Examen du 26 octobre 2009

Théorie des équations d'évolution

Trois heures

Seules les notes personnelles dans le cadre du module sont autorisées. Les exercices sont indépendants entre eux. Les notations sont celles du cours.

Le barême est indicatif.

NB : Dans tout le sujet, les constantes seront notées par la même lettre C et pourront être différentes d'une ligne à l'autre.

Exercice 1. (Espaces de Besov ; 4 points)

1. Soit $q \in [1, \infty]$. Montrer que $L^q(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $\dot{B}^0_{q,\infty}(\mathbb{R}^d)$.
2. Soient p et q deux éléments de $[1, \infty]$, avec $q \geq p$. Montrer que $\dot{B}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{q}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $L^q(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 2. (Action de commutateurs sur les espaces de Besov ; 8 points)

1. Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $(1+|\cdot|)\mathcal{F}^{-1}f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On souhaite montrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour toute fonction Lipschitzienne a et toute fonction b dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1,\infty]$ on a

$$\forall \lambda > 0, \quad \|[f(\lambda^{-1}D), a]b\|_{L^p} \leq C\lambda^{-1}\|\nabla a\|_{L^\infty}\|b\|_{L^p},$$

où l'on rappelle que $[A,B] = AB - BA$.

   (a) Montrer que si $\theta = \mathcal{F}^{-1}f$, alors

$$[f(\lambda^{-1}D), a]b(x) = \lambda^d \int_{\mathbb{R}^d} \theta(\lambda(x-y))(a(y)-a(x))b(y)\, dy.$$

   (b) Conclure.

2. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, homogène de degré $m \geq 0$. Soit $\rho \in]0,1[$ et soient $s \in \mathbb{R}, (p,r) \in [1,\infty]^2$. On veut montrer qu'il existe une constante $C>0$ ne dépendant que de s, ρ et d telle que pour toutes les fonctions $a \in \dot{B}^\rho_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d)$ et $b \in \dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$

$$\|[T_a, f(D)]b\|_{\dot{B}^{s-m+\rho}_{p,r}} \leq C\|a\|_{\dot{B}^\rho_{\infty,\infty}}\|b\|_{\dot{B}^s_{p,r}}, \tag{1}$$

où T_a désigne l'opérateur de paraproduit, dont on rappelle qu'il est défini par

$$T_a b = \sum_j S_{j-1}a\Delta_j b,$$

avec $\Delta_j = \varphi(2^{-j}D)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et $S_j a = \sum_{j' \leq j-1} \Delta_{j'}a = \chi(2^{-j}D)a$ pour tout $a \in \mathcal{S}'_h$.

   (a) Montrer que si $\widetilde{\varphi}$ est une fonction régulière, supportée dans une couronne, et égale à 1 sur $\operatorname{Supp}\varphi + \operatorname{Supp}\chi(2\,\cdot)$, et si $\widetilde{\Delta}_j = \widetilde{\varphi}(2^{-j}D)$, alors

$$[T_a, f(D)]b = \sum_j [S_{j-1}a, f(D)\widetilde{\Delta}_j]\Delta_j b.$$

   (b) En déduire qu'il suffit de démontrer que

$$\left\| 2^{j(s-m+\rho)}\|[S_{j-1}a, f(D)\widetilde{\Delta}_j]\Delta_j b\|_{L^p} \right\|_{\ell^r} \leq C\|a\|_{\dot{B}^\rho_{\infty,\infty}}\|b\|_{\dot{B}^s_{p,r}}.$$

   (c) Utiliser la question 1 pour montrer que

$$\|[S_{j-1}a, f(D)\widetilde{\Delta}_j]\Delta_j b\|_{L^p} \leq C2^{j(m-1)}\|\nabla S_{j-1}a\|_{L^\infty}\|\Delta_j b\|_{L^p}.$$

   (d) Conclure.

Exercice 3. (Régularité du flot de champs de vecteurs log-lipschitziens ; 8 points)

Dans cet exercice l'on se place dans le cadre des équations différentielles ordinaires non linéaires, associées à des champs de vecteurs quasi-lipschitziens. Le but de l'étude est de montrer une estimation de perte de régularité exponentielle du flot d'un champ de vecteurs log-lipschitz.

On rappelle quelques notions du cours : un module de continuité d'Osgood est une fonction μ définie sur un intervalle du type $[0, a]$, nulle en zéro, strictement positive ailleurs, croissante et continue, et telle que pour tout $x \in]0, a]$,

$$\mathcal{M}(x) := \int_x^a \frac{dr}{\mu(r)} < \infty, \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(0) = \infty.$$

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on définit l'espace C_μ par la norme

$$\|f\|_\mu := \|f\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\mu(|x - y|)} \cdot$$

On rappelle également que si x_1 et x_2 vérifient

$$\forall\, t \in [t_0, t_1], \quad x_j(t) = x_j^0 + \int_{t_0}^t f(t', x_j(t'))\, dt', \quad \text{pour} \quad j = 1, 2,$$

où $f \in L^1([t_0, t_1]; C_\mu)$, alors $\rho(t) := |x_1(t) - x_2(t)|$ vérifie

$$\text{p.p. } t \in [t_0, t_1], \quad \rho(t) \leq |x_1^0 - x_2^0| + \int_{t_0}^t \mu(\rho(t')) \|f(t')\|_\mu \, dt'.$$

Dans cet exercice on obtient des estimations de ρ en temps court (voir (2) ci-dessous) et en temps long (voir (3) ci-dessous).

1. Soit μ un module de continuité d'Osgood défini sur un intervalle $[0, a]$, et soit $\mathcal{M}$ la fonction définie par

   $$\mathcal{M}(x) = \int_x^a \frac{dr}{\mu(r)} \cdot$$

   Soit γ une fonction positive, intégrable sur $[t_0, t_1]$ et soit ρ une fonction mesurable telle que

   $$\text{p.p. } t \in [t_0, t_1], \quad \rho(t) \leq \rho(t_0) + \int_{t_0}^t \gamma(t') \mu(\rho(t'))\, dt'.$$

   (a) Montrer que la fonction $\mathcal{M}$ est bijective de $]0, a]$ sur $[0, \infty[$.

   (b) Montrer que si t est tel que $\displaystyle\int_{t_0}^t \gamma(t')\, dt' \leq \mathcal{M}(\rho(t_0))$, alors

   $$\rho(t) \leq \mathcal{M}^{-1} \left(\mathcal{M}(\rho(t_0)) - \int_{t_0}^t \gamma(t')\, dt' \right). \tag{2}$$

(c) On considère un champ de vecteurs v dans $L^1([t_0,t_1];C_\mu)$. Soient x_1 et x_2 vérifiant

$$\forall\, t\in[t_0,t_1],\quad x_j(t)=x_j^0+\int_{t_0}^t v(t',x_j(t'))\,dt',\quad \text{pour}\quad j=1,2.$$

Appliquer le résultat précédent pour estimer $\|x_1(t)-x_2(t)\|$ en fonction de $\|x_1-x_2\|$ et de $\displaystyle\int_{t_0}^t \|v(t')\|_\mu\,dt'$, sous la condition que $\displaystyle\int_{t_0}^t \|v(t')\|_\mu\,dt'\le \mathcal{M}(\|x_1-x_2\|)$.

2. On suppose dans cette question que $\mu(r)=r(1-\log r)$.
   (a) Montrer que μ est un module de continuité d'Osgood sur $[0,1]$, et calculer $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^{-1}$.
   (b) On considère v un champ de vecteurs dépendant du temps, dans $L^1_{loc}([0,T];LL)$ où la norme log-lipschitz LL est définie par

$$\|f\|_{LL}:=\sup_{0<|x-x'|\le 1}\frac{|f(x)-f(x')|}{|x-x'|(1-\log|x-x'|)}.$$

   On note $V_{LL}(t):=\displaystyle\int_0^t\|v(t')\|_{LL}\,dt'$.

   i. Montrer qu'il existe une unique application $\Psi:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ telle que

$$\Psi(t,x)=x+\int_0^t v(t',\Psi(t',x))\,dt'.$$

   ii. En utilisant la question 1, montrer l'estimation suivante : si $|x-y|\le e^{1-\exp V_{LL}(t)}$, alors

$$|\Psi(t,x)-\Psi(t,y)|\le |x-y|^{\exp(-V_{LL}(t))}e^{1-\exp(-V_{LL}(t))}.$$

   iii. En déduire que pour tout $t>0$, la fonction $\Psi_t:x\mapsto\Psi(t,x)$ vérifie

$$\Psi_t-\mathrm{Id}\in C^{\exp(-V_{LL}(t))}.$$

3. (Cette question est indépendante des précédentes)
On considère μ, module de continuité d'Osgood dans $C([0,a];\mathbb{R}^+)$, une fonction ρ mesurable sur $[t_0,t_1]$ à valeurs dans $[a^{-1},\infty[$, et une fonction γ positive, intégrable sur $[t_0,t_1]$. On suppose que pour presque tout $t\in[t_0,t_1]$, on a

$$\rho(t)\le\rho(t_0)+\int_{t_0}^t\gamma(t')\Gamma(\rho(t'))\rho(t')\,dt'$$

avec $\Gamma(r)=r\mu(1/r)$. Montrer que l'application

$$\mathcal{G}(y)=\int_{1/a}^y\frac{dy'}{y'\Gamma(y')}$$

est bijective de $[a^{-1},\infty[$ dans $[0,\infty[$ et montrer que pour presque tout $t\in[t_0,t_1]$, on a

$$\rho(t)\le\mathcal{G}^{-1}\left(\mathcal{G}(\rho(t_0))+\int_{t_0}^t\gamma(t')\,dt'\right).\tag{3}$$

Indication : on pourra étudier $R(t)=\rho(t_0)+\displaystyle\int_{t_0}^t\gamma(t')\Gamma(\rho(t'))\rho(t')\,dt'$ et raisonner comme dans la démonstration du théorème d'existence et d'unicité vu en cours.