Examen du 4 janvier 2010
Théorie des équations d'évolution
Trois heures

Seules les notes personnelles dans le cadre du module sont autorisées.

Les notations sont celles du cours.

*NB : Dans tout le sujet, les constantes seront notées par la même lettre C et pourront être différentes d'une ligne à l'autre. Les questions plus difficiles sont signalées par un signe *. On pourra les sauter dans un premier temps, mais on prendra garde au fait que le résultat de la question pourra être utile par la suite.*

L'équation de Camassa-Holm

$$(CH) \qquad \partial_t u + u\partial_x u + \frac{1}{2}\partial_x\Big(e^{-|x|} * \Big(u^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u)^2\Big)\Big) = 0$$

est un modèle classique pour la propagation des ondes dans un canal peu profond. La fonction inconnue u représente l'amplitude des ondes. Elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dépend de la variable de temps $t \in \mathbb{R}$ et de la variable d'espace $x \in \mathbb{R}$.

Nous souhaitons résoudre le problème de Cauchy associé à (CH) pour des données initiales appartenant à l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$.

Partie préliminaire

Démontrer l'inégalité de Gronwall suivante : soit $u_0 \in \mathbb{R}^+$, et soient u, a et f trois fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que

$$\forall t \in [0,T], \quad u(t) \leq u_0 + \int_0^t f(t')\,dt' + \int_0^t a(t')u(t')\,dt'.$$

Montrer que

$$\forall t \in [0,T], \quad u(t) \leq u_0 \exp\left(\int_0^t a(t')\,dt'\right) + \int_0^t f(t')\,\exp\left(\int_{t'}^t a(t'')\,dt''\right)\,dt'.$$

Première partie : équation de transport

Dans cette partie, on s'intéresse à l'équation de transport :

$$(\mathcal{T}) \qquad \partial_t f + v\,\partial_x f = g.$$

1. On suppose que $f \in \mathcal{C}([0,T]; H^1) \cap \mathcal{C}^1([0,T]; L^2)$, $g \in \mathcal{C}([0,T]; L^2)$, $v \in \mathcal{C}([0,T]; H^2)$ et que f vérifie $(\mathcal{T})$ au sens des distributions sur $[0,T] \times \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que l'inégalité suivante est vérifiée sur $[0,T]$:
   $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2} + \frac{1}{2}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|f\|_{L^2}^2.$$

   (b) Soit $\varepsilon > 0$ et $F_\varepsilon(t) := \sqrt{\varepsilon^2 + \|f(t)\|_{L^2}^2}$. Montrer que
   $$\forall t \in [0,T],\ F_\varepsilon'(t) \le \|g(t)\|_{L^2} + \frac{1}{2}\|\partial_x v(t)\|_{L^\infty} F_\varepsilon(t).$$

   (c) En déduire que pour tout $t \in [0,T]$, on a
   $$\|f(t)\|_{L^2} \le \|f(0)\|_{L^2} + \int_0^t \|g(t')\|_{L^2}\,dt' + \frac{1}{2}\int_0^t \|\partial_x v(t')\|_{L^\infty}\|f(t')\|_{L^2}\,dt'. \quad (1)$$

2. On suppose maintenant que $f \in \mathcal{C}([0,T]; H^3) \cap \mathcal{C}^1([0,T]; H^2)$, que $g \in \mathcal{C}([0,T]; H^2)$ et que $v \in \mathcal{C}([0,T]; H^3)$. Montrer que
   $$e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \|\partial_x v(t')\|_{L^\infty}\,dt'}\|f(t)\|_{L^2} \le \|f(0)\|_{L^2} + \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\int_0^{t'} \|\partial_x v(t'')\|_{L^\infty}\,dt''}\|g(t')\|_{L^2}\,dt', \quad (2)$$
   $$e^{-\frac{3}{2}\int_0^t \|\partial_x v(t')\|_{L^\infty}\,dt'}\|\partial_x f(t)\|_{L^2} \le \|\partial_x f(0)\|_{L^2} + \int_0^t e^{-\frac{3}{2}\int_0^{t'} \|\partial_x v(t'')\|_{L^\infty}\,dt''}\|\partial_x g(t')\|_{L^2}\,dt'. \quad (3)$$

   Montrer également l'existence d'une constante C telle que
   $$e^{-\int_0^t \|\partial_x v(t')\|_{H^1}\,dt'}\tilde{\|}f(t)\|_{H^2} \le \tilde{\|}f(0)\|_{H^2} + \int_0^t e^{-C\int_0^{t'} \|\partial_x v(t'')\|_{H^1}\,dt''}\tilde{\|}g(t')\|_{H^2}\,dt' \quad (4)$$

   où l'on a posé $\tilde{\|}f\|_{H^2} = \|f\|_{L^2} + \|\partial_x f\|_{L^2} + \|\partial_{xx}^2 f\|_{L^2}$.

3. On note J_n *l'opérateur de Friedrichs* défini sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par $\mathcal{F}(J_n h) = 1_{[-n,n]}\mathcal{F}h$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1([0,T]; L^2)$, $g \in \mathcal{C}([0,T]; L^2)$ et $v \in \mathcal{C}([0,T]; H^2)$ vérifient
   $$\partial_t J_n f + J_n(v\,\partial_x J_n f) = J_n g.$$

   Montrer que la fonction $J_n f$ vérifie aussi les inégalités (1), (2), (3) et (4), avec une constante C indépendante de n.

Deuxième partie : étude d'un opérateur bilinéaire

Cette partie est consacrée à l'étude de la continuité de l'application bilinéaire :

$$B : (f, g) \longmapsto -\partial_x(1-\partial^2_{xx})^{-1}\Big(fg + \frac{1}{2}\partial_x f \partial_x g\Big).$$

*1. Vérifier que $f \mapsto f - \partial^2_{xx} f$ est une isométrie bijective de H^s sur H^{s-2} pour tout $s \in \mathbb{R}$ et que l'application inverse $(1-\partial^2_{xx})^{-1}$ restreinte à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ coïncide avec l'application $g \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|} * g$. On pourra d'abord calculer $(1-\partial^2_{xx})(e^{-|x|})$ au sens des distributions.

2. Soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sigma_1 > 1/2$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$ et $\sigma_2 \leq \sigma_1$.
   - *(a) Montrer que l'opérateur de paraproduit est continu de $H^{\sigma_1}(\mathbb{R}) \times H^{\sigma_2}(\mathbb{R})$ dans $H^{\sigma_2}(\mathbb{R})$ et de $H^{\sigma_2}(\mathbb{R}) \times H^{\sigma_1}(\mathbb{R})$ dans $H^{\sigma_2}(\mathbb{R})$.
   - (b) Montrer que l'opérateur de reste est continu de $H^{\sigma_1}(\mathbb{R}) \times H^{\sigma_2}(\mathbb{R})$ dans $H^{\sigma_2}(\mathbb{R})$.
   - (c) En déduire que le produit de deux distributions est une application continue de $H^{\sigma_1}(\mathbb{R}) \times H^{\sigma_2}(\mathbb{R})$ dans $H^{\sigma_2}(\mathbb{R})$, et que $H^{\sigma_1}(\mathbb{R})$ est une algèbre si $\sigma_1 > 1/2$.

3. On fixe un couple (s, t) de réels tels que $s > 3/2$, $t \leq s$ et $s + t > 2$.
   - (a) À l'aide des questions précédentes, montrer que l'application

     $$(f, g) \mapsto fg + \frac{1}{2}\,\partial_x f \partial_x g$$

     se prolonge en un opérateur bilinéaire continu de $H^s \times H^t$ dans H^{t-1}.
   - (b) En déduire que B se prolonge en un opérateur bilinéaire (encore noté B) continu de $H^s \times H^t$ dans H^t.

Troisième partie : résolution locale de l'équation de Camassa-Holm

Cette partie est consacrée à la résolution locale de (CH) avec donnée initiale $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution maximale $u^n \in \mathcal{C}^1(]T_n^-, T_n^+[; L^2(\mathbb{R}))$ à l'équation différentielle ordinaire

   $$\frac{d}{dt}u^n = J_n\Big(B(J_n u^n, J_n u^n) - J_n u^n \partial_x J_n u^n\Big)$$

   avec donnée $J_n u_0$ en 0.
2. Montrer que $J_n u^n = u^n$ et que u^n appartient à $\mathcal{C}^1(]T_n^-, T_n^+[; H^s(\mathbb{R}))$ pour tout réel s.

3. À l'aide des résultats des parties précédentes, montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $t \in [0, T_n^+[$, on ait

$$e^{-C\int_0^t \tilde{\|}u^n(t')\|_{H^2}\,dt'}\tilde{\|}u^n(t)\|_{H^2} \leq \tilde{\|}u_0\|_{H^2} + C\int_0^t e^{-C\int_0^{t'}\tilde{\|}u^n(t'')\|_{H^2}\,dt''}\tilde{\|}u^n(t')\|_{H^2}^2\,dt'.$$

4. En déduire l'existence d'une constante C_0 telle que

$$\tilde{\|}u^n(t)\|_{H^2} \leq \frac{\tilde{\|}u_0\|_{H^2}}{1 - C_0\tilde{\|}u_0\|_{H^2}t}$$

   pour tout $t \in [0, T_n^+[$ tel que $1 - C_0\tilde{\|}u_0\|_{H^2}t > 0$.
5. On pose $T = 1/(2C_0\|u_0\|_{H^2})$. Montrer que $T_n^+ > T$.
6. Montrer que la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}([0,T]; H^2) \cap \mathcal{C}^1([0,T]; H^1)$.
7. Montrer que pour toute fonction test φ, l'application $u \mapsto \varphi u$ est compacte de $H^1(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

*8. En déduire l'existence d'une sous-suite de $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge au sens des distributions vers une solution $u \in L^\infty([0,T]; H^2)$ de (CH) avec donnée initiale u_0.

   On pourra introduire une fonction de troncature $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(B(0,2))$ valant 1 sur $B(0,1)$, poser $\chi_p = \chi(2^{-p}\cdot)$ pour $p \in \mathbb{N}$, considérer la suite $(\chi_p\, u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis utiliser le procédé diagonal.

9. On admet que u est dans $\mathcal{C}([0,T]; H^2)$. Montrer que u est aussi dans $\mathcal{C}^1([0,T]; H^1)$.
10. Soit u et v deux solutions de (CH) appartenant à $\mathcal{C}([0,T]; H^2)$. On note $w = v - u$.
    (a) Vérifier que $\partial_t w + v\partial_x w = B(u+v, w) - w\partial_x u$.
    (b) À l'aide des résultats des parties précédentes, montrer que

$$\|w(t)\|_{H^1} \leq \|w(0)\|_{H^1}e^{CV(t)} \quad \text{avec} \quad V(t) = C\int_0^t \Big(\|u(t')\|_{H^2} + \|v(t')\|_{H^2}\Big)\,dt'$$

    pour une constante C que l'on ne cherchera pas à calculer.
    (c) En déduire que (CH) admet une unique solution avec donnée initiale u_0 dans l'espace $\mathcal{C}([0,T]; H^2)$.
11. Énoncer le théorème obtenu.

Quatrième partie : solitons *(partie facultative)*

On cherche à déterminer des solutions particulières de (CH) appelées *solitons*. Ces solitons sont des fonctions de la forme $u(t,x) = \varphi(x-ct)$ où la *célérité* c est un réel (positif pour fixer les idées) donné et le *profil* φ est une fonction continue tendant vers 0 à l'infini, et dérivable presque partout à dérivée bornée.

1. Vérifier que $(t,x) \mapsto \varphi(x-ct)$ est solution de (CH) si et seulement si φ vérifie :

$$\varphi'(\varphi - c) = -\frac{1}{2}\partial_x\Big(e^{-|x|} * \Big(\varphi^2 + \frac{1}{2}\varphi'^2\Big)\Big).$$

2. On pose $\psi(x) = e^{-|x|}$. Calculer ψ' et $\psi * \psi^2$.
3. En déduire que les fonctions $u(t,x) = ce^{-|x-ct|}$ sont des solitons de (CH).
4. Dans le cas $c \neq 0$, le profil de ces solitons est-il C^1 ou lipschitzien ?
5. Montrer que la fonction $e^{-|x|}$ est dans tous les espaces de Sobolev $H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}$ mais n'est pas dans $H^{\frac{3}{2}}$.
6. Le théorème énoncé dans la troisième partie permet-il de trouver ces solitons ?