Examen du 28 avril 2009

Théorie des équations de Navier-Stokes

Trois heures

Seules les notes personnelles dans le cadre du module sont autorisées.

On admettra les résultats affirmés dans l'énoncé même si la démonstration n'en a pas été donnée en cours (des points de bonus étant donnés en cas de justification de ces résultats).

Pour simplifier les démonstrations on omettra (tout en l'indiquant) les arguments de régularisation nécessaires pour l'obtention de certaines estimations.

NB : Dans tout le sujet, les constantes seront notées par la même lettre C et pourront être différentes d'une ligne à l'autre.

PROBLÈME. (20 points)

L'objectif de ce problème est de démontrer que les équations de Navier-Stokes sont globalement bien posées en deux dimensions d'espace, dans l'adhérence de la classe de Schwartz pour la norme de Koch et Tataru, sans hypothèse de petitesse sur la donnée initiale. On se propose également de démontrer que si la donnée initiale est dans $\dot B^{-1+2/p}_{p,q}$ alors la solution tend vers zéro en grand temps (sous une hypothèse supplémentaire précisée ci-dessous).

Notations et rappels. *On se place dans $\mathbb{R}^2$, et l'on définit l'espace X_T, pour tout $T > 0$ par la norme :*

$$\|u\|_{X_T} := \sup_{0<t<T} t^{\frac12}\|u(t)\|_{L^\infty} + \sup_{0<R<\sqrt{T}}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\left(\int_0^{R^2} R^{-2}\int_{B(x,R)}|u(y,t)|^2\,dydt\right)^{\frac12},$$

où $B(x,R)$ est la boule de $\mathbb{R}^2$ centrée en x et de rayon R. On considère les équations de Navier-Stokes

$$(NS)\quad\begin{cases}\partial_t u-\Delta u+u\cdot\nabla u=-\nabla p \quad \textit{dans}\quad \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2\\ \textit{div}\ u=0\\ u_{|t=0}=u_0\end{cases}$$

dont on rappelle la formulation intégrale :

$$u(t)=e^{t\Delta}u_0+B(u,u)(t),\quad \textit{avec}\quad B(f,g)(t):=\int_0^t e^{(t-t')\Delta}\mathbf{P}\,\textit{div}\,(f(t')\otimes g(t'))\,dt'.$$

On suppose que u_0 appartient à l'adhérence de la classe de Schwartz $\mathcal{S}$ pour la norme $\|\cdot\|_X$ définie par

$$\|u_0\|_X := \sup_{R>0}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\left(\int_0^{R^2}R^{-2}\int_{B(x,R)}|e^{t\Delta}u_0|^2\,dydt\right)^{\frac12}.$$

On rappelle qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\|u_0\|_X \leq \varepsilon$, alors il existe une unique solution globale à (NS) dans X_T (pour tout $T > 0$) associée à u_0, dont la norme dans X_T reste contrôlée uniformément en temps par $2\|u_0\|_X$. On admettra dans la suite que cette solution appartient également à l'espace $\widetilde{X}_T$ (pour tout $T > 0$) défini par

$$\|f\|_{\widetilde{X}_T} := \|f\|_{X_T} + \sup_{0<t<T} t\|\nabla f(t)\|_{L^\infty},$$

et que l'on a en outre $\|u\|_{\widetilde{X}_T} \leq 2\|u_0\|_X$ pour tout $T > 0$. On a ainsi en particulier

$$\|B(f,g)\|_{X_T} \leq C\|f\|_{X_T}\|g\|_{X_T} \quad et \quad \|B(f,g)\|_{\widetilde{X}_T} \leq C\|f\|_{\widetilde{X}_T}\|g\|_{\widetilde{X}_T}.$$

I. Préliminaires (propagation de la régularité)

On rappelle le théorème de point fixe suivant : si X est un espace de Banach, L est un opérateur linéaire sur X de norme $\lambda < 1$, et B est un opérateur bilinéaire de norme γ, alors pour tout $y \in X$ tel que $4\gamma\|y\|_X < (1-\lambda)^2$, la suite définie par $x_0 = y$ et

$$x_{n+1} = y + Lx_n + B(x_n, x_n)$$

converge dans X vers l'unique solution de

$$x = y + Lx + B(x,x)$$

telle que $2\gamma\|x\|_X < 1 - \lambda$ et on a de plus $\|x\|_X \leq C\|y\|_X$.

On suppose de plus que y appartient à un espace de Banach Y, que L est linéaire sur Y de norme $\mu < 1$ et que

$$\|B(f,g)\|_Y + \|B(g,f)\|_Y \leq \kappa\|f\|_X\|g\|_Y.$$

Montrer que si $\kappa(1-\lambda) < \gamma(1-\mu)$, alors x_n converge vers x dans Y et $\|x\|_Y \leq C\|y\|_Y$.

II. Existence globale

On suppose que u_0 appartient à l'adhérence de la classe de Schwartz $\mathcal{S}$ pour la norme $\|\cdot\|_X$, sans supposer de condition de petitesse sur u_0. On considère u, solution de (NS) dont on suppose qu'elle existe et est unique dans X_T pour un certain $T > 0$, et on se propose de montrer qu'elle est en fait globalement définie dans X_T, pour tout $T > 0$.

On se fixe un paramètre $\varepsilon > 0$ qui sera choisi suffisamment petit dans la suite.

1. Montrer qu'il existe $v_0 \in \mathcal{S}$ et $w_0 \in X$ tels que

$$u_0 = v_0 + w_0 \quad \text{et} \quad \|w_0\|_X \leq \varepsilon.$$

Soit w l'unique solution globale de (NS) associée à w_0, dans l'espace $X_T \cap \widetilde{X}_T$ pour tout $T > 0$ (dont l'existence a été rappellée ci-dessus), et soit $v := u - w$. Montrer que

$$v(t) = e^{t\Delta}v_0 + B(w,v)(t) + B(v,w)(t) + B(v,v)(t).$$

2. On définit, pour tout champ de vecteur f et tout temps $T > 0$,

$$\|f\|_{Y_T} := \|f\|_{L^\infty([0,T];L^2)} + \sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}} \|\nabla f(t)\|_{L^2}.$$

On se propose de démontrer qu'il existe $T_0 > 0$ tel que l'équation vérifiée par v admette une unique solution dans $\widetilde{X}_{T_0} \cap Y_{T_0}$.

(a) Montrer que

$$\lim_{T\to 0} \|e^{t\Delta} v_0\|_{\widetilde{X}_T} = 0.$$

(b) Montrer que si ε est suffisamment petit, alors

$$\|B(v,w)\|_{\widetilde{X}_T} + \|B(w,v)\|_{\widetilde{X}_T} \leq \frac{1}{2} \|v\|_{\widetilde{X}_T}.$$

(c) En déduire qu'il existe une unique solution v dans $\widetilde{X}_{T_0}$ pourvu que T_0 soit assez petit.

(d) On souhaite montrer que B est bicontinue de $\widetilde{X}_T \times Y_T$ dans Y_T. Dans la suite on écrira, pour $j \in \{1,2\}$,

$$B^j(w,v)(t) = \sum_{k,\ell=1}^{2} \int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{3}{2}}} \Gamma^j_{k,\ell}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-t'}}\right) \star (w^k(t') v^\ell(t'))\, dt'$$

et, pour $i \in \{1,2\}$,

$$\partial_i B^j(w,v) = \sum_{k,\ell=1}^{2} \int_0^t \frac{1}{(t-t')^2} \Gamma^{i,j}_{k,\ell}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-t'}}\right) \star (w^k(t') v^\ell(t'))\, dt'$$

où $\Gamma^j_{k,\ell}$ et $\Gamma^{i,j}_{k,\ell}$ sont des fonctions de $L^1 \cap L^\infty$.
Question subsidiaire : justifier ces affirmations.

i. Montrer que

$$\int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}\sqrt{t'}} \leq C.$$

ii. En déduire que

$$\|B(v,w)(t)\|_{L^2} \leq C \left(\sup_{0<t'<t} \sqrt{t'} \|w(t')\|_{L^\infty}\right) \left(\sup_{0<t'<t} \|v(t')\|_{L^2}\right),$$

puis que

$$\|B(v,w)(t)\|_{L^\infty([0,T];L^2)} \leq C \|w\|_{\widetilde{X}_T} \|v\|_{Y_T}.$$

On décompose

$$\begin{aligned} B(v,w) &= B_1(v,w) + B_2(v,w), \quad \text{avec} \\ B_1(v,w)(t) &:= \int_0^{t/2} e^{(t-t')\Delta} \mathbf{P}\mathrm{div}\,(w(t') \otimes v(t'))\, dt'. \end{aligned}$$

iii. Montrer que

$$\|\nabla B_1(v,w)(t)\|_{L^2} \leq C \left(\sup_{0<t'<t} \sqrt{t'} \|w(t')\|_{L^\infty} \right) \left(\sup_{0<t'<t} \|v(t')\|_{L^2} \right) \int_0^{t/2} \frac{dt'}{(t-t')\sqrt{t'}}$$

et en déduire que

$$\sup_{0<t<T} \sqrt{t} \|\nabla B_1(v,w)(t)\|_{L^2} \leq C \|w\|_{\widetilde{X}_T} \|v\|_{Y_T}.$$

iv. Montrer de même que

$$\sup_{0<t<T} \sqrt{t} \|B_2(\nabla w, v)(t)\|_{L^2} \leq C \left(\sup_{0<t'<t} t' \|\nabla w(t')\|_{L^\infty} \right) \|v\|_{Y_T}.$$

v. Montrer de même que

$$\sup_{0<t<T} \sqrt{t} \|B_2(w, \nabla v)(t)\|_{L^2} \leq C \left(\sup_{0<t'<t} \sqrt{t'} \|w(t')\|_{L^\infty} \right) \left(\sup_{0<t'<t} \sqrt{t'} \|\nabla v(t')\|_{L^\infty} \right).$$

vi. Conclure.

(e) En déduire que si ε est suffisamment petit, alors

$$\|B(v,w)\|_{Y_T} + \|B(w,v)\|_{Y_T} \leq \frac{1}{2} \|v\|_{Y_T},$$

et conclure à l'existence et à l'unicité de v dans $\widetilde{X}_{T_0} \cap Y_{T_0}$, pour T_0 suffisamment petit.

3. Soit $\tau > 0$ tel que $v(\tau) \in L^2$. Soit v_τ un champ de vecteurs de divergence nulle dans L^2. Montrer que la solution de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t v - \Delta v + v \cdot \nabla v + w \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w = -\nabla p \\ \text{div } v = 0 \\ v_{|t=\tau} = v_\tau \end{array} \right.$$

vérifie l'estimation a priori formelle

$$\|v\|^2_{L^\infty([\tau,t];L^2)} + \|\nabla v\|^2_{L^2([\tau,t];L^2)} \leq C \left(\frac{t}{\tau} \right)^{C\varepsilon} \|v_\tau\|^2_{L^2}.$$

4. En déduire que la solution v précédente se prolonge à $\mathbb{R}^+$ et en posant $u = v + w$ montrer qu'il existe une solution globale issue de u_0, telle que

$$\sup_{0<R<\sqrt{T}} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left(\int_0^{R^2} R^{-2} \int_{B(x,R)} |u(y,t)|^2 \, dy dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(1+t)^\delta,$$

avec $\delta = C\varepsilon$.

III. Comportement asymptotique en temps

On suppose de plus ici que $u_0 \in \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}}$, avec p et q dans $[2,\infty[$. Soit u la solution globale en temps associée, telle que construite ci-dessus. On suppose en outre qu'il existe $r \in]2,\infty[$ tel que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}}) \cap L^r(\mathbb{R}^+; \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1+\frac{2}{r}}),$$

et l'on souhaite montrer que $\|u(t)\|_{\dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}}} \to 0$ quand t tend vers l'infini.

1. Soit $\delta \in \left]0, \frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right[$ fixé, et $\varepsilon > 0$ choisi suffisamment petit.

   Montrer qu'il existe $v_0 \in L^2 \cap \dot{H}^{-\delta}$ et $w_0 \in \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}}$ avec $\|w_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}}} \leq \varepsilon$ tels que

   $$u_0 = v_0 + w_0.$$

   On note w l'unique solution globale à (NS) associée à w_0, telle qu'en particulier

   $$\sup_{t \geq 0} \left(\sqrt{t}\|w(t)\|_{L^\infty}\right) \leq 2\varepsilon,$$

   et soit $v = u - w$. Vérifier que v satisfait l'équation suivante :

   $$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + v \cdot \nabla v + w \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w = -\nabla p \\ \text{div } v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0. \end{cases}$$

   On suppose démontré que pour tout temps $t \geq 0$, on a $\|v(t)\|_{\dot{H}^{-\delta}} \leq C$.

2. Montrer que

   $$\left|(v \cdot \nabla w | v)_{\dot{H}^{-\delta}}\right| \leq C\|w\|_{L^\infty}\|v\|_{\dot{H}^{1-2\delta}}\|v\|_{L^2}$$

   et en déduire que

   $$\left|(v \cdot \nabla w | v)_{\dot{H}^{-\delta}}\right| \leq C\|w\|_{L^\infty}\|v\|_{\dot{H}^{1-\delta}}\|v\|_{\dot{H}^{-\delta}}$$

3. On se propose de montrer que

   $$\left|(v \cdot \nabla v | v)_{\dot{H}^{-\delta}}\right| \leq C\|v\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1+\frac{2}{r}}}\|v\|_{\dot{H}^{1-\delta-\frac{2}{r}}}\|v\|_{\dot{H}^{-\delta}}.$$

   On écrit, avec les notations du cours, l'algorithme de paraproduit

   $$v \cdot \nabla v = \sum_{k=1}^{2} \left(R(v^k, \partial_k v) + T_{v^k}\partial_k v + T_{\partial_k v} v^k\right).$$

   (a) Montrer que pour tout $k \in \{1,2\}$,

   $$\left|\sum_j \left(\Delta_j R(v^k, \partial_k v) | \Delta_j v\right)_{\dot{H}^{-\delta}}\right| \leq C\|v\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1+\frac{2}{r}}} \sum_{|j-j'|\leq 1} 2^{j(2-2\delta-\frac{2}{r})}\|\Delta_j v\|_{L^2}\|\Delta_{j'} v\|_{L^2}$$

   et en déduire le résultat.

(b) Estimer de même les termes de paraproduit.

4. En déduire l'estimation formelle

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{\dot H^{-\delta}} + \frac{\nu}{2}\|v(t)\|^2_{\dot H^{1-\delta}} \leq C\|v(t)\|^2_{\dot H^{-\delta}}(\|v(t)\|^r_{\dot B^{-1+\frac{2}{r}}_{\infty,\infty}} + \|w(t)\|^2_{L^\infty}),$$

puis montrer que pour tout $T > 0$ et pour $\tau \in]0, T[$,

$$\|v\|^2_{L^\infty([\tau,T];\dot H^{-\delta})} + \nu\|v\|^2_{L^2([\tau,T];\dot H^{1-\delta})} \leq C\left(\frac{T}{\tau}\right)^{C\varepsilon}.$$

5. En déduire que

$$\|v\|_{L^{\frac{2}{\delta}}([\tau,T];L^2)} \leq C\left(\frac{T}{\tau}\right)^{C\varepsilon}$$

puis

$$\inf_{t'\in[\tau,T]}\|v(\tau')\|_{L^2}(T-\tau)^{\frac{\delta}{2}} \leq C\left(\frac{T}{\tau}\right)^{C\varepsilon}.$$

6. Conclure (en prenant par exemple $T > \tau + 1$ et $\tau \to \infty$).

EXERCICE. (4 points)

Soit $\mathcal{C}$ une couronne de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0, et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dans tout cet exercice, u désignera une fonction dont la transformée de Fourier est supportée dans la couronne $\mathcal{C}$.

1. Démontrer qu'il existe une famille de fonctions $(u_j)_{1\leq j\leq d}$ dont la transformée de Fourier est à support dans $\mathcal{C}$ et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^{2p}\,dx = \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u_j\, u^{2p-1}\,dx \quad \text{et} \quad \|u_j\|_{L^{2p}} \leq C\|u\|_{L^{2p}}.$$

2. En déduire que $\|u^p\|_{L^2} \leq C\|\nabla(u^p)\|_{L^2}$.