indique directement que la suite

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\, dx \quad \text{converge.}$$

Le calcul de l'intégrale permet de conclure qu'il existe un réel C tel que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) = C.$$

Exercice 7
Commençons par écrire la majoration suivante :

$$\int_1^{n+1} g(x)\,dx = \sum_1^n \int_k^{k+1} g(x)\,dx \leq \sum_1^n g(k),$$

car g est décroissante.
Inversement on a

$$\begin{aligned}\int_1^{n+1} g(x)\,dx &= \sum_2^n \int_{k-1}^{k} g(x)\,dx \\ &\geq \sum_2^n g(k) = \sum_1^n g(k) - g(1)\end{aligned}$$

d'où le résultat souhaité.
On applique ce résultat dans le cas où $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot$ Comme

$$\int_1^n g(x)\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{n}-1),$$

on trouve directement que la suite

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

tend vers 2 quand n tend vers l'infini.

Exercice 11 Etudier la nature de la série $V = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

1. $v_n = \frac{1}{n\log n}$: la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\log x}$ est positive et décroissante sur $[2, \infty[$. Par suite (cf exercice 7), la série a même nature que l'intégrale $\int_2^\infty \frac{dx}{x\log x}$. Cette intégrale diverge car on a $\frac{1}{x\log x} = (\log\log x)'$, d'où, pour $a > 2$, $\int_2^a \frac{dx}{x\log x} = (\log\log a) - (\log\log 2)$ et cette expression tend vers l'infini lorsque a tend vers l'infini.
2. $v_n = \frac{1+\log n}{n^2}$: la série est la somme de deux séries convergentes car la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge et on a (croissances comparées) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$ d'où, $\log n \leq \sqrt{n}$ pour tout n assez grand et l'on a donc $\frac{\log n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, pour tout n assez grand. On sait que cette dernière série est convergente.
3. $v_n = \frac{2^n+5}{3^n-11}$: cette série est à termes positifs et l'on a $v_n \sim w_n$ où $w_n = \frac{2^n}{3^n}$. La série de terme général w_n converge puisqu'on a $\frac{2}{3} < 1$ et il en est de même de la série de terme général v_n

4. $v_n = \frac{n+\log n}{n^2+1}$; cette série est la somme de la série de terme général $\frac{n}{n^2+1}$ qui est divergente (le terme général est positif, équivalent à $\frac{1}{n}$ et la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge) et de la série de terme général $\frac{\log n}{n^2+1}$ qui converge (comme dans l'exemple 2). Il en résulte que l'on a une série divergente.
5. $v_n = n^{\log a}$: cette série est de la forme n^α et elle convergente si et seulement si $\alpha = \log a < -1$ c'est-à-dire si et seulement si $a < \mathrm{e}^{-1}$.
6. $v_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$: c'est une série convergente car, pour tout n assez grand, on a $v_n \leq \frac{1}{n^2}$. En effet $\log(\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}n^2) = -\sqrt{n} + 2\log n$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini (croissances comparées). On a donc $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}n^2 = 0$, d'où le résultat.
7. $v_n = n^2 \sin\frac{1}{2^n}$: cette série est absolument convergente ; en effet on a d'abord, pour tout $u \in \mathbf{R}, |\sin u| \leq |u|$ (représenter sur le même dessin les graphes de la fonction sinus et des fonctions $x \mapsto x, x \mapsto -x$ ou étudier, dans $\mathbf{R}_+$, les variations de $u \mapsto u - \sin u$). On en déduit $|v_n| \leq \frac{n^2}{2^n}$ puis on montre que $\frac{n^2}{2^n} \leq (\frac{2}{3})^n$, par exemple, pour tout n assez grand. Pour cela, on calcule $\log(\frac{n^2}{2^n} : (\frac{2}{3})^n) = \log n^2(\frac{3}{4})^n = 2\log n + n\log\frac{3}{4}$, qui tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini (croissances comparées). Enfin on sait que la série de terme général $(\frac{2}{3})^n$ converge.
8. $v_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$: pour $n \geq 3$, on a $v_n \leq (\frac{5}{6})^n$. La série considérée est donc convergente.
9. $v_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$: le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$ tend vers $\frac{1}{27}$. Par le critère de D'Alembert, la série est donc convergente.
10. $v_n = (\frac{3n}{4n-1})^n$: on a $\lim v_n^{\frac{1}{n}} = (\frac{3}{4})^2 < 1$. Par le critère de Cauchy, on conclut que la série est convergente.

12 $v_n = \frac{1+\ldots+(n-1)!}{n!}$: on a $v_n \geq \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. La série est donc divergente.

14 $v_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}\log\cos\frac{1}{n}$: la formule de Taylor entraîne qu'il existe une fonction ϵ tendant vers 0 en 0, telle que l'on ait
$v_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}\log(1 - \frac{1}{2n^2}(1 + \epsilon(\frac{1}{n})) \sim -\frac{1}{2(n+1)^{\alpha+2}}$.
Le développement limité montre que $v_n < 0$ pour tout n assez grand. La série de terme général v_n est de même nature que la série de terme général $\frac{1}{2(n+1)^{\alpha+2}}$. Elle est donc convergente si et seulement si $\alpha + 2 > 1$ soit $\alpha > -1$.

15 $v_n = n^{n^{-k}} - 1$: pour $k < 0$, on a n^{-k} tend vers l'infini et v_n tend vers l'infini, quand n tend vers l'infini ; pour $k = 0$ on a $n^{-k} = 1$ et $v_n = n - 1$. La série de terme général v_n est donc divergente si $k \leq 0$.
Supposons $k > 0$. On a n^{-k} tend vers 0, quand n tend vers l'infini. On écrit $v_n = n^{n^{-k}} - 1 = \mathrm{e}^{n^{-k}\log n} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-k\log n}\log n} - 1$. On sait que $\mathrm{e}^u - 1 \sim u$, quand $u \to 0$. On en déduit $v_n \sim n^{-k}\log n$, quand n tend vers l'infini. La série considérée étant à termes positifs, elle a même nature que la série de terme général $n^{-k}\log n$ et celle-ci est convergente si et seulement si $k > 1$. (Cela sera montré dans un autre exercice sur les séries de Bertrand).

18 $v_n = n!(\frac{x}{n})^n$: on se limitera au cas $x \neq \mathrm{e}$, le cas $x = \mathrm{e}$ est difficile.
Le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n} = (n+1)(\frac{x}{n+1})^{n+1} : (\frac{x}{n})^n = x(\frac{n}{n+1})^n$ tend vers $\frac{x}{\mathrm{e}}$, quand n tend vers l'infini. En effet on a
$\lim_{n\to\infty} \log(\frac{n+1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} n \log(1+\frac{1}{n}) = 1$, en utilisant $\log(1+u) \sim u$ quand $u \to 0$.
Le critère de d'Alembert montre alors que la série considérée est convergente si $\frac{x}{\mathrm{e}} < 1$ c'est-à-dire si $x < \mathrm{e}$ et divergente si $\frac{x}{\mathrm{e}} > 1$ c'est-à-dire si $x > \mathrm{e}$.

19 $v_n = 1 - \cos(\frac{1}{n})$: au moyen de la formule de Taylor à l'ordre 2 en 0, on trouve qu'il existe $\theta_n \in]0,1[$ tel que $v_n = \frac{1}{2n^2}\cos(\frac{\theta_n}{n})$, d'où $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, la série de terme général v_n est convergente.

21 $v_n = (n^6+3)^a - (n^2+2)^{3a} = n^{6a}[(1+\frac{3}{n^6})^a - (1+\frac{2}{n^2})^{3a}]$: on rappelle le développement limité $(1+u)^a = 1 + au + \frac{a(a-1)}{2}u^2(1+\epsilon(u))$ où $\epsilon(u)$ tend vers 0 quand u tend vers 0. On en déduit $v_n = n^{6a}[1 + \dfrac{3a}{n^6} + \dfrac{9a(a-1)}{2n^{12}} - 1 - \dfrac{6a}{n^2} - \dfrac{6a(3a-1)}{n^4}] + \dfrac{1}{n^{12-6a}}\epsilon_1(\dfrac{1}{n}) + \dfrac{1}{n^{4-6a}}\epsilon_2(\dfrac{1}{n})$, où $\epsilon_1(\frac{1}{n})$, $\epsilon_2(\frac{1}{n})$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini. On en déduit que v_n est équivalent à $-\frac{6a}{n^{2-6a}}$, de signe constant, pour n assez grand, et que la série de terme général v_n est convergente si et seulement si $2 - 6a > 1$ c'est-à-dire $a < \frac{1}{6}$. On aurait d'ailleurs pu obtenir cette conclusion en utilisant seulement le développement limité à l'ordre 1.

22 $v_n = n^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$: on va montrer que l'on a $v_n \leq \frac{1}{n^2}$, pour tout n assez grand, ce qui entraînera la convergence de la série de terme général v_n. Pour cela, on calcule $\log n^2 v_n = -\sqrt{n} + 4\log n$ et on conclut, avec un résultat de croissances comparées, que $\log n^2 v_n$ tend vers $-\infty$, quand n tend vers l'infini ; il s'en suit que $n^2 v_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Cela prouve que $n^2 v_n \leq 1$ pour tout n assez grand.

Exercice 12

1. $u_n = \frac{1}{n^\alpha} = e^{-\alpha \ln n}$ et $\ln n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

   – Pour $\alpha > 0$, $-\alpha \ln n \to -\infty$, donc $u_n = e^{-\alpha \ln n} \to 0$ et donc u_n converge.
   – Pour $\alpha = 0$, $u_n = 1$, la suite est constante donc converge.
   – Pour $\alpha < 0$, $-\alpha \ln n \to \infty$, donc $u_n = e^{-\alpha \ln n} \to \infty$ et u_n diverge.

   En résumé, u_n converge si et seulement si $\alpha \geq 0$.

2. $v_n = u_n - u_{n+1}$. On en déduit par récurrence que $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = u_1 - u_{n+1}$.
   Ainsi, la série $\sum v_n$ converge si et seulement si u_n converge, à savoir si $\alpha \geq 0$ d'après la première question.
   Si $\alpha = 0$, $\sum_{i=1}^n v_i = u_1 - u_{n+1} \to u_1 - 1 = 0$. Si $\alpha > 0$, $\sum_{i=1}^n v_i = u_1 - u_{n+1} \to u_1 = 1$.

3. $w_n = v_n - v_{n+1}$, donc, comme pour la deuxième question, on en déduit que $\sum_{i=1}^n w_i = v_1 - v_{n+1}$ et donc la série de terme général w_n converge si et seulement si la suite v_n converge.
Mais

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n^\alpha}(1 - \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}) \\ &= \frac{1}{n^\alpha}(1-(1+\frac{1}{n})^{-\alpha}) \\ &= \frac{1}{n^\alpha}(1-(1-\frac{\alpha}{n}+O(\frac{1}{n^2})) \\ &= \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} + O(\frac{1}{n^{\alpha+2}}). \end{aligned}$$

Grâce à la question 1., on connaît le comportement de la suite $(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$, qui converge si et seulement si $\alpha \geq -1$.
Donc la suite (v_n) converge si et seulement si $\alpha \geq -1$.
Donc $\sum w_n$ converge si et seulement si $\alpha \geq -1$.
Si $\alpha = -1$, $v_n = -1$ donc $\sum_{i=1}^n w_i = v_1 - v_{n+1} = 0 \to 0$.
Si $\alpha > -1$, $v_n \to 0$ donc $\sum_{i=1}^n w_i = v_1 - v_{n+1} \to v_1 = 1 - \frac{1}{2^\alpha}$.

Exercice 15

1. La série de terme u_n converge donc la suite S_n converge vers un réel $l > 0$ (car les u_n sont strictement positifs) donc $v_n > 0$ et $v_n \sim \frac{u_n}{l}$ or ces deux termes sont strictement positifs et équivalents donc leurs séries associées sont de même nature et comme la série des u_n converge il en est de même pour $\frac{u_n}{l}$ et donc la série de terme générique v_n converge.
2. On remarque que

$$v_k = \frac{u_k}{S_k} = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k} = 1 - \frac{S_{k-1}}{S_k}$$

donc $1 - v_k = \frac{S_{k-1}}{S_k}$ et $\prod_{k=1}^n (1-v_k) = \prod_{k=1}^n \frac{S_{k-1}}{S_k}$ est un produit téléscopique i.e les termes se simplifient deux à deux :

$$\prod_{k=1}^n (1-v_k) = \frac{S_0}{S_1}\frac{S_1}{S_2}...\frac{S_{n-2}}{S_{n-1}}\frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{S_0}{S_n} = \frac{u_0}{S_n}$$

ce qui établit le résultat.
3. (a) étudions la série de terme générique $w_n = -ln(1-v_n)$
On a $w_n > 0$ pour tout n et $\lim v_n = 0$ car la série de t.g. v_n converge.

On peut donc utiliser un développement limité de ln en 1 pour obtenir

$$w_n = -(-v_n + o(v_n)) = v_n + o(v_n)$$

ainsi $w_n \sim v_n$ et les suites sont strictement positives donc les séries sont de même nature, ainsi la série de t.g. w_n converge et il en est de même

pour la série de t.g. $ln(1-v_n)$, de plus le t.g. étant strictement négatif la somme est strictement négative (et finie).
(b) On a d'après la question 2 :

$$S_n = \frac{u_0}{\prod_{k=1}^{n}(1-v_k)} = \frac{u_0}{exp(ln(\prod_{k=1}^{n}(1-v_k)))} = \frac{u_0}{exp(\sum_{k=1}^{n} ln(1-v_k))}$$

or $\sum_{k=1}^{n} ln(1-v_k)$ tend vers l avec $-\infty < l < 0$ (d'après (a)), donc $exp(\sum_{k=1}^{n} ln(1-v_k))$ tend vers l' avec $0 < l' < 1$ (car exp est continue) et finalement S_n tend vers $\frac{u_0}{l'}$ qui est fini.

Ainsi la série de t.g. u_n converge également.

Exercice 16
$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n} = (\frac{a}{b})^n \frac{2^{\sqrt{n}}}{1+2^{\sqrt{n}}/b^n}$.

- Si $b > 1$, $\frac{2^{\sqrt{n}}}{b^n} = e^{\sqrt{n}\ln 2 - n\ln b} \to 0$ car $\sqrt{n}\ln 2 - n\ln b \to -\infty$.
  Donc $1 + 2^{\sqrt{n}}/b^n \to 1$ donc $u_n \sim (\frac{a}{b})^n 2^{\sqrt{n}} = e^{n\ln(a/b)+\sqrt{n}\ln 2}$. Nous noterons $v_n = e^{n\ln(a/b)+\sqrt{n}\ln 2}$. Comme $u_n \sim v_n$ et $u_n > 0$, la série de terme général u_n converge si et seulement si celle de terme général v_n converge.

  - Si $a \geq b$, $\ln(a/b) \geq 0$ donc $v_n \geq e^{\sqrt{n}\ln 2} \to \infty$, donc, a fortiori, la série de terme général v_n diverge (donc $\sum u_n$ diverge aussi).

  - Si $a < b$, $\ln(a/b) < 0$, et si l'on considère c tel que $\ln(a/b) < c < 0$ (par exemple $c = \frac{1}{2}\ln(a/b)$),
    $n(\ln(a/b) - c) + \sqrt{n}\ln 2 \to -\infty$, donc $n\ln(a/b) + \sqrt{n}\ln 2 \leq cn$ pour n assez grand.
    Donc pour n assez grand, $v_n \leq e^{cn}$ et $\sum e^{cn}$ converge car $c < 0$. Donc $\sum v_n$ converge, et donc $\sum u_n$ aussi.
- Si $b \leq 1$, $0 < b^n \leq 1$, et donc $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim 2^{\sqrt{n}}$. Donc $u_n \sim a^n$.
  Or $\sum a^n$ converge si et seulement si $a < 1$ (car $a > 0$), donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $a < 1$.

En résumé, la série converge si et seulement si ($b > 1$ et $a < b$) ou ($b \leq 1$ et $a < 1$).

Exercice supplémentaire (Séries de Bertrand)
Etudier selon les valeurs de α et β, la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$

1. Si $\alpha > 1$, soit $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.
   On a, pour tout $n \geq 2$, $n^\gamma u_n = n^\gamma n^{-\alpha} \ln^{-\beta} n = n^{\frac{1-\alpha}{2}} \ln^{-\beta} n$

Or, $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1-\alpha}{2}} \ln^{-\beta} n = 0$ (car $\frac{1-\alpha}{2} < 0$).
Donc, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq N\ n^{\gamma} u_n < \varepsilon$
Soit, pour $\varepsilon = 1$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq \frac{1}{n^{\gamma}}$
Comme $\gamma > 1$, on a que la série de terme général $\frac{1}{n^{\gamma}}$ converge et par critère de comparaison des séries, la série de terme général u_n converge si $\alpha > 1$.

2. Si $\alpha < 1$.
On a, pour tout $n \geq 2$, $nu_n = n^{1-\alpha} \ln^{-\beta} n$.
Or, $\lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha} \ln^{-\beta} n = +\infty$.
Donc, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $nu_n \geq 1$.
Soit, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq \frac{1}{n}$
Comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, on a que pour $\alpha < 1$ la série de terme général u_n diverge.

3. Si $\alpha = 1$.
La fonction $f_\beta : t \mapsto \frac{1}{t \ln^{\beta} t}$ est décroissante sur $\left]e^{-\beta}, +\infty\right[$.
Soit $n_0 = \max(3, E(e^{-\beta}) + 2)$. (où E est la fonction qui à un réel associe sa partie entière, par exemple 3 pour π)
Alors, comme f_β est décroissante sur $[n_0 - 1, +\infty[$, on a, pour tout $n \geq n_0$:

$$\int_{n}^{n+1} \frac{1}{t \ln^{\beta} t} dt \leq \frac{1}{n \ln^{\beta} n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t \ln^{\beta} t} dt$$

Et par sommation de n_0 à N :

$$\int_{n_0}^{N+1} \frac{1}{t \ln^{\beta} t} dt \leq \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n \ln^{\beta} n} \leq \int_{n_0-1}^{N} \frac{1}{t \ln^{\beta} t} dt$$

Finalement, en effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$ dans les intégrales, on obtient :

$$\int_{\ln(n_0)}^{\ln(N+1)} \frac{1}{u^{\beta}} du \leq \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n \ln^{\beta} n} \leq \int_{\ln(n_0-1)}^{\ln(N)} \frac{1}{u^{\beta}} du$$

- Si $\beta \leq 1$, alors, pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n \ln^{\beta} n} \geq \frac{1}{n \ln n}$. Et d'après ce qui précède (appliqué dans le cas $\beta = 1$) , on a que :

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(n_0)) \leq \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n \ln n} \leq \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(n_0 - 1)$$

  Or, $\lim_{N\to\infty} \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(n_0)) = +\infty$ donc, la série diverge quand $\beta = 1$. Et comme on a $\frac{1}{n \ln^{\beta} n} \geq \frac{1}{n \ln n}$, la série diverge pour tout $\beta \leq 1$.
- Si $\beta > 1$, on obtient :

$$\sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n \ln^{\beta} n} \leq \left[\frac{1}{(1-\beta) u^{\beta-1}}\right]_{\ln(n_0-1)}^{\ln(N)}$$

Soit :

$$\sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n \ln^\beta n} \leq \frac{1}{\beta - 1} \left(\frac{1}{\ln(n_0 - 1)^{\beta - 1}} - \frac{1}{\ln(N)^{\beta - 1}} \right)$$

Or, comme $\beta > 1$, $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{\ln(N)^{\beta-1}} = 0$ et donc les sommes partielles sont majorées et la série de Bertrand converge.

Finalement, on a le résultat suivant : La série de Bertrnad converge si et seulement si $\alpha > 1$, ou, $\alpha = 1$ et $\beta > 1$