Existence et unicité de solutions pour le système de Navier-Stokes axisymétrique

par

Isabelle GALLAGHER *
Slim IBRAHIM **
Mohamed MAJDOUB **

Résumé. Nous étudions les équations de Navier-Stokes posées dans un domaine de $\mathbb{R}^3$ invariant par rotation autour de l'axe vertical, ou dans l'espace $\mathbb{R}^3$ entier ; nous cherchons des solutions invariantes par cette rotation, sous des conditions sur la donnée initiale proches des hypothèses naturelles en deux dimensions d'espace.

Abstract. We study the Navier-Stokes equations, written in a domain of $\mathbb{R}^3$ which is invariant under rotation around the vertical axis, or in the whole space $\mathbb{R}^3$; the solutions seeked are also invariant by that rotation, and we look for conditions on the initial data which are close to the natural assumptions in the case of two space dimensions.

Mots clés. Equations de Navier-Stokes, axisymétrie, espaces à poids.

Classification AMS. 35 Q 30, 42 B 25.

1. Introduction

Nous nous intéressons dans cet article aux équations de Navier-Stokes

$$
\text{(NS)} \qquad \begin{cases} \partial_t v - \nu \Delta v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \;\text{ dans }\; \mathbb{R}_t^+ \times \Omega \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v|_{t=0} = v_0 \;\text{ avec }\; \operatorname{div} v_0 = 0, \end{cases}
$$

où $\nu > 0$ représente la viscosité, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et où le champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ et la fonction $p : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ représentent respectivement la vitesse et la pression du fluide, inconnues du système. La seconde équation dans (NS) signifie que le fluide considéré est incompressible. Dans le cas où Ω est un domaine à bord, il convient de rajouter à (NS) des conditions aux limites de Dirichlet, homogènes.

*Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France
**Faculté des Sciences de Bizerte, Département de Mathématiques, Zarzouna 7021, Bizerte, Tunisie

Dans la suite, nous dirons que (v,p) est solution de (NS) s'il vérifie le système au sens des distributions.

Avant de présenter le cadre que nous cherchons à étudier dans cet article (axisymétrique), commençons par rappeler quelques résultats concernant le système de Navier-Stokes (NS). La théorie mathématique de ce système a débuté avec les travaux fondamentaux de J. Leray (voir [L1] et [L2]) : le théorème suivant montre ainsi que dès que la donnée initiale est un élément de l'espace (dit "d'énergie") $L^2(\Omega)$, alors il existe (au moins) une solution globale en temps de (NS), dite solution "à la Leray".

Théorème 1 [Leray, 1933]. *Soit $v_0 \in L^2(\Omega)$ un champ de vecteurs de divergence nulle. Alors il existe une solution $v \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1_0(\Omega))$ de (NS), de donnée initiale v_0. Cette solution vérifie de plus l'inégalité d'énergie :*

$$\forall t \geq 0,\ \ ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\nu \int_0^t ||\nabla v(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds \leq ||v_0||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Dans le cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, alors v est unique, vérifie en outre que $v \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$, et l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Remarque. Ici comme dans tout cet article, l'espace $\dot{H}^1_0$ désigne la fermeture de C_0^∞ pour $||\cdot||_{\dot{H}^1_0}$, avec $||u||_{\dot{H}^1_0} = ||\nabla u||_{L^2}$.

Dès lors se pose la question de l'unicité de telles solutions tridimensionnelles. De nombreux travaux existent sur la question, à commencer par l'important travail de H. Fujita et T. Kato (voir [FK]); la méthode dite "de Kato", dont nous reparlerons dans ce travail, a été plus récemment étudiée précisément, notamment par M. Cannone et F. Planchon (voir [Pl], ainsi que le livre [Ca]). De nombreux travaux ont suivi celui de [FK], montrant l'unicité des solutions de (NS) dans des cadres divers. Ainsi, J.-Y. Chemin par exemple a montré (voir [C2]) l'unicité de solutions d'énergie finie telles que $v \in C^0([0,T], C^{-1}(\mathbb{R}^3))$, alors que G. Furioli, P.-G. Lemarié et E. Terraneo (voir [FLT]) ont obtenu l'unicité des solutions continues en temps, à valeurs dans $L^3(\mathbb{R}^3)$. Notons que sous l'hypothèse supplémentaire d'énergie finie, W. von Wahl [W] a démontré par des méthodes élémentaires l'unicité dans $L^\infty([0,T], L^3(\mathbb{R}^3))$.

Le point fondamental dans ces travaux est que l'on cherche à résoudre le système (NS) dans des espaces invariants par le changement d'échelle du système : si v est solution de (NS), alors

$$v_\lambda(t,x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda v(\lambda^2 t, \lambda x)$$

est aussi solution, avec donnée $v_\lambda|_{t=0}(x) = \lambda v|_{t=0}(\lambda x)$.

Notons d'autre part que dans ces résultats, il n'est question que de l'obtention du champ de vitesse v : la pression p peut être éliminée du système (NS) par projection sur les champs de divergence nulle.

Nous n'entrerons pas plus dans les détails de ces résultats ici ; énonçons simplement le théorème d'unicité de H. Fujita et T. Kato cité ci-dessus, et auquel nous ferons référence par la suite. Nous renvoyons, pour plus de précisions, aux livres [CF], [Ca] et [Li2], ainsi qu'aux articles cités ci-dessus.

Théorème 2 [Fujita-Kato, 1964]**.** *Soit $v_0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ un champ de vecteurs de divergence nulle. Alors il existe un unique temps T^* maximal et une unique solution v à (NS), telle que*

$$v \in C^0([0,T^*[\ ,\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)) \ \ et \ \ t^{1/4}\nabla v \in C^0([0,T^*[\ ,L^2(\mathbb{R}^3)).$$

En outre, il existe une constante $c>0$ telle que si $||v_0||_{\dot{H}^{1/2}} \le c\nu$, alors $T^* = +\infty$.

Remarque. L'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ désigne la complétion de $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ pour $||\cdot||_{\dot{H}^s}$, avec $||u||_{\dot{H}^s} = ||\,|\xi|^s\,\hat{u}(\xi)||_{L^2}$, où $\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier de u.

Dans ce travail, nous souhaitons étudier le cas où le domaine Ω est axisymétrique.

Définition 1. *Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est dit axisymétrique si pour toute rotation Γ autour de l'axe $\mathbb{R}(0,0,1)$, on a $\Gamma(\Omega) \subset \Omega$.*

Un domaine axisymétrique étant comparable à un domaine bidimensionnel, sauf près de l'axe de rotation, l'objectif de cette étude est d'obtenir des résultats comparables aux résultats bidimensionnels connus, en s'attendant à une discussion selon la position du domaine par rapport à l'axe de rotation. Cette approche est à comparer avec le travail effectué dans [Ga], où le premier auteur a montré l'unicité des solutions tridimensionnelles de (NS) pour une donnée bidimensionnelle dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, avec une condition supplémentaire de périodicité verticale. Avant d'énoncer les résultats, donnons quelques définitions et notations que nous utiliserons tout au long de cet article.

Le domaine Ω sera supposé lipschitzien de $\mathbb{R}^3$ ou bien l'espace $\mathbb{R}^3$ entier, et nous désignerons par $\mathcal{V}$, V et H les espaces suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\Omega) &\stackrel{\text{déf}}{=} \{v \in C_0^\infty(\Omega) |\, \operatorname{div} v = 0\},\\
V(\Omega) &\stackrel{\text{déf}}{=} \text{ fermeture de } \mathcal{V} \text{ dans } \dot{H}_0^1(\Omega),\\
H(\Omega) &\stackrel{\text{déf}}{=} \text{ fermeture de } \mathcal{V} \text{ dans } L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

L'espace H est muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ induit par $L^2(\Omega)$, et l'espace V est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$((u|v)) = \sum_{j=1}^{3} (\partial_j u | \partial_j v).$$

Enfin le projecteur orthogonal L^2 de Leray P sur les champs de vecteurs de divergence nulle est défini par

$$P : L^2(\Omega) = H \oplus H^\perp \longrightarrow H.$$

Définition 2. *On notera par $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ les coordonnées cylindriques dans $\mathbb{R}^3$, où r et θ sont définis classiquement par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \;\; x = r \cos\theta \;\; et \;\; y = r \sin\theta.$$

Une fonction scalaire définie sur un ouvert axisymétrique est alors dite axisymétrique si elle ne dépend pas de la variable angulaire θ, et un champ de vecteurs est dit axisymétrique si chacune de ses composantes l'est.

Dans la suite, pour toute fonction v axisymétrique, nous noterons par abus

$$v(x, y, z) = v(r, z).$$

L'objet de cet article est d'étudier le système de Navier-Stokes axisymétrique

$$(\mathrm{NS_{ax}}) \qquad \begin{cases} \partial_t v - \nu \Delta v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \;\text{ sur }\; \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v|_{\mathbb{R}^+ \times \partial\Omega} = 0 \;\text{ si }\; \partial\Omega \neq \emptyset, \\ v|_{t=0} = v_0 \;\text{ avec }\; \operatorname{div} v_0 = 0, \\ \Omega, \;\; v_0, \;\; v \;\text{ et }\; p \;\text{ axisymétriques.} \end{cases}$$

Il est à noter que l'on ne dispose pas de résultat d'unicité pour les solutions de (NS) si $v_0 \in H(\Omega)$; il n'est donc pas certain que toute solution v du système (NS), associée à v_0, soit axisymétrique. Néanmoins, il est facile d'obtenir l'existence d'une solution $v \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V(\Omega))$ au système $(\mathrm{NS_{ax}})$, vérifiant l'inégalité d'énergie

$$(1) \qquad \forall t \geq 0, \;\; ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\nu \int_0^t ||\nabla v(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds \leq ||v_0||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Une technique de démonstration de ce résultat consiste à suivre un procédé de Galerkin (voir [Li1] pour une présentation de cette méthode), en choisissant une base d'approximation formée de vecteurs axisymétriques. La méthode classique permet ainsi d'exhiber une solution approchée (voir par exemple [CF]), axisymétrique car la structure du système ($\mathrm{NS_{ax}}$) ne détruit pas le caractère axisymétrique des fonctions. Le passage à la limite faible se fait alors exactement comme dans le cas classique (nous n'entrerons pas plus dans les détails ici, et renvoyons à [CF] pour les estimations conduisant au résultat).

Notre objectif va être de déterminer sous quelles conditions cette solution est unique : ces conditions portent aussi bien sur le domaine (plus particulièrement sa position par rapport à l'axe de rotation) que sur la régularité de la donnée initiale.

Théorème 3. *Supposons que le domaine axisymétrique Ω ne rencontre pas l'axe de rotation : on suppose que*

$$r_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{(x,y,z)\in\Omega} \sqrt{x^2+y^2} > 0.$$

Alors si $v_0 \in H(\Omega)$ est axisymétrique, il existe une unique solution v à ($\mathrm{NS_{ax}}$), vérifiant (1).

Remarque. Dans le cas où le domaine ne rencontre pas l'axe de rotation, on a donc le même résultat d'unicité qu'en deux dimensions d'espace.

La technique de démonstration de ce théorème (suivant W. von Wahl [W]), nous permettra d'obtenir directement le théorème de stabilité suivant. On a noté $\overline{v}_0$ la moyenne angulaire de v_0, champ de vecteurs axisymétrique défini par

$$\overline{v}_0(r,z) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v_0(r,\theta,z)\,d\theta.$$

Théorème 4. *Sous les hypothèses du théorème 3, soit $v_0 \in H(\Omega)$, de moyenne angulaire $\overline{v}_0$. Alors on a $\overline{v}_0 \in H(\Omega)$, et soient v et $\overline{v}$ des solutions "à la Leray" respectivement de (NS) et (NS_{ax}) associées à v_0 et $\overline{v}_0$.*

Alors en posant $w \stackrel{\text{déf}}{=} v - \overline{v}$, on a, pour tout temps $t \geq 0$,

$$||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \nu \int_0^t ||\nabla w(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds \leq ||w_0||^2_{L^2(\Omega)} \exp\Big(\frac{C}{\nu^4 r_0^2}\,||\overline{v}_0||^4_{L^2(\Omega)}\Big),$$

où $w_0 \stackrel{\text{déf}}{=} v_0 - \overline{v}_0$. En particulier, il y a unicité de la solution "à la Leray" de (NS) *associée à une donnée v_0 axisymétrique, et c'est la solution de* (NS_{ax}).

Dans le cas où le domaine rencontre l'axe de rotation, le résultat suivant indique qu'on a unicité de la solution sous une hypothèse de platitude du domaine près de l'axe. Ce résultat est à rapprocher des théorèmes d'injections de Sobolev démontrés par N. ACHTAICH (voir [Ac]), de plus en plus proches des injections bidimensionnelles quand le domaine devient plus plat.

Théorème 5. *Supposons que le domaine axisymétrique* Ω *soit tel que*

$$\Omega \subset \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ si\ \ r < R_0, \ \ alors \ \ -C r^\alpha < z < C r^\alpha\big\},$$

où $R_0 > 0$, $\alpha > 4$ *et* $C > 0$ *sont des réels quelconques.*

Soit alors $v_0 \in H(\Omega)$, *axisymétrique; soient* v_1 *et* v_2 *deux solutions de* $(\mathrm{NS_{ax}})$ *vérifiant (1), telles qu'en outre*

$$v_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^{2+\varepsilon}(\Omega)),$$

avec $\varepsilon > \frac{12}{\alpha-4}$. *Alors* $v_1 = v_2$.

Comme dans le cas où Ω ne rencontre pas l'axe de rotation, la méthode de démonstration du théorème 5 va nous permettre d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 6. *Sous les hypothèses du théorème 5, soit* $\overline{v}_0 \in H(\Omega)$ *un champ de vecteurs axisymétrique, et supposons qu'il existe* $\overline{v}$, *solution "à la Leray" de* (NS_{ax}) *associée à* $\overline{v}_0$, *telle qu'en outre*

$$\overline{v} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^{2+\varepsilon}(\Omega)),$$

avec ε *défini comme au théorème 5. Alors si* v *est solution "à la Leray" de* (NS) *associée à* $\overline{v}_0$, v *est unique et* $v = \overline{v}$.

Dans la dernière section enfin, nous considérons le cas où $\Omega = \mathbb{R}^3$, et nous allons construire une solution unique à $(\mathrm{NS_{ax}})$ dans l'espace suivant :

$$L^2_0(\mathbb{R}^3) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \ \text{ axisymétrique } \ \Big| \int_{\mathbb{R}^3} |f(x,y,z)|^2 \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}} < +\infty \Big\}.$$

Notons que cet espace est équivalent à l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$, à distance strictement positive, finie de l'axe, avec une condition de platitude près de $r = 0$. D'autre part, il a l'invariance par changement d'échelle de l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, qui est bien adapté aux équations de Navier-Stokes tridimensionnelles (voir [FK], [Ca]). C'est donc un espace bien adapté aux solutions axisymétriques des équations de Navier-Stokes. Notons que ce type d'espace à poids a été très largement utilisé par C. BERNARDI, M. DAUGE et Y. MADAY (voir [BDM]) dans l'étude du problème de Stokes et de Navier-Stokes stationnaire, dans un cadre là-aussi axisymétrique.

Théorème 7. *Soit $v_0 \in L^2_0(\mathbb{R}^3)$, un champ de vecteurs axisymétrique et de divergence nulle. Il existe un unique temps $T^* > 0$ et une unique solution v de $(\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}})$ telle que pour tout temps $T \in]0, T^*[$,*

$$\begin{aligned} & v \in C^0([0,T], L^2_0(\mathbb{R}^3)), \quad t^{1/2}\nabla v \in C^0([0,T], L^2_0(\mathbb{R}^3)), \\ \textit{et} \quad & \lim_{t\to 0} t^{1/2}\nabla v = 0 \ \textit{ dans } \ L^2_0(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

En outre, il existe une constante $c > 0$ telle que si $||v_0||_{L^2_0(\mathbb{R}^3)} \leq c\nu$, alors $T^* = +\infty$.

La démonstration de ce théorème repose sur la méthode de Kato, ainsi que sur des résultats d'opérance dans des espaces à poids. Notons que dans [UY], M. UKHAVSKII et V. YUDOVITCH démontrent un résultat d'unicité pour $(\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}})$ dans la classe

$$\nabla v \in L^\infty([0,T], L^2),$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\, v &\in L^\infty([0,T], L^2 \cap L^\infty), \\ \frac{\mathrm{rot}\, v}{r} &\in L^\infty([0,T], L^2 \cap L^\infty). \end{aligned}$$

Ici l'on a abaissé sensiblement les conditions de régularité permettant d'obtenir cette unicité.

D'autre part, G. PONCE, R. RACKE, T. SIDERIS et E. TITI ont montré (voir [PRST]) un résultat de stabilité par $(\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}})$, dans le sens suivant : si $v_0 \in \mathcal{D}(-P\Delta) \cap H^4$ est axisymétrique, alors pour tout $u_0 \in V$ tel que $||u_0 - v_0||_{H^1} \leq \delta$, pour δ assez petit, on a une unique solution globale à $(\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}})$ avec donnée u_0.

Remarquons que dans ces deux cas ([UY] et [PRST]), il est supposé en outre que $v^\theta = 0$. Cette hypothèse n'est pas exigée ici.

Le plan de cet article est comme suit. Dans la section suivante (la section 2) nous introduisons des notations qui seront utiles dans la suite. Les sections 3 (resp. 4) sont dévolues aux démonstrations des théorèmes 3, 4, 5, 6 (resp. 7) présentés dans cette introduction.

Remarque. Au moment où nous achevons ce travail, nous apprenons que H. Koch et D. Tataru ont obtenu un théorème d'existence globale et d'unicité pour le système (NS), et des données initiales petites dans $BMO^{-1}(\mathbb{R}^3)$.

2. Notations

Dans la suite, nous serons amenés à utiliser des découpages dyadiques de $\mathbb{R}$ (l'axe des $r = \sqrt{x^2+y^2}$) ainsi que de l'espace des fréquences $\mathbb{R}^3$ (découpage de Littlewood-Paley).

Nous n'allons pas rentrer dans les détails de la théorie de Littlewood-Paley ici (nous renvoyons par exemple à [C1] pour une construction précise) ; considérons une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, paire, telle que

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \mathcal{C}_0, \;\text{ avec }\; \mathcal{C}_0 = \{s \in \mathbb{R} \mid \alpha_0 < s < \beta_0\},$$

où les constantes α_0 et β_0 sont choisies de manière à ce que

$$\begin{aligned} &\forall r \in \mathbb{R},\;\; \varphi(2^p r)\varphi(2^q r) = 0 \;\text{ si }\; |p-q| \geq 2 \\ &\forall r > 0,\;\; \sum_{p \in \mathbb{Z}} \varphi(2^p r) = 1. \end{aligned}$$

Les fonctions de troncature de l'axe réel sont alors définies par

$$\varphi_q(r) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(2^q r),$$

et ont un support inclus dans $\mathcal{C}_q \stackrel{\text{déf}}{=} 2^{-q}\mathcal{C}_0$.

Le découpage de Littlewood-Paley se définit quant à lui dans l'espace des fréquences : les opérateurs de troncature spectrale S_j et Δ_j sont définis par

$$\forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3),\;\; \mathcal{F}(\Delta_j u)(\xi) = \varphi(2^{-j}|\xi|)\mathcal{F}u(\xi),\;\; \forall j \geq 0,$$

$$\mathcal{F}(\Delta_{-1} u)(\xi) = \psi(|\xi|)\mathcal{F}u(\xi),$$

avec $\psi(r) = 1 - \sum\limits_{j \geq 0} \varphi(2^j r)$, et enfin

$$S_j u = S_0 u + \sum_{j \geq 0} \Delta_j u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j u,$$

avec $\Delta_j = 0$ pour $j < -1$, et $S_0 = \Delta_{-1}$. On a noté $\mathcal{F}u(\xi)$ pour la transformée de Fourier de u, avec $\xi \in \mathbb{R}^3$. Cette décomposition permet notamment de caractériser l'appartenance d'une fonction à un espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$: rappelons que

$$u \in H^s(\mathbb{R}^3) \Longleftrightarrow ||u||^2_{H^s(\mathbb{R}^3)} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

Alors on peut montrer (voir [C1]) que

$$u \in H^s(\mathbb{R}^3) \Longleftrightarrow \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2js} ||\Delta_j u||^2_{L^2} < +\infty,$$

et la norme $||u||_{H^s}$ est équivalente à $||2^{js}||\Delta_j u||_{L^2}||_{\ell^2(\mathbb{Z})}$. Les espaces de Sobolev homogènes présentés dans l'introduction peuvent s'écrire à partir d'un découpage dyadique homogène : on écrit

$$\dot{\Delta}_j = \Delta_j\,, \ \ \forall j \geq 1, \ \text{ et } \ \dot{\Delta}_j u = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j}|\cdot|)\mathcal{F}u), \ \ \forall j \leq 0.$$

Alors on a l'équivalence

$$u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3) \Longleftrightarrow \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2js}||\dot{\Delta}_j u||_{L^2}^2 < +\infty.$$

3. Etude selon la position du domaine par rapport à l'axe

3.1. Cas d'un domaine loin de l'axe

3.1.1. Démonstration du théorème 3

Nous nous plaçons ici dans le cas où

$$r_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{(x,y,z)\in\Omega} \sqrt{x^2+y^2} > 0.$$

L'unicité des solutions axisymétriques de $(\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}})$ repose sur le lemme suivant, correspondant à une inégalité de Ladyzhenskaya (voir [La]). Nous l'admettrons provisoirement.

Lemme 1. *Soit $u \in H \cap V(\Omega)$ un champ de vecteurs axisymétrique. Alors*

$$||u||_{L^4(\Omega)} \leq C r_0^{-1/4} ||u||_{L^2(\Omega)}^{1/2} ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

En outre, si a et b sont deux champs de vecteurs dans $H \cap V(\Omega)$, avec b axisymétrique, alors

$$||ab||_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{r_0} ||a||_{L^2(\Omega)}\, ||\nabla a||_{L^2(\Omega)}\, ||b||_{L^2(\Omega)}\, ||\nabla b||_{L^2(\Omega)}\,.$$

Remarque. Ici comme dans tout ce travail, C désigne une constante “universelle”, ne dépendant que de la dimension ou de quantités similaires.

Admettons ce lemme pour l'instant, et terminons la démonstration du théorème : soient v_1 et v_2 deux solutions de $(\mathrm{NS}_{\mathrm{ax}})$ vérifiant l'inégalité d'énergie (1), et posons $w \stackrel{\text{déf}}{=} v_2 - v_1$.

Nous alons suivre la méthode introduite par W. von Wahl dans [W], et utilisée dans [Ga] dans le cadre de données initiales bidimensionnelles : la fonction w est de divergence nulle et vérifie

$$w \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V(\Omega)).$$

En suivant [W], on peut écrire que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \nu \int_0^t ||\nabla w(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds \\
&= \frac{1}{2}\Big(||v_1(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_2(t)||^2_{L^2(\Omega)} - 2\big(v_1(t)|v_2(t)\big)_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&+ \nu \int_0^t \Big(||\nabla v_1(s)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v_2(s)||^2_{L^2(\Omega)} - 2\big(\nabla v_1(s)|\nabla v_2(s)\big)_{L^2(\Omega)}\Big)\,ds\,.
\end{aligned}$$

Le théorème 3 est alors une conséquence des deux lemmes suivants.

Lemme 2. *Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Alors l'application*

$$(a,b,c) \longmapsto \int_0^t \big(\operatorname{div}(a \otimes b)(s)|c(s)\big)_{L^2(\Omega)}\,ds$$

est trilinéaire continue de

$$\Big(L^\infty\big([0,t], H(\Omega)\big) \cap L^2\big([0,t], V(\Omega)\big)\Big)^2 \times \Big\{c \ \text{axisymétrique} \ | \ c \in L^\infty\big([0,t], H(\Omega)\big) \cap L^2\big([0,t], V(\Omega)\big)\Big\}.$$

En outre, si a est de divergence nulle, alors on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t \Big|\big(a\,\nabla a(s)|c(s)\big)_{L^2(\Omega)}\Big|\,ds \leq \frac{\nu}{2}\int_0^t ||\nabla a(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds \\
+ \frac{C}{\nu^3\,r_0^2}\int_0^t ||a(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,||c(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,||\nabla c(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds\,.
\end{aligned}$$

Lemme 3. *Soient u_0 et v_0 deux champs de vecteurs de divergence nulle, éléments de $L^2(\Omega)$, avec u_0 axisymétrique. Soient v et u des solutions de* (NS) *et* (NS_{ax}) *associées à v_0 et u_0 respectivement, et vérifiant (1). Alors pour tout $t \geq 0$, on a*

$$\begin{aligned}
\big(v(t)|u(t)\big)_{L^2(\Omega)} + 2\nu \int_0^t \big(\nabla v(s)|\nabla u(s)\big)_{L^2(\Omega)}\,ds \\
= (v_0|u_0)_{L^2(\Omega)} - \int_0^t \Big(\big(v(s)|u\cdot\nabla u(s)\big)_{L^2(\Omega)} + \big(u(s)|v\cdot\nabla v(s)\big)_{L^2(\Omega)}\Big)\,ds\,.
\end{aligned}$$

Remarque. Ces deux lemmes sont énoncés dans un cadre de généralité qui dépasse celui requis pour la démonstration du théorème 3 ; il est bien évident que dans le lemme 3, on peut aussi supposer que v_0 est axisymétrique et que v est solution de (NS_{ax}). Néanmoins ils permettront ainsi d'obtenir le théorème 4 sans plus de calculs.

Démonstration du lemme 2. Le lemme 1 donne le résultat, par les calculs suivants :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \Big| \big(\operatorname{div}(a\otimes b)(s) | c(s)\big)_{L^2(\Omega)} \Big| \, ds \\
&\leq \int_0^t \Big(||\nabla a||_{L^2(\Omega)} \, ||bc||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla b||_{L^2(\Omega)} \, ||ac||_{L^2(\Omega)} \Big)(s)\, ds \\
&\leq \frac{C}{r_0^{1/2}} \int_0^t \Big(||\nabla a(s)||_{L^2(\Omega)} \, ||b(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)} \, ||\nabla b(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad + ||\nabla b(s)||_{L^2(\Omega)} \, ||a(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)} \, ||\nabla a(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)} \Big) \\
&\qquad \times ||c(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)} \, ||\nabla c(s)||^{/2}_{L^2(\Omega)} \, ds \, ,
\end{aligned}
$$

ce qui démontre la continuité de l'application trilinéaire. Dans le cas où $a = b$ est de divergence nulle, on a aussi

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \Big| \big((a\cdot\nabla a)(s) | c(s)\big)_{L^2(\Omega)} \Big| \, ds \\
&\leq \frac{C}{r_0^{1/2}} \int_0^t ||\nabla a(s)||^{3/2}_{L^2(\Omega)} \, ||a(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)} \, ||c(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)} \, ||\nabla c(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)} \, ds \\
&\leq \frac{\nu}{2} \int_0^t ||\nabla a(s)||^2_{L^2(\Omega)} \, ds + \frac{C}{r_0^2 \nu^3} \int_0^t ||a(s)||^2_{L^2(\Omega)} \, ||c(s)||^2_{L^2(\Omega)} \, ||\nabla c(s)||^2_{L^2(\Omega)} \, ds \, ,
\end{aligned}
$$

et le lemme 2 est démontré. ■

Démonstration du lemme 3. Considérons deux champs de vecteurs u_n et v_n de divergence nulle, éléments de $L^\infty(\mathbb{R}^+, C_0^\infty(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, C_0^\infty(\Omega))$, avec u_n axisymétrique, tels que u_n et v_n convergent fortement dans $L^2(\mathbb{R}^+, V(\Omega))$ vers u et v. On suppose aussi que $u_n|_{t=0} \in C_0^\infty(\Omega)$ et converge faiblement dans $H(\Omega)$ vers u_0, et que u_n converge vers u faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, H(\Omega))$. Le lemme 1 implique que

$$
||u\otimes u||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{r_0} ||u||_{L^2(\Omega)} \, ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \, ,
$$

par conséquent on a $u\otimes u \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$, et en notant $\dot H^{-1}(\Omega)$ l'espace formé de dérivées premières d'éléments de $L^2(\Omega)$, on peut supposer en outre que $\partial_t u_n$ converge vers $\partial_t u$ fortement dans $L^2(\mathbb{R}^+, \dot H^{-1}(\Omega))$.

Puisque u et v vérifient (NS$_{ax}$) et (NS) respectivement, on peut écrire

$$\int_0^t \Big((\partial_s u | v_n)_{L^2(\Omega)} - \nu (\Delta u | v_n)_{L^2(\Omega)} + (u \cdot \nabla u | v_n)_{L^2(\Omega)} \Big)(s)\, ds = 0,$$

et

$$\int_0^t \Big((\partial_s v | u_n)_{L^2(\Omega)} - \nu (\Delta v | u_n)_{L^2(\Omega)} + (v \cdot \nabla v | u_n)_{L^2(\Omega)} \Big)(s)\, ds = 0,$$

et l'on peut passer à la limite en n, en utilisant pour $(v \cdot \nabla v | u_n)_{L^2(\Omega)}$ le lemme 2. Mais

$$\int_0^t (\partial_s v | u_n)_{L^2(\Omega)}(s)\, ds = - \int_0^t (v | \partial_s u_n)_{L^2(\Omega)}(s)\, ds + \big(v(t) | u_n(t) \big)_{L^2(\Omega)} - (v_0 | u_n|_{t=0})_{L^2(\Omega)},$$

donc il vient finalement, après intégration par parties,

$$\int_0^t \Big((\partial_s u | v)_{L^2(\Omega)} + \nu (\nabla u | \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (u \cdot \nabla u | v)_{L^2(\Omega)} \Big)(s)\, ds = 0,$$

et

$$\int_0^t \Big(- (\partial_s u | v)_{L^2(\Omega)} + \nu (\nabla u | \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (v \cdot \nabla v | u)_{L^2(\Omega)} \Big)(s)\, ds$$
$$= (v_0 | u_0)_{L^2(\Omega)} - (v(t) | u(t))_{L^2(\Omega)}.$$

Il suffit alors de sommer ces deux égalités pour avoir le résultat cherché. ■

Retour à la démonstration du théorème 3. En utilisant les lemmes 2 et 3, on peut écrire que

$$\frac{1}{2} ||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \nu \int_0^t ||\nabla w(s)||^2_{L^2(\Omega)}\, ds$$
$$= \frac{1}{2} \Big(||v_1|_{t=0}||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_2|_{t=0}||^2_{L^2(\Omega)} - 2 \big(v_1|_{t=0} \big| v_2|_{t=0} \big)_{L^2(\Omega)} \Big)$$
$$+ \int_0^t \Big((v_1 | v_2 \cdot \nabla v_2)_{L^2(\Omega)} + (v_2 | v_1 \cdot \nabla v_1)_{L^2(\Omega)} \Big)(s)\, ds.$$

En utilisant (1), on a donc

$$\frac{1}{2} ||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \nu \int_0^t ||\nabla w(s)||^2_{L^2(\Omega)}\, ds \leq \frac{1}{2} ||w_0||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t (w \cdot \nabla w | v_1)(s)\, ds,$$

et par le lemme 2, on peut écrire

$$||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \nu \int_0^t ||\nabla w(s)||^2_{L^2(\Omega)}\, ds$$
$$\leq ||w_0||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\nu^3 r_0^2} \int ||\nabla v_1(s)||^2_{L^2(\Omega)} ||v_1(s)||^2_{L^2(\Omega)} ||w(s)||^2_{L^2(\Omega)}\, ds.$$

Par conjugaison, on obtient donc

$$||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \nu \int_0^t ||\nabla w(s)||^2_{L^2} ds \leq ||w_0||^2_{L^2} \exp\left(\frac{C}{r_0^2\nu^3}\int_0^t ||\nabla v_1(s)||^2_{L^2}||v_1(s)||^2_{L^2(\Omega)}\, ds\right),$$

ce qui démontre le théorème, par utilisation de (1), et car $w_0 = 0$. ■

Démonstration du lemme 1.

On peut supposer par densité que $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Ecrivons alors

$$\begin{aligned}\forall r \geq r_0,\ \ u^2(r,z) &= 2\int_{r_0}^r u(\rho,z)\partial_\rho u(\rho,z)d\rho \\ &\leq \frac{2}{r_0}\Big(\int_0^\infty |u(\rho,z)|^2\rho d\rho\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty |\partial_\rho u(\rho,z)|^2\rho d\rho\Big)^{1/2},\end{aligned}$$

où l'on a prolongé u par 0 à l'extérieur de Ω. De même,

$$\begin{aligned}u^2(r,z) &= 2\int_{-\infty}^z u(r,\zeta)\partial_\zeta u(r,\zeta)d\zeta \\ &\leq 2\Big(\int_{\mathbb{R}} |u(r,\zeta)|^2 d\zeta\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{R}} |\partial_\zeta u(r,\zeta)|^2 d\zeta\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Donc finalement on peut écrire, en utilisant ces deux inégalités,

$$\begin{aligned}||u||^4_{L^4(\Omega)} &= 2\pi\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} |u(r,z)|^4\, rdrdz \\ &\leq \frac{C}{r_0}\int_{r=0}^\infty ||u(r,\zeta)||_{L^2(\mathbb{R}_\zeta)}||\partial_\zeta u(r,\zeta)||_{L^2(\mathbb{R}_\zeta)}rdr\int_{\mathbb{R}} ||u(r,z)||_{L^2(rdr)} \\ &\qquad\qquad ||\partial_r u(r,z)||_{L^2(rdr)}dz \\ &\leq \frac{C}{r_0}||u||^2_{L^2(\Omega)}||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

ce qui démontre la première inégalité. La seconde s'obtient simplement en remarquant que

$$||ab||^2_{L^2(\Omega)} = \big|\big|\,||a_\theta b||_{L^2(rdrdz)}\big|\big|^2_{L^2(d\theta)},$$

où l'on a noté, pour tout $\theta \in [-\pi,\pi]$, a_θ la fonction axisymétrique

$$a_\theta(r,z) \stackrel{\text{déf}}{=} a(r,\theta,z), \quad \theta \in [-\pi,\pi] \text{ fixé}.$$

Mais l'inégalité précédente du lemme 1 permet d'écrire que

$$\begin{aligned}||a_\theta b||_{L^2(rdrdz)} &\leq ||a_\theta||_{L^4(rdrdz)}||b||_{L^4(rdrdz)} \\ &\leq \frac{C}{r_0^{1/2}}||a_\theta||^{1/2}_{L^2(rdrdz)}||\nabla a_\theta||^{1/2}_{L^2(rdrdz)}||b||^{1/2}_{L^2(\Omega)}||\nabla b||^{1/2}_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

ce qui fournit, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et comme b ne dépend pas de θ,

$$||ab||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{r_0}\, ||a||_{L^2(\Omega)}\, ||\nabla a||_{L^2(\Omega)}\, ||b||_{L^2(\Omega)}\, ||\nabla b||_{L^2(\Omega)}\,,$$

et le lemme 1 est démontré. ■

3.1.2. Démonstration du théorème 4

Ce théorème se démontre à présent de façon très simple. Commençons par remarquer que $\overline{v}_0 \in H(\Omega)$ par les calculs évidents suivants :

$$\begin{aligned} ||\overline{v}_0||^2_{L^2(\Omega)} &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} |\overline{v}_0(r,z)|^2\, r\, dr\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} v_0(r,\theta,z)\, d\theta \right|^2 r\, dr\, dz \\ &\leq ||v_0||^2_{L^2(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overline{v}_0 &= -\frac{1}{2\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_\theta\, v_0^\theta(r,\theta,z)\, d\theta \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

où v_0^θ représente la composante angulaire de v_0. Donc $\overline{v}_0 \in H(\Omega)$.

Il suffit maintenant, pour démontrer le théorème 4, de reprendre les calculs aboutissant au théorème 3, en remplaçant v_1 par $\overline{v}$, solution "à la Leray" de (NS_{ax}) associée à $\overline{v}_0$, et v_2 par v, solution "à la Leray" de (NS) associée à v_0. Les lemmes 1 à 3 donnent le résultat. ■

3.2. Cas d'un domaine plat près de l'axe

3.2.1. Démonstration du théorème 5

Comme indiqué dans l'énoncé du théorème 5, on suppose ici que

$$\Omega \subset \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \text{ si } r < R_0, \text{ alors } -C\,r^\alpha < z < C\,r^\alpha \right\},$$

avec $\alpha > 4$, $C > 0$ et $R_0 > 0$ fixés.

Le théorème 5 est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 4. *Soient a et b deux fonctions de $H \cap V(\Omega)$ telles que l'une des deux au moins est axisymétrique, et que le support de a vérifie $\operatorname{supp} a \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | r \leq R_0\}$; supposons qu'il existe une fonction $f(a)$, indépendante de r, et un réel $\beta > 3$ tels que*

$$||a||_{L^2((B(0,r)\times\mathbb{R})\cap\overline{\Omega})} \leq C r^\beta f(a).$$

Alors on a

$$||ab||^2_{L^2(\Omega)} \leq Cf(a)||a||_{V(\Omega)}||b||_{H(\Omega)}||b||_{V(\Omega)}.$$

Admettons provisoirement ce lemme, et posons $w = v_2 - v_1$. Nous allons reprendre la méthode de W. von Wahl utilisée dans la section 3.1.1 précédente, en montrant les deux lemmes suivants.

Lemme 5. *Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Alors l'application*

$$(a,b,c) \longmapsto \int_0^t \big(\operatorname{div}(a\otimes b)(s)\big|c(s)\big)_{L^2(\Omega)}\,ds$$

est trilinéaire continue de

$$\Big(L^\infty([0,T],H(\Omega)) \cap L^2([0,T],V(\Omega))\Big)^2 \\ \times\Big\{c \text{ axisymétrique } \Big|\ c\in L^\infty([0,T],H\cap L^{2+\varepsilon}(\Omega)) \cap L^2([0,T],V(\Omega))\Big\}.$$

En outre, il existe des constantes C et C_α indépendantes de t, telles que

$$\int_0^t \Big|\big(a\cdot\nabla a(s)\big|c(s)\big)_{L^2(\Omega)}\Big|\,ds \leq \frac{\nu}{2}\int_0^t ||\nabla a(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds \\ + \int_0^t ||a(s)||^2_{L^2(\Omega)}||\nabla c(s)||^2_{L^2(\Omega)}\Big(\frac{C}{\nu^3 R_0^2}||c(s)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C_\alpha}{\nu^3}||c(s)||^2_{L^{2+\varepsilon}(\Omega)}\Big)\,ds\,.$$

Lemme 6. *Soient u_0 et v_0 deux champs de vecteurs éléments de $H(\Omega)$, avec u_0 axisymétrique, et soient u et v, solutions "à la Leray" de (NS_{ax}) et (NS) associées à u_0 et v_0 respectivement, telles qu'en outre $u\in L^\infty(\mathbb{R}^+,L^{2+\varepsilon}(\Omega))$. Alors pour tout $t\geq 0$, on a*

$$\big(v(t)\big|u(t)\big)_{L^2(\Omega)} + 2\nu\int_0^t \big(\nabla u(s)\big|\nabla v(s)\big)_{L^2(\Omega)}\,ds \\ = (v_0|u_0)_{L^2(\Omega)} - \int_0^t \Big(\big(v(s)\big|u\cdot\nabla u(s)\big)_{L^2(\Omega)} + \big(u(s)\big|v\cdot\nabla v(s)\big)_{L^2(\Omega)}\Big)\,ds\,.$$

Démonstration du lemme 5. On peut écrire

$$\int_0^t \Big|\big(\operatorname{div}(a\otimes b)(s)\big|c(s)\big)\Big|_{L^2(\Omega)}\,ds \\ \leq \int_0^t ||\nabla a(s)||_{L^2(\Omega)}\Big(||b^{\text{int}}c^{\text{int}}||_{L^2(\Omega)} + ||b^{\text{ext}}c^{\text{ext}}||_{L^2(\Omega)}\Big)(s)\,ds \\ + \int_0^t ||\nabla b(s)||_{L^2(\Omega)}\Big(||a^{\text{int}}c^{\text{int}}||_{L^2(\Omega)} + ||a^{\text{ext}}c^{\text{ext}}||_{L^2(\Omega)}\Big)(s)\,ds\,,$$

où l'on a noté, pour tout champ f,

$$f^{\rm int} \stackrel{\rm déf}{=} \mathbf{1}_{r\leq R_0} f \quad \text{et} \quad f^{\rm ext} \stackrel{\rm déf}{=} f - f^{\rm int}.$$

Le lemme 1 démontré dans la section précédente permet d'écrire que

$$||ac^{\rm ext}||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{R_0}||a||_{L^2(\Omega)}||\nabla a||_{L^2(\Omega)}||c||_{L^2(\Omega)}||\nabla c||_{L^2(\Omega)},$$

donc il suffit à présent d'estimer $||c^{\rm int}a||_{L^2(\Omega)}$. Mais on a, $\forall r \leq R_0$,

$$\begin{aligned} ||c^{\rm int}||_{L^2((B(0,r)\times\mathbb{R})\cap\overline{\Omega})} &= 2\pi\Big(\int_0^r\int_{\mathbb{R}}|c^{\rm int}(\rho,z)|^2\rho d\rho\, dz\Big)^{1/2} \\ &\leq ||c||_{L^{2+\varepsilon}(\Omega)}\big(\operatorname{vol}((B(0,r)\times\mathbb{R})\cap\overline{\Omega})\big)^{\frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)}}, \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder. Mais par ailleurs on a, $\forall r \leq R_0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}((B(0,r)\times\mathbb{R})\cap\overline{\Omega}) &= 2\pi\int_0^r\rho\Big(\int_{-C\rho^\alpha}^{C\rho^\alpha}dz\Big)d\rho \\ &\leq C\int_0^r\rho^{1+\alpha}d\rho \\ &\leq \frac{C}{2+\alpha}r^{2+\alpha}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$||c^{\rm int}||_{L^2(B(0,r)\times\mathbb{R}\cap\overline{\Omega})} \leq C_\alpha r^{(2+\alpha)\frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)}}||c^{\rm int}||_{L^{2+\varepsilon}(\Omega)}.$$

Mais par hypothèse, on a supposé que $\frac{\varepsilon(2+\alpha)}{2(2+\varepsilon)} > 3$. On peut donc appliquer le lemme 4, qui conduit à

$$||c^{\rm int}a||_{L^2(\Omega)} \leq C_\alpha||c^{\rm int}||^{1/2}_{L^{2+\theta}}||\nabla c^{\rm int}||^{1/2}_{L^2}||a||^{1/2}_{L^2}||\nabla a||^{1/2}_{L^2}.$$

Finalement, on a donc obtenu que $\int_0^t\big|\big(\operatorname{div}(a\otimes b)(s)|c(s)\big)_{L^2(\Omega)}\big|\,ds$ se majore par

$$\begin{aligned} \int_0^t\Big(||\nabla a(s)||_{L^2(\Omega)}||b(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)}||\nabla b(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)} + ||\nabla b(s)||_{L^2(\Omega)}||a(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)}||\nabla a(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)}\Big) \\ \times\Big(\frac{C}{R_0^{1/2}}||c(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)} + C_\alpha||c(s)||^{1/2}_{L^{2+\varepsilon}(\Omega)}\Big)||\nabla c(s)||^{1/2}_{L^2(\Omega)}\,ds, \end{aligned}$$

ce qui démontre la continuité de l'application trilinéaire. Enfin si $a=b$, cette expression se majore par

$$\begin{aligned} &\frac{\nu}{2}\int_0^t||\nabla a(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds \\ &\qquad+\frac{C}{\nu^3}\int_0^t||a(s)||^2_{L^2(\Omega)}\Big(\frac{1}{R_0^2}||c(s)||^2_{L^2(\Omega)} + C_\alpha||c(s)||^2_{L^{2+\varepsilon}(\Omega)}\Big)||\nabla c(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds. \end{aligned}$$

Le lemme 5 est donc démontré. ■

Démonstration du lemme 6. Nous n'allons pas rentrer dans les détails de la démonstration, car elle est rigoureusement identique à celle du lemme 3 précédent. Il faut simplement s'assurer que l'on peut approximer $\partial_t u$ par $\partial_t u_n$ dans $L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1}(\Omega))$. Mais cela est simplement dû au calcul suivant :

$$\int_0^t ||u\otimes u||^2_{L^2(\Omega)}(s)\,ds \leq \int_0^t ||u^{\rm int}\otimes u^{\rm int}||_{L^2(\Omega)}(s)\,ds + \int_0^t ||u^{\rm ext}\otimes u^{\rm ext}||^2_{L^2(\Omega)}(s)\,ds\,,$$

qui par des calculs identiques à ceux conduisant au lemme 5, se majore par

$$\frac{C}{R_0}\int_0^t ||u(s)||^2_{L^2(\Omega)}||\nabla u(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds + C_\alpha\int_0^t ||u(s)||^2_{L^{2+\varepsilon}(\Omega)}\,||\nabla u(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds.$$

On peut alors reprendre ligne à ligne la démonstration du lemme 3, et le lemme 6 est démontré. ■

Retour à la démonstration du théorème 5. En rassemblant les résultats précédents, on peut écrire comme pour le théorème 3 que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \nu\int_0^t ||\nabla w(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds &\leq \frac{1}{2}||w_0||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \big|\big(w\cdot\nabla w(s)|v_1(s)\big)_{L^2(\Omega)}\big|\,ds\\ &\leq \frac{1}{2}||w_0||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\int_0^t ||\nabla w(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds\\ + \int_0^t ||a(s)||^2_{L^2(\Omega)}||\nabla v_1(s)||^2_{L^2(\Omega)}&\Big(\frac{C}{\nu^3R_0^2}||v_1(s)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C_\alpha}{\nu^3}||v_1(s)||^2_{L^{2+\varepsilon}(\Omega)}\Big)\,ds\,,\end{aligned}$$

ce qui par conjugaison conduit à

$$\begin{aligned}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\int_0^t ||\nabla w(s)||^2_{L^2}\,ds \leq ||w_0||^2_{L^2}\exp\Big(&\frac{C}{R_0^2\nu^3}\int_0^t ||\nabla v_1(s)||^2_{L^2(\Omega)}||v_1(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds\\ &+\frac{C_\alpha}{\nu^3}\int_0^t ||v_1(s)||^2_{L^{2+\theta}(\Omega)}||\nabla v_1(s)||^2_{L^2(\Omega)}\,ds\Big).\end{aligned}$$

Le théorème est démontré. ■

Démonstration du lemme 4. Avec les notations introduites en section 2, écrivons

$$ab = \sum_{|p-q|\leq 2} a_p b_q,\quad \text{avec}\quad a_p \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi_p a \quad\text{et}\quad b_q \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi_q b.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme 1 impliquent, comme $|p-q|\leq 2$, que

$$||a_pb_q||^4_{L^2} \leq C\,2^{2p}||a_p||^2_{L^2}||\nabla a_p||^2_{L^2}||b_q||^2_{L^2}||\nabla b_q||^2_{L^2}.$$

Mais pour toute fonction u, on peut écrire

$$||\nabla u_p||_{L^2} \leq ||\varphi_p \nabla u||_{L^2} + 2^p ||\varphi'(2^p \cdot) u||_{L^2}.$$

Mais comme $\varphi'(2^p \cdot)$ est à support dans $2^{-p}\mathcal{C}_0$, on a donc

$$||a_p b_q||_{L^2}^2 \leq C\, 2^p ||b_q||_{L^2} ||\nabla b_q||_{L^2}\, 2^{-p\beta} c_p^2 f(a)(||a||_{L^2} 2^p + ||\nabla a||_{L^2}),$$

avec $c_p \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Donc on peut écrire

$$||a_p b_q||_{L^2}^2 \leq C c_p^2 f(a)(||\nabla a||_{L^2} + ||a||_{L^2})(||\nabla b||_{L^2} + ||b||_{L^2}) 2^p (\max(1, 2^p))^2 \times 2^{-p\beta}.$$

Comme en outre on a $2^{-p} \leq C R_0$, on a donc le résultat cherché à condition que

$$3 - \beta < 0.$$

Le lemme est démontré. ■

3.2.2. Démonstration du théorème 6.

Comme dans le cas du théorème 4 précédemment, la démonstration du théorème 6 est identique à celle du théorème 5 ci-dessus, en remplaçant v_1 par $\overline{v}$ et v_2 par v. Les calculs sont laissés au lecteur. ■

4. Résolution dans $\mathbb{R}^3$

Dans cette dernière partie, nous allons considérer le cas où $\Omega = \mathbb{R}^3$, et démontrer le théorème 7 énoncé en introduction.

Pour y parvenir, nous aurons besoin de quelques estimations dans des espaces à poids. Nous renvoyons à [St], [Jo], pour les démonstrations des résultats de la section 4.1. La section 4.2 est dévolue à la démonstration du théorème, par application de la méthode de Kato ([Ka] ; voir [Ca] pour une présentation de la méthode).

4.1. Rappels sur les espaces à poids $\mathcal{A}_p$

Commençons par rappeler la définition des classes $\mathcal{A}_p$ de poids (on renvoie à [St] pour les détails, chapitre V.1).

Définition 3. *Soit $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction positive mesurable. Alors w est un poids, et w appartient à la classe $\mathcal{A}_p$, pour $1 < p < +\infty$, si pour toute boule $B \subset \mathbb{R}^3$, on a*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |w(x)|^{-\frac{1}{p-1}} dx\right)^{p-1} < +\infty,$$

où $|B|$ désigne le volume de B.

Proposition 1. *Soit w la fonction définie par*

$$w(x,y,z) = (x^2+y^2)^{-1/2}.$$

Alors w est un poids dans la classe $\mathcal{A}_2$.

Démonstration. Il suffit de vérifier l'hypothèse de la définition sur des boules centrées en 0, pour simplifier. On écrit alors :

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{|B(0,R)|}\int_{B(0,R)}(x^2+y^2)^{-1/2}dxdydz\Big)&\Big(\frac{1}{|B(0,R)|}\int_{B(0,R)}(x^2+y^2)^{+1/2}dxdydz\Big)\\ &\leq \frac{C}{R^6}\int_{r=0}^{R}\int_{z=-R}^{R} r^{1/2}drdz\int_{r=0}^{R}\int_{z=-R}^{R} r^{3/2}drdz\\ &\leq \frac{C}{R^6}R^{3/2}RR^{5/2}R\\ &\leq C,\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition. ■

Nous utiliserons fréquemment le lemme suivant dans la suite; on peut trouver sa démonstration dans [St], section V.4.2.

Lemme 7. *Soit w un poids dans la classe $\mathcal{A}_p$, pour $1 < p < +\infty$, et soit T un opérateur de noyau K ($Tf(x) = \int K(x-y)f(y)dy$), vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\forall |\alpha| \leq 1, \forall x \neq 0, |\partial_x^\alpha K(x)| \leq C|x|^{-3-|\alpha|}$

(ii) T est continu de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Alors l'opérateur T est continu de $L^p(\mathbb{R}^3, w(x)dx)$ dans $L^p(\mathbb{R}^3, w(x)dx)$, cet espace désignant l'espace $L^p(\mathbb{R}^3)$ muni de la mesure $w(x)dx$.

Remarque. L'opérateur T ci-dessus peut être remplacé par une famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs, uniformément bornés dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, tels que la constante C de (i) dans le lemme soit indépendante de n. Alors cette famille est uniformément bornée dans $L^p(w(x)dx)$.

Dans la suite, nous considérerons le poids $w(x,y,z) = (x^2+y^2)^{-1/2}$, qui d'après la proposition 1, est dans la classe $\mathcal{A}_2$.

Nous noterons $L_0^2 \overset{\text{déf}}{=} \big\{f \text{ axisymétrique } \mid f \in L^2(\mathbb{R}^3, (x^2+y^2)^{-1/2}dx)\big\}$.

Nous avons rappelé en section 2 la définition des opérateurs de Littlewood-Paley notés Δ_j. Dans [Jo] (section 6.IV) est démontré le résultat fondamental suivant.

Lemme 8. *Les opérateurs de Littlewood-Paley Δ_j sont continus sur L^2_0, uniformément en j.*

Remarque. Notons que si u est axisymétrique, alors $\Delta_j u$ l'est aussi car par hypothèse, les fonctions φ et ψ intervenant dans la construction du découpage dyadique sont radiales.

4.2. Démonstration du théorème 7

La méthode que nous allons suivre, dite "méthode de Kato", est celle permettant d'obtenir le théorème 2 cité en introduction (dont l'énoncé est très proche du théorème 7), et est exposée précisément dans [Ca] (chapitre 3.2).

On commence par écrire l'équation de Navier-Stokes sous la forme intégrale (dite "mild") suivante :

$$v(t,x) = S(t)v_0(x) + B(v,v)(t,x), \tag{3}$$

où $S(t) = \exp(t\nu\Delta)$ est le semi-groupe de la chaleur, et où

$$B(u,v)(t,x) \stackrel{\text{déf}}{=} -\int_0^t PS(t-s)\,\mathrm{div}(u\otimes v)(s,x)ds.$$

On résout alors (3) par une méthode de point fixe, basée sur le lemme classique suivant (voir [Ca], lemme 1.2.6).

Lemme 9. *Soit Y un espace de Banach, et $B : Y\times Y \to Y$ un opérateur bilinéaire continu, tel que*

$$||B(u,v)||_Y \le C_0||u||_Y||v||_Y.$$

Alors si $a\in Y$ et si $4C_0||a||_Y < 1$, alors l'équation

$$b = a + B(b,b)$$

admet une unique solution b vérifiant

$$||b||_Y \le \frac{1}{2C_0}\Big(1-\sqrt{1-4C_0||a||_Y}\Big).$$

L'espace de Banach dans lequel nous allons résoudre (3) est, comme indiqué dans l'énoncé du théorème 7,

$$X_T = \Big\{v \text{ axisymétrique } \;\Big|\; v\in L^\infty((0,T);L^2_0(\mathbb{R}^3)) \text{ et } t^{1/2}\nabla v\in L^\infty((0,T);L^2_0(\mathbb{R}^3))\Big\}.$$

La démonstration du théorème va découler des deux lemmes suivants :

Lemme 10. *Soit $v_0 \in L^2_0(\mathbb{R}^3)$ un champ de vecteurs axisymétrique de divergence nulle. Alors il existe une constante C telle que pour tout temps $T \geq 0$, on a*

$$||S(t)v_0||_{X_T} \leq C\,||v_0||_{L^2_0}.$$

Lemme 11. *Soient u et v deux champs de vecteurs de X_T, alors pour tout temps $T \geq 0$, on a*

$$||B(u,v)||_{X_T} \leq \eta(T)||u||_{X_T}\,||v||_{X_T},$$

avec $\lim_{T\to 0} \eta(T) = 0$, où η est une fonction bornée, indépendante de u et v.

Supposons ces deux lemmes démontrés. Alors le théorème 7 est une conséquence facile du lemme 9 ci-dessus : en effet, pour $T > 0$ assez petit, dépendant de v_0, on a

$$\forall t \leq T,\;\; 4\eta(t)||v_0||_{L^2_0} < 1,$$

et donc on peut résoudre de manière unique le système (3) pendant un temps $[0, T^*[$. En outre, si

$$||v_0||_{L^2_0} < \frac{1}{4||\eta||_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}},$$

alors on a $T^* = +\infty$.

Le théorème est donc démontré. ■

Démonstration du lemme 10. Ce lemme repose sur le lemme 7 énoncé ci-dessus : nous allons vérifier que l'opérateur dont le noyau est le noyau gaussien $K_{\sqrt{\nu t}}(x)$, avec

$$K_\lambda(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda^{-3}\Phi\Big(\frac{x}{\lambda}\Big),\;\; \text{avec}\;\; \Phi(x) = (4\pi)^{-3/2}e^{-|x|^2/4}$$

vérifie les hypothèses (i) et (ii) du lemme 7 et de même pour l'opérateur de noyau $\sqrt{\nu t}\;K^{(1)}_{\sqrt{\nu t}}$, avec

$$K^{(1)}_\lambda(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_x K_\lambda(x).$$

Il est bien connu que

$$\forall \lambda > 0,\;\; ||v_0 * K_\lambda||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C||v_0||_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

un simple calcul fournit

$$\forall \lambda > 0,\;\; \forall x \neq 0,\;\; \forall |\alpha| \leq 1,\;\; |\partial^\alpha_x K_\lambda(x)| \leq C|x|^{-3-|\alpha|}.$$

De même on constate aisément que

$$\forall \lambda > 0,\ \ ||v_0 * K_\lambda^{(1)}||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\lambda^{-1}||v_0||_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

et que

$$\forall \lambda > 0,\ \ \forall x \neq 0,\ \ \forall |\alpha| \leq 1,\ \ |\partial_x^\alpha K_\lambda^{(1)}(x)| \leq C\lambda^{-1}|x|^{-3-|\alpha|}.$$

Alors le lemme 10 est simplement dû au lemme 7, ainsi qu'à la remarque qui le suit. ■

Démonstration du lemme 11. Par la continuité des opérateurs Δ_j sur L^2_0 (voir le lemme 8 précédent), il suffit d'estimer les quantités $||\Delta_j B(v,v)||_{L^2_0}$ et $t^{1/2}||\Delta_j \nabla B(v,v)||_{L^2_0}$.

Commençons par rappeler que les opérateurs de Riesz vérifient clairement les hypothèses du lemme 7 (voir aussi [St], section I.6.2). En outre, il est bien connu que (voir [C2], lemme 2.1)

$$\big|\big|\Delta_j\, e^{\nu(t-s)\Delta}\, P\ \mathrm{div}(u\otimes v)\big|\big|_{L^2} \leq C\, c_j\, 2^j\, e^{-\nu(t-s)2^{2j}c}\, ||u\otimes v||_{L^2},$$

avec $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j^2 = 1$. Donc le lemme 7, associé aux calculs précédents sur le noyau de la chaleur, conduit au fait que

$$||\Delta_j B(u,v)(t)||_{L^2_0} \leq C\, c_j\, 2^j \int_0^t e^{-(t-s)2^{2j}c\nu}\, ||u\otimes v(s)||_{L^2_0}\, ds.$$

On a le résultat suivant.

Lemme 12. *Soient u et v deux champs de vecteurs axisymétriques. On a l'estimation suivante :*

$$||uv||_{L^2_0} \leq C||u||_{L^2_0}||\nabla v||_{L^2_0} + C||v||_{L^2_0}||\nabla u||_{L^2_0}.$$

Remarque. Ce lemme est identique aux lois de produit bidimensionnelles, en remplaçant partout L^2_0 par $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Admettons ce lemme provisoirement. On a alors

$$\begin{aligned} ||\Delta_j B(u,v)(t)||_{L^2_0} \leq\ & C c_j ||v||_{L^\infty(0,t;L^2_0)} ||t^{1/2}\nabla u||_{L^\infty(0,t;L^2_0)} f_j(t) \\ & + C\, c_j\, ||u||_{L^\infty(0,t;L^2_0)}\, ||t^{1/2}\nabla v||_{L^\infty(0,t;L^2_0)}\, f_j(t) \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$f_j(t) = \int_0^t \frac{e^{2^{2j}(s-t)c\nu}}{\sqrt{s}}\ 2^j\, ds,$$

que l'on peut aussi écrire $f_j(t) = f(2^{2j}t)$, avec

$$f(t) = \int_0^t \frac{e^{(s-t)c\nu}}{\sqrt{s}} ds.$$

On a donc, en utilisant le lemme 8,

$$||B(u,v)||_{L^\infty(0,T;L^2_0)} \le C||u||_{X_T}||v||_{X_T}\,\eta_1(T),$$

avec $\eta_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ et $\eta_1(T) \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 0$.

De même, on écrit que

$$\begin{aligned}
t^{1/2}\,||\Delta_j \nabla B(u,v)(t)||_{L^2_0} &\le C\,c_j\,2^{2j}\,t^{1/2}\,||u||_{L^\infty(0,t;L^2_0)}\,||t^{1/2}\nabla v||_{L^\infty(0,t;L^2_0)} \int_0^t \frac{e^{2^{2j}(s-t)c\nu}}{\sqrt{s}}\,ds \\
&\quad + C\,c_j\,2^{2j}\,t^{1/2}\,||v||_{L^\infty(0,t;L^2_0)}\,||t^{1/2}\nabla u||_{L^\infty(0,t;L^2_0)} \int_0^t \frac{e^{2^{2j}(s-t)c\nu}}{\sqrt{s}}\,ds \\
&\le C\,c_j\,||v||_{X_t}\,||u||_{X_t}\,g_j(t),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
g_j(t) &= 2^{2j}\int_0^t (t-s)^{1/2} s^{-1/2} e^{2^{2j}(s-t)c\nu}ds + 2^{2j}\int_0^t e^{2^{2j}(s-t)c\nu}ds \\
&\le \int_0^t e^{(s-t)c\nu}\Big(\frac{t-s}{s}\Big)^{1/2} ds + \int_0^t e^{(s-t)c\nu}ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$||t^{1/2}\nabla B(u,v)||_{L^\infty(0,T;L^2_0)} \le C\,\eta_2(T)||u||_{X_T}\,||v||_{X_T},$$

avec $\eta_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ et $\lim_{T\to 0}\eta_2(T) = 0$, et le lemme est démontré. ■

Démonstration du lemme 12. Considérons deux champs de vecteurs u et v axisymétriques. L'estimation

$$||uv||_{L^2_0} \le C||u||_{L^2_0}||\nabla v||_{L^2_0} + C||v||_{L^2_0}||\nabla u||_{L^2_0}$$

est une simple conséquence du fait que u et v ne dépendent que de deux variables r et z, et que l'espace L^2_0 est justement l'espace $L^2(dr\,dz)$ dans ces deux variables. L'inégalité de Ladyzhenskaya évoquée précédemment donne le résultat directement (elle n'est autre qu'une loi de produit bidimensionnelle sur les espaces de Sobolev). ■

Remerciements. Les auteurs remercient C. Bernardi pour de nombreuses discussions sur les questions étudiées dans ce travail, ainsi que J.-Y. Chemin pour ses conseils et ses suggestions.

Bibliographie

[Ac] N. Achtaich : *Injections de type Sobolev,* Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I, **303**, 1985.

[BDM] C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday : *Spectral Methods for Axisymmetric Domains,* Series in Applied Mathematics **3**, P.-G. Ciarlet and P.-L. Lions Editors, Gauthier-Villars and North Holland, 1999.

[Ca] M. Cannone : *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes,* Diderot Editeur, Arts et Sciences (1994).

[C1] J.-Y. Chemin : *Fluides parfaits incompressibles,* Astérisque **230** (1995).

[C2] J.-Y. Chemin : *Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel,* Journal d'Analyse Mathématique **77** (1999), 27–50.

[CF] P. Constantin et C. Foias : *Navier-Stokes Equations,* Chicago Lectures in Mathematics, Chicago University Press, Chicago (1988).

[FK] H. Fujita et T. Kato : *On the Navier-Stokes Initial Value Problem I,* Archive for Rational Mechanics and Analysis **16** (1964), 269–315.

[FLT] G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset, E. Terraneo : *Unicité des solutions mild des équations de Navier-Stokes dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces limites,* prépublication de l'Université d'Evry (1997).

[Ga] I. Gallagher : *The tridimensional Navier-Stokes equations with almost bidimensional data : stability, uniqueness ans life span,* International Mathematics Research Notices **18** (1997), 919–935.

[Jo] J.-L. Journé : *Calderón-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderón,* Lecture Notes in Mathematics **994**, Springer Verlag (1983).

[Ka] T. Kato : *Nonstationnary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbb{R}^3$,* Journal of Functional Analysis **9** (1972), 296–305.

[La] O. Ladyzhenskaya : *The mathematical theory of viscous incompressible flow,* Gordon and Breach Sciences Publisher (1964).

[L1] J. Leray : *Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace,* Acta Matematica **63** (1933), 193–248.

[L2] J. Leray : *Etude de diverses équations intégrales et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique,* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **12** (1933), 1–82.

[Li1] J.-L. Lions : *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Dunod (1969).

[Li2] P.-L. Lions : *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. I, Incompressible Models*, Oxford Sciences Publications (1997).

[Pl] F. Planchon : *Global strong solutions in Sobolev or Lebesgue spaces to the incompressible Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^3$, Annales de l'Institut Henri Poincaré **13** (1996), 319–336.

[PRST] G. Ponce, R. Racke, T.C. Sideris, E.S. Titi : *Global stability of large solutions to the 3D Navier-Stokes equations,* Mathematical Physics (1994), 329–341.

[St] E. Stein : *Harmonic Analysis,* Princeton University Press (1993).

[UY] M.R. Ukhavskii et V.I. Yudovitch : *Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space,* Journal of Applied Mathematics and Mechanics **32** (1968), 32–61.

[W] W. von Wahl : *The Equations of Navier-Stokes and Abstract Parabolic Equation,* Aspects of Mathematics E8 (1985), Friedr. Vieweglsohn Braunschweig.