Séminaire Bourbaki Novembre 2003
56ème année, 2003-2004, n° 926

RÉSULTATS RÉCENTS SUR LA LIMITE INCOMPRESSIBLE

par **Isabelle GALLAGHER**

1. INTRODUCTION

Les équations d'Euler compressibles modélisent le mouvement d'un fluide parfait (sans forces de viscosité interne) : elles s'écrivent sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles d'évolution non linéaires, portant sur le champ de vitesse et la densité du fluide. Ces équations s'obtiennent par minimisation d'une fonctionnelle d'énergie, dans l'espace des difféomorphismes (voir par exemple [2],[9]) : une particule au point x à l'instant t_0 est au point $\psi_1(x)$ au temps t_1, où ψ_1 est un difféomorphisme. La traduction de cette écriture lagrangienne en variables eulériennes conduit aux équations d'Euler compressibles. Les équations d'Euler incompressibles s'obtiennent quant à elles en se restreignant aux difféomorphismes préservant la mesure : le fluide est incompressible, et ainsi tout ouvert de l'espace est transporté en un ouvert de même volume au cours du mouvement. Le système d'équations aux dérivées partielles obtenu ne porte plus que sur le champ de vitesse (si l'on suppose de plus la densité constante), maintenant de divergence nulle. Le lecteur intéressé par l'obtention de ces équations à partir des lois fondamentales pourra par exemple consulter [40]. Les systèmes des fluides parfaits compressibles et incompressibles seront écrits précisément dans la section 1.1 suivante (systèmes (1) et (2) respectivement).

La question du passage du premier système (Euler compressible) au second (Euler incompressible), dans la limite où un "paramètre de compressibilité" (le nombre de Mach) tend vers zéro, a fait l'objet d'un grand nombre de travaux mathématiques depuis une vingtaine d'années. Les motivations sont nombreuses : mathématiquement tout d'abord, les équations incompressibles sont mieux comprises que les équations compressibles, et il est intéressant d'essayer de transposer à l'un des systèmes des résultats connus pour l'autre, par un argument de comparaison ou de passage à la limite. Physiquement ensuite, on a souvent tendance à considérer qu'un fluide "peu compressible" possède des propriétés semblables à celles d'un fluide incompressible — encore faut–il le justifier (voir par exemple [63] et [64]). Enfin dans des calculs numériques il est souvent préférable de considérer qu'un fluide est incompressible même lorsqu'il ne l'est pas, pour simplifier l'implémentation (voir à ce propos les travaux [37], [49], [53] et [54]).

Comme nous le verrons ici, ce problème du passage du compressible à l'incompressible fait intervenir des théories mathématiques variées, suivant l'espace physique dans lequel on plonge le fluide : ainsi des idées de l'optique géométrique sont utilisées dans le cas de conditions aux limites périodiques. Pour un fluide dans l'espace entier, ces aspects sont remplacés par des phénomènes dispersifs, et l'on fait appel à des estimations de type "Strichartz", ou encore à des techniques de mesures de défaut et des estimations de décroissance de l'énergie locale.

L'objectif de cet exposé est de donner un aperçu de "l'état de l'art" sur la question de la limite incompressible et de l'implémentation des techniques évoquées ci–dessus : nous verrons les différentes approches suivies depuis les travaux de S. Klainerman et A. Majda au début des années quatre–vingt dans le cas de "données bien préparées" (notion naturelle portant sur la données initiale, que nous présentons dans la section 1.1 ci–dessous) jusqu'aux travaux récents de G. Métivier et S. Schochet portant sur les équations non isentropiques (où l'on couple au système d'Euler compressible l'équation de transport de l'entropie).

Le plan de l'exposé est le suivant.

Dans la section 1.1 suivante nous présentons les équations relatives aux fluides compressibles et incompressibles respectivement, et nous rappelons brièvement les résultats principaux concernant le problème de Cauchy pour ces deux systèmes. Suit dans la section 1.2 la mise en évidence du paramètre de compressibilité dans l'équation compressible ; on étudie alors la limite formelle de ce système (retrouvant ainsi le système incompressible), et les notions de données "bien" et "mal préparées" sont dégagées.

Le paragraphe 2 traite du cas où les données initiales sont bien préparées, au sens défini dans la section 1.2 ; les premiers travaux concernant la limite incompressible se sont attachés à comprendre ce cas, plus simple.

Dans le paragraphe 3 on s'intéresse au cas général des données mal préparées. On commence par l'étude du cas où les équations sont posées dans l'espace entier (sections 3.1.1 et 3.1.2) : le mot clef de ces études est la dispersion. On s'aperçoit immédiatement que le cas de domaines bornés ne peut être résolu par de tels arguments. Le cas des conditions aux limites périodiques est ainsi traité en détail dans la section 3.2.1, alors que le cas de domaines à bords est effleuré dans la section 3.2.2.

Le dernier paragraphe est consacré à des travaux récents de G. Métivier et S. Schochet concernant la limite incompressible dans le cas non isentropique. Les difficultés mises en évidence dans les paragraphes précédents pour le cas isentropique sont amplifiées ici par le transport couplé de l'entropie : le cas de l'espace entier présente déjà de nouvelles difficultés (surmontées) alors que le cas périodique reste encore largement à comprendre.

Remarque 1.1. — Le souci de concision nous a amené à opérer de nombreuses "impasses" dans cette présentation. Ainsi nous avons choisi de ne pas parler de la dimension 1 d'espace (sauf à l'extrême fin de cet exposé pour étudier les équations des fluides non isentropiques), qui relève plutôt de techniques de lois de conservation ; nous renvoyons le lecteur intéressé par les problèmes spécifiques au cas monodimensionnel au livre de P.-L. Lions [41] Chapitre 8.7, et ses références. Notons que pour une étude d'oscillations dans le cas monodimensionnel on pourra aussi consulter l'article [17].

Nous ne parlerons pas non plus d'équations proches des équations d'Euler compressibles comme les équations de l'élasticité ou de la viscoélasticité, ni d'équations de la géophysique ou de la magnéto–hydrodynamique, qui soulèvent des problèmes mathématiques proches de ceux traités ici.

Enfin nous omettrons tout aspect lié à une éventuelle viscosité du fluide : les techniques pour traiter la limite incompressible dans le cas visqueux (passage de Navier–Stokes compressible à Navier–Stokes incompressible) sont bien sûr spécifiques dès que l'on cherche à utiliser l'effet régularisant du laplacien dans l'équation de Navier–Stokes (voir par exemple [10]-[12], [14], [42], [43] ou encore [48]), mais les effets purement "limite incompressible" sont indépendants de la présence ou non de viscosité — du moins tant qu'on ne traite pas de problèmes aux bords, nous y reviendrons en section 3.2.2 (pour d'autres travaux à ce sujet nous renvoyons le lecteur intéressé à [6], [15], [26], [38]).

Remerciements. Je souhaite remercier P. Gérard pour de nombreux conseils sur la rédaction de ce texte. J'adresse aussi mes remerciements à R. Danchin et ainsi qu'à G. Métivier pour des discussions sur les questions évoquées ici.

1.1. Présentation des équations et rappels sur le problème de Cauchy

Considérons un fluide compressible parfait évoluant dans un domaine Ω (que nous préciserons) de l'espace d-dimensionnel $\mathbb{R}^d$, dont la vitesse et la densité en un point $x \in \Omega$ et à un instant $t \in \mathbb{R}^+$ sont notées respectivement $u(t,x)$ (vecteur à d composantes) et $\rho(t,x)$ (scalaire). Ces deux quantités sont reliées par les équations d'Euler compressibles (isentropiques) suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) &= 0 \\ \rho &\geq 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla \rho^\gamma &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

avec $\gamma > 1$, et les conditions initiales

$$\rho_{|t=0} = \rho_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad u_{|t=0} = u_0.$$

Les équations incompressibles quant à elles s'écrivent ainsi :

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \tag{2}$$

avec toujours la condition initiale $u_{|t=0} = u_0$. Dans l'équation d'Euler incompressible (2), la fonction scalaire p représente la pression du fluide (c'est une inconnue du système, due à la contrainte d'incompressibilité). Remarquons que la densité a été choisie constante dans (2), égale à un pour simplifier. Dans le cas d'un domaine borné (régulier) Ω, il convient de prescrire dans les deux équations une condition au bord : $u \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$.

Rappelons quelques résultats sur le problème de Cauchy pour ces deux systèmes d'équations. Ce sont des EDP du premier ordre d'apparence très simple mais nos connaissances en sont relativement faibles : sur les équations compressibles par exemple, la théorie classique permet d'associer à une donnée initiale assez régulière une solution unique sur un temps maximal $[0, T_c]$, qui devient discontinue en T_c. Les solutions discontinues (simplement bornées par exemple) vérifiant l'équation au sens des distributions, ne sont ni uniques, ni stables : pour assurer leur stabilité (et parfois leur unicité), il faut imposer des restrictions, dites "conditions d'entropie de Lax" (voir la théorie de Lax [39]). Nous n'allons pas détailler ici cette théorie, mais simplement énoncer l'une de ses conséquences : dès que la dimension est plus grande que deux, il y a très peu d'entropies et donc très peu d'informations sur les solutions. Nous ne parlerons pas du problème de l'apparition de chocs ici, et notre étude partira du théorème fondamental suivant, qui se démontre en symétrisant le système (1) : en définissant la vitesse du son $c \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{2}{\gamma - 1}\left(\dfrac{\partial(\rho^\gamma)}{\partial\rho}\right)^{\frac12} = \dfrac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ le système d'Euler compressible (1) devient

$$
\begin{aligned}
&\partial_t c + u \cdot \nabla c + \frac{\gamma-1}{2} c \,\mathrm{div} u = 0 \\
&\partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{\gamma-1}{2} c \,\nabla c = 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

et la théorie des systèmes symétriques hyperboliques conduit au théorème suivant (voir par exemple [44], et [45] ou [55] pour le cas de domaines à bords).

THÉORÈME 1.2. — *Soit Ω un domaine régulier de l'espace $\mathbb{R}^d$, et soit s un entier strictement plus grand que $\frac{d}{2} + 1$. Il existe une constante C telle que si (u_0, c_0) sont des éléments de $H^s(\Omega)$ (u_0 s'annulant au voisinage du bord par exemple), alors il existe un temps T et une unique solution (u, c) dans l'espace $C^0([0,T], H^s(\Omega))$ au système* (3). *En outre on a la minoration suivante sur le temps d'existence : $T \geq \dfrac{C}{\|(u_0, c_0)\|_{H^s(\Omega)}}$.*

Dans ce théorème (et partout dans ce texte), l'espace $H^s(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω, dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre s sont de carré intégrable. Dorénavant nous noterons s_0 le plus petit entier strictement plus grand que $\frac{d}{2} + 1$. Notons que l'hypothèse d'annulation de la donnée initiale au voisinage du bord donnée dans l'énoncé du théorème 1.2 est l'une des conditions de compatibilité possibles (voir par exemple [55]). Notons en outre qu'il existe des solutions qui effectivement deviennent singulières en temps fini. Nous renvoyons le lecteur intéressé au travail de T. Sideris [59].

Concernant le système incompressible, la situation est un peu meilleure, du moins en dimension deux d'espace. En effet, en dimension deux, le tourbillon $\omega \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ est conservé le long des caractéristiques : il vérifie l'équation de transport $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0$ grâce à la condition de divergence nulle sur le champ de vitesse. Cette remarque permet de montrer le théorème suivant (voir [9],[40],[46],[62]).

THÉORÈME 1.3. — *Soit Ω un domaine régulier de l'espace $\mathbb{R}^2$, et soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ dont le tourbillon ω_0 est un élément de $L^r(\Omega)$ pour un réel r dans l'intervalle $]1, +\infty[$. Alors il existe une solution $u \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ telle que $\nabla u \in C^0(\mathbb{R}^+, L^r(\Omega))$. Si $r = +\infty$, alors cette solution $u \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ est unique, et le tourbillon est alors borné en temps et en espace.*

En dimension supérieure la situation est moins comprise, et le résultat est le suivant.

THÉORÈME 1.4. — *Soit Ω un domaine régulier de l'espace $\mathbb{R}^d$, et soit $s \geq s_0$. Si (u_0, c_0) est un élément de $H^s(\Omega)$, alors il existe une unique solution maximale $u \in C^0([0,T), H^s(\Omega))$. Si T est fini alors la norme de u dans $H^s(\Omega)$ tend vers $+\infty$ en T.*

Puisque nous souhaitons ici mettre en valeur les phénomènes intervenant dans la limite incompressible plus que les problèmes liés à l'étude du problème de Cauchy, nous n'avons pas énoncé tous les résultats dans leur plus grande généralité ni leur plus grande subtilité. Nous renvoyons le lecteur intéressé par exemple aux livres de J.-Y. Chemin [9] ou de P.-L. Lions [40] et [41] pour des résultats beaucoup plus précis.

1.2. **La limite incompressible**

Il y a de multiples façons de mettre en évidence le petit paramètre dans les équations des fluides compressibles (3) (voir par exemple [25] ou [35]). Nous présentons ici la méthode détaillée dans [51]. La limite incompressible étant comprise comme la limite où la vitesse du fluide devient négligeable devant la vitesse du son, on commence par remettre la vitesse à l'échelle, en remplaçant u par εu. Le paramètre ε est le nombre de Mach. La vitesse étant la dérivée de la position d'une particule de fluide par rapport au temps, une particule va donc se déplacer d'une distance $O(\varepsilon)$ pendant un temps de l'ordre de 1 (ou de même d'une distance de l'ordre de 1 en un temps $O(1/\varepsilon)$). Cela suggère de ré-échelonner les variables d'espace x en les remplaçant par x/ε (ou encore la variable de temps t en la changeant en εt). En associant le changement d'échelle en vitesse à l'un ou l'autre de ces changements d'échelle spatiale ou temporelle, le système (3) devient le suivant :

$$\begin{aligned}\partial_t c + u \cdot \nabla c + \frac{\gamma - 1}{2} c \operatorname{div} u = 0 \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{\gamma - 1}{2\varepsilon^2} c \, \nabla c = 0.\end{aligned}$$

La dernière hypothèse maintenant consiste à supposer que $c(t,x) = c_1 + \varepsilon \widetilde{c}(t,x)$, où c_1 est une constante donnée. En renommant $\widetilde{c}$ en c, il vient finalement le système des fluides faiblement compressibles suivant :

$$\partial_t c + u \cdot \nabla c + \frac{\gamma - 1}{2} c \operatorname{div} u + \frac{\gamma - 1}{2\varepsilon} c_1 \operatorname{div} u = 0 \tag{4}$$
$$\partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{\gamma - 1}{2} c \, \nabla c + \frac{\gamma - 1}{2\varepsilon} c_1 \, \nabla c = 0.$$

Les données initiales sont $u_{|t=0} = u_0$ et $c_{|t=0} = c_0$. Nous verrons ci–dessous qu'il peut être pertinent de remplacer cette donnée initiale fixe par une famille de données dépendant du paramètre ε. Nous allons dorénavant nous intéresser à ce système, et chercher à en comprendre le comportement quand ε tend vers zéro. Formellement, prendre la limite $\varepsilon \to 0$ dans (4) revient à annuler les termes ayant le plus grand facteur en ε dans l'équation. On obtient ainsi formellement à la limite

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \nabla c = 0, \tag{5}$$

ce qui revient à considérer un fluide incompressible. On s'attend donc à retrouver dans la limite $\varepsilon \to 0$ les équations des fluides incompressibles. On se retrouve alors immédiatement devant une condition de compatibilité sur la donnée initiale : suivant qu'elle vérifie elle-même la condition (5) ou non, on peut avoir plus ou moins de difficultés à passer à la limite dans le système (4). On est ainsi amené à introduire la notion de donnée “bien” ou “mal préparée”, portant sur une famille de données initiales indexée par le paramètre ε.

Définition 1.5. — *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^d$ et s un réel. Soit $(u_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ une famille de champs de vecteurs et soit $(c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ une famille de fonctions, toutes deux bornées dans $H^s(\Omega)$. On dit que $(u_{\varepsilon,0}, c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ est “bien préparée” si*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{div} u_{\varepsilon,0} = 0 \quad \textit{dans} \quad H^s(\Omega) \quad \textit{et} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \nabla c_{\varepsilon,0} = 0 \quad \textit{dans} \quad H^{s-1}(\Omega).$$

Dans le cas contraire, la famille $(u_{\varepsilon,0}, c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ est dite “mal préparée”.

Remarque 1.6. — Historiquement l'étude du passage des équations des fluides compressibles aux équations des fluides incompressibles a commencé dans le cas de données “bien préparées” au sens de la définition 1.5. Des notions plus fortes de préparation de données peuvent être trouvées dans la littérature (voir par exemple [7]) mais celle proposée ci–dessus est la plus utilisée. Dans le paragraphe suivant nous présentons les méthodes employées pour démontrer des théorèmes de convergence des solutions compressibles vers les solutions incompressibles dans ce cadre “bien préparé”. Les autres paragraphes de cet exposé sont consacrés à l'étude (plus difficile) du cas de données quelconques.

2. LE CAS BIEN PRÉPARÉ

Le premier travail mathématique concernant la limite incompressible est dû à S. Klainerman et A. Majda, dans [35] et [36]. Il s'agit d'étudier le temps d'existence des solutions du système (4) et sa dépendance en ε, ainsi que le passage à la limite dans l'équation.

Dans [35] les auteurs s'appuient sur l'étude du système quasilinéaire abstrait suivant :

$$\partial_t u_\varepsilon + \sum_{j=1}^{d} B^j(u_\varepsilon,\varepsilon)\partial_j u_\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{T}^d \tag{6}$$

avec donnée initiale $u_{\varepsilon|t=0} = u_{\varepsilon,0}$. Ils supposent que ce système est symétrisable, au sens où il existe une matrice symétrique définie positive $A^0(u,\varepsilon)$ telle que $A^j \stackrel{\text{déf}}{=} A^0 B^j(u,\varepsilon)$ est symétrique pour tout j. Sous des conditions structurelles sur les matrices B^j et A^j que nous ne détaillons pas, et sous une condition fondamentale d'initialisation sur la famille de données initiales – qui revient à supposer, dans le cas particulier où le système est précisément (4) que la famille de données initiales est bien préparée au sens de la définition 1.5, le résultat de [35] est le suivant. Rappellons que partout dans ce texte s_0 désigne le plus petit entier strictement plus grand que $\dfrac{d}{2}+1$.

Théorème 2.1 ([35]). — *Soit $\Omega = \mathbb{T}^d$ un domaine périodique, et soit $s \geq s_0 + 1$. Sous les hypothèses structurelles et d'initialisation évoquées ci–dessus, il existe un temps $T > 0$ indépendant du paramètre ε tel qu'il existe une unique solution u_ε au système (6), bornée dans l'espace $C^0_w([0,T],H^s) \cap C^1_w([0,T],H^{s-1})$.*

L'espace $C^0_w([0,T],H^s)$ est défini en munissant H^s de la topologie faible.

Ce théorème est appliqué dans [35] à de nombreux systèmes de la mécanique des fluides, comme les fluides compressibles (visqueux ou non) ou la magnéto-hydrodynamique. Dans le cas de la limite incompressible (ce résultat n'est pas démontré pour le système abstrait (6) dans [35]), la borne *a priori* sur $\partial_t u_\varepsilon$ donnée par le théorème 2.1 permet en outre de démontrer le résultat de convergence suivant, par application d'un théorème de compacité de type Ascoli ou Lions-Aubin.

Théorème 2.2 ([35]). — *Soit $\Omega = \mathbb{T}^d$ un domaine périodique, et soit $s \geq s_0 + 1$. Si $(u_{\varepsilon,0}, c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ est une famille de données bien préparées dans $H^s(\mathbb{T}^d)$, avec $u_{\varepsilon,0}$ convergeant vers un champ de divergence nulle u_0 dans $H^s(\mathbb{T}^d)$, alors il existe un temps $T > 0$ indépendant du paramètre ε tel qu'il existe une unique solution $(u_\varepsilon, c_\varepsilon)$ au système (4), bornée dans l'espace $C^0_w([0,T],H^s) \cap C^1_w([0,T],H^{s-1})$. En outre, la famille u_ε tend vers $\overline{u}$ dans $C^0_w([0,T],H^s)$ où $\overline{u}$ est solution du système incompressible (2) avec donnée initiale u_0, et ∇c_ε tend vers zéro dans $C^0_w([0,T],H^{s-1})$.*

Ce théorème indique que dans le cas de données bien préparées avec des conditions aux limites périodiques, il y a une solution unique au système (4), bornée uniformément en ε, et cette solution converge vers la solution du système incompressible. Ce théorème est analysé dans [35] comme un nouveau théorème, constructif, d'existence locale aux équations d'Euler incompressibles (2). En revanche, les auteurs ne comparent pas le temps d'existence T obtenu par ce biais de la limite incompressible avec celui que l'on obtiendrait par d'autres méthodes plus directes. En particulier dans le cas bidimensionnel on sait construire des solutions globales au système des fluides incompressibles (voir le théorème 1.3) mais le théorème 2.2 n'indique pas que $T = +\infty$ en dimension deux. Cette question est résolue par les mêmes auteurs dans [36] : dans ce travail l'étude est restreinte aux équations d'Euler compressibles (sans viscosité), aussi bien dans le cas périodique que dans tout l'espace. Le premier résultat de [36] est un théorème d'existence sur un temps uniforme en ε, sans exiger que la donnée soit bien préparée, ce qui est un net progrès par rapport à [35]. Bien entendu dans le cas mal préparé on ne peut espérer obtenir de borne *a priori* sur $\partial_t u_\varepsilon$, mais seulement sur $\varepsilon\partial_t u_\varepsilon$ (et $\varepsilon\partial_t c_\varepsilon$). Ainsi l'on ne peut appliquer de résultat de compacité pour passer à la limite dans l'équation, et dans [36] la restriction aux données bien préparées est nécessaire pour passer à la limite.

Théorème 2.3 ([36]). — *Soit $\Omega = \mathbb{T}^d$ ou $\mathbb{R}^d$, et soit $s \geq s_0 + 1$. Si $(u_{\varepsilon,0}, c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ est une famille bornée de $H^s(\Omega)$, alors il existe un temps $\overline{T} > 0$ indépendant du paramètre ε tel qu'il existe une unique solution $(u_\varepsilon, c_\varepsilon)$ au système (4), bornée dans $C^0_w([0,\overline{T}], H^s)$. En outre, supposons que $(u_{\varepsilon,0}, c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ tend vers (u_0, c_0) dans $H^s(\Omega)$ avec $\operatorname{div} u_0 = 0$ et $\nabla c_0 = 0$. On suppose ici que $s \geq s_0 + 2$. Soit alors $\overline{u}$ la solution du système incompressible (2), élément de $C^0([0,T_0[, H^s(\Omega)) \cap C^1([0,T_0[, H^{s-1}(\Omega))$ pour un certain $T_0 > 0$ (qui est infini si $d = 2$). Alors pour tout $T < T_0$, il existe ε_0 tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, l'équation (4) admet une unique solution sur le temps $[0,T]$, telle que*

$$u_\varepsilon \to \overline{u} \quad \text{dans} \quad C^0([0,T], H^{s-1}(\Omega)), \quad \text{et} \quad \nabla c_\varepsilon \to 0 \quad \text{dans} \quad C^0([0,T], H^{s-2}(\Omega)). \tag{7}$$

Nous ne détaillerons pas la démonstration de ce théorème ici. Pour obtenir une solution sur un temps uniforme (indépendant de ε et ce sans préparation de la donnée initiale), il faut utiliser l'antisymétrie du terme de "pénalisation" qui intervient dans l'équation : de ce fait ce terme non borné n'intervient pas dans les estimations d'énergie permettant de montrer l'existence de solutions. L'idée pour obtenir le résultat de convergence (pour une donnée bien préparée) est de former la différence entre la solution de (4) et la solution de (2) et de montrer que tant que cette dernière solution est définie, la différence reste bornée, et tend vers zéro avec ε par application de méthodes d'énergie (pour lesquelles encore une fois le terme pénalisé disparaît).

Notons que des extensions de ce résultat ont permis d'améliorer la classe d'espaces fonctionnels dans lequel la convergence (7) est vraie ; nous renvoyons le lecteur par exemple aux travaux de H. Beirao da Veiga [4]-[5].

3. LE CAS MAL PRÉPARÉ

Dans ce paragraphe nous allons étudier la limite incompressible sans hypothèse de préparation de la donnée initiale. D'après le théorème 2.3, on sait construire une solution à ce système sur un temps uniforme en ε (en tous cas si Ω est l'espace entier ou le tore, mais nous admettrons que ce résultat est général pour tout domaine régulier) et l'on cherche maintenant à déterminer le comportement asymptotique de cette solution. Nous allons tout d'abord nous concentrer sur le cas où l'équation est posée dans un domaine extérieur : dans la section 3.1.1 nous détaillerons la démonstration du passage à la limite incompressible dans le cas de l'espace entier, en introduisant des estimations dispersives (de type "Strichartz"). Le paragraphe 3.1.2 donnera une indication de l'application de cette méthode au cas d'un domaine extérieur. Le cas de domaines bornés est plus délicat, et nous commencerons par expliquer les phénomènes d'oscillations dans le cas périodique (section 3.2.1), en nous attardant très peu sur le cas de domaines à bords dans la section 3.2.2.

3.1. **Le cas de domaines non bornés — dispersion**

3.1.1. *Dans l'espace entier.* Considérons le système (4) posé dans l'espace entier $\mathbb{R}^d$. Dans [61], S. Ukai démontre le résultat suivant.

Théorème 3.1 ([61]). — *Soit $\Omega = \mathbb{R}^d$, et soit $s \geq s_0$. Si $(u_{\varepsilon,0}, c_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ est une famille bornée de $H^s(\Omega)$, convergeant vers (u_0, c_0) dans $H^s(\Omega)$, alors la solution $(u_\varepsilon, c_\varepsilon)$ construite dans le théorème 2.3 vérifie quand ε tend vers zéro, avec les notations de ce théorème,*

$$u_\varepsilon \to \overline{u} \quad \textit{dans} \quad C^0_{loc}((0,T] \times \Omega), \quad \textit{et} \quad \nabla c_\varepsilon \to 0 \quad \textit{dans} \quad C^0_{loc}((0,T] \times \Omega), \quad \forall T < T_0.$$

Remarquons que le résultat de convergence n'est pas vrai en $t = 0$, ce qui est naturel puisque la donnée initiale n'est pas supposée de type incompressible ; il y a donc un phénomène de couche limite en temps. Notons d'autre part que le résultat démontré dans [61] n'est pas tout à fait celui énoncé ci–dessus : S. Ukai démontre la convergence sur le temps d'existence de (4) plutôt que celui de (2), mais nous verrons ci–dessous comment obtenir le résultat de convergence sur $(0, T)$ pour tout $T < T_0$.

La démonstration de ce théorème repose sur l'étude du système linéarisé : la partie de la solution $(u_\varepsilon, c_\varepsilon)$ qui n'est pas dans le noyau de l'opérateur de pénalisation vérifie une équation d'ondes, et l'on utilise alors des estimations de type "Strichartz" pour montrer que cette partie tend vers zéro. On décompose ainsi tout champ $U \stackrel{\text{déf}}{=} (c, u)$ de la manière suivante : $U = \overline{U} + U_{osc}$ avec $\overline{U} = (0, \overline{u}) = (0, Pu)$, où P est le projecteur de Leray, orthogonal dans L^2 sur les champs de vecteurs de divergence nulle. On pose alors $W_\varepsilon = U_\varepsilon - (0, \overline{u})$, et en écrivant $W_{\varepsilon,osc} = (c_\varepsilon, w_{\varepsilon,osc}) = (c_\varepsilon, u_{\varepsilon,osc})$, il vient :

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{w}_\varepsilon + P(u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon) - P(\overline{u} \cdot \nabla \overline{u}) = 0 \\ \partial_t w_{\varepsilon,osc} + (Id - P)(u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon) + \frac{\gamma - 1}{2} c_\varepsilon \nabla c_\varepsilon + \frac{\gamma - 1}{2\varepsilon} \nabla c_\varepsilon = 0 \\ \partial_t c_\varepsilon + c_\varepsilon \text{div}\, w_{\varepsilon,osc} + \frac{\gamma - 1}{2} u_\varepsilon \cdot \nabla c_\varepsilon + \frac{\gamma - 1}{2\varepsilon} \text{div}\, w_{\varepsilon,osc} = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de montrer que W_ε tend vers zéro, ce qui s'obtient en deux étapes : on commence par montrer que la partie "oscillante" $W_{\varepsilon,osc}$ tend vers zéro, puis on en déduit le résultat cherché sur la partie "non oscillante" $\overline{w}_\varepsilon$ en appliquant des méthodes relevant de la stabilité des équations d'Euler incompressibles (essentiellement par application d'un lemme de Gronwall pour absorber le terme $P(u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon)-P(\overline{u}\cdot\nabla\overline{u})$).

Nous n'allons pas détailler ces étapes, mais donner un schéma de preuve. Commençons donc par introduire le linéarisé du système "oscillant" : posons ainsi $A(D)U \stackrel{\text{déf}}{=} {}^t(\text{div}u,\nabla c)$, et étudions

$$\partial_t U+\frac{1}{\varepsilon}A(D)U=0,\quad U_{|t=0}=U_0. \tag{8}$$

La matrice $A(D)$ s'écrit en variables de Fourier $A(\xi)=i\begin{pmatrix}0&\xi\\ {}^t\xi&0\end{pmatrix}$, et ses valeurs propres sont $\pm i|\xi|$ avec vecteurs propres associés $\pm\,{}^t(|\xi|,\xi)$. Nous avons affaire à une équation des ondes (il s'agit de l'acoustique), et une estimation de phase stationnaire conduit aux estimations dispersives suivantes : dès que U_0 est à support compact en fréquences, on a

$$\|U(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\le C\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^{\frac{d-1}{2}}\|U_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{9}$$

Il n'est pas question ici de rappeler la théorie des estimations dispersives et de Strichartz ; nous renvoyons le lecteur par exemple à [22] pour leur démonstration dans le cas des équations des ondes. Ces estimations ont été popularisées dans le domaine des équations aux dérivées partielles à la fois pour leurs propriétés dispersives (qui donnent des résultats asymptotiques pour la limite incompressible comme pour d'autres problèmes de limite singulière) que pour leurs propriétés régularisantes (qui permettent d'améliorer les résultats classiques sur le problème de Cauchy pour de nombreuses équations telles les équations des ondes ou de Schrödinger non linéaires — voir par exemple [3],[33],[34] pour les ondes). Dans notre cadre, l'inégalité (9) permet de montrer par un argument de densité que la norme L^∞ de la solution de (8) tend vers zéro quand ε tend vers zéro, pour tout temps strictement positif. Un argument de dualité permet d'obtenir le même résultat pour une équation non linéaire du type $\partial_t U+\frac{1}{\varepsilon}A(D)U+Q(U,DU)=0$, où D est un multiplicateur de Fourier d'ordre un et Q une forme quadratique.

On retourne alors au système vérifié par W_ε : on peut faire disparaître les termes oscillants du système, quand ε tend vers zéro, en interpolant les estimations dispersives avec des bornes *a priori* sur W^ε dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. En utilisant parallèlement le fait que la solution d'un système symétrique hyperbolique existe tant que sa norme Lipschitz en espace reste bornée, on peut en déduire que c'est le temps d'existence de $\overline{u}$ qui va déterminer le temps d'existence de W_ε, ainsi que le fait que W_ε tend vers zéro. Nous ne détaillerons pas plus la démonstration ici, et renvoyons le lecteur intéressé à l'article original [61] ; pour le cas de Navier–Stokes on pourra consulter [13].

Remarque 3.2. — Toujours par utilisation des estimations de Strichartz mais en quantifiant précisément le taux de décroissance en ε donné par la dispersion, A. Dutrifoy et T. H'midi ont montré récemment dans [16] un résultat beaucoup plus précis que celui énoncé dans le théorème 3.1. En particulier ils autorisent la partie "compressible" de la donnée initiale à être non bornée en ε, ce qui leur permet d'obtenir en particulier un théorème d'existence en temps grand pour le problème des poches de tourbillon bidimensionnelles (le rotationnel du champ de vitesses initial est la fonction caractéristique d'un domaine borné de l'espace).

3.1.2. *Un domaine extérieur.* Dans le cas d'un domaine extérieur, on s'attend à ce que les mêmes arguments de type dispersifs soient valables ; c'est en effet le cas. Dans le cas d'un demi-espace par exemple, T. Iguchi montre dans [27] la convergence des solutions du système des fluides compressibles (4) vers un champ de vecteur incompressible vérifiant (2), et ce sans hypothèse de préparation de la donnée initiale. Dans [28]-[30], H. Isozaki quant à lui démontre le même résultat pour le cas d'un domaine extérieur. Là encore la démonstration repose sur une estimation dispersive sur le linéarisé, obtenue par application de méthodes de théorie spectrale. La forme du bord du domaine n'intervient pas.

Nous ne nous attarderons pas plus sur ces cas ici, qui relèvent finalement des mêmes idées que dans le cas de l'espace entier, avec des techniques de théorie spectrale additionnelles.

3.2. **Le cas de domaines bornés — oscillations**

Nous allons maintenant discuter du cas où les équations sont posées dans un domaine borné régulier de l'espace. Il n'est plus question alors d'utiliser d'estimations dispersives, qui ne peuvent être valables globalement en temps que dans un domaine non borné ; notons qu'il existe des estimations dispersives dans des domaines bornés ou sur le tore pour des équations d'ondes, mais ces estimations ne sont vraies que localement en temps – remises à l'échelle dans notre cadre elles ne sont donc pas utilisables car elles deviennent vraies sur un temps de l'ordre de ε seulement.

3.2.1. *Conditions aux limites périodiques.* Nous allons présenter ici les techniques de "filtrage" dues à S. Schochet [56] (voir aussi [23]). Considérons une équation abstraite du type suivant

$$(10) \qquad \partial_t U_\varepsilon + Q(U_\varepsilon, U_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} A U_\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^d, \quad U_{\varepsilon|t=0} = U_0$$

où A est une matrice antisymétrique de multiplicateurs de Fourier, et où Q est une forme quadratique du type $Q(a,b) = \frac{1}{2}(a \cdot \nabla b + b \cdot \nabla a)$. On pourrait bien sûr généraliser le cadre d'étude en choisissant une forme quadratique Q moins particulière, mais nous gardons celle-ci ici afin d'alléger les notations.

On suppose ici que le champ de vecteurs U_ε a d' composantes, avec $d' \geq d$ (ce qui est le cas pour la limite incompressible en particulier). La question de l'existence d'une solution sur un temps uniforme est résolue assez simplement, en remarquant que l'antisymétrie de A conduit à des estimations d'énergie sur (10) indépendantes de ε. On cherche à déterminer le comportement asymptotique de cette solution ainsi que la dépendance en ε de son temps d'existence. Posons $\widetilde{U}_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} e^{-\frac{t}{\varepsilon}A}U_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{A}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)U_\varepsilon$. En remarquant que $\mathcal{A}$ commute avec les dérivations, le champ $\widetilde{U}_\varepsilon$ vérifie le système suivant :

$$\partial_t\widetilde{U}_\varepsilon + \mathcal{A}(-\frac{t}{\varepsilon})Q\left(\mathcal{A}(\frac{t}{\varepsilon})\widetilde{U}_\varepsilon, \mathcal{A}(\frac{t}{\varepsilon})\widetilde{U}_\varepsilon\right) = 0. \tag{11}$$

Comme $\mathcal{A}\left(\pm\frac{t}{\varepsilon}\right)$ est unitaire dans tous les espaces de Sobolev H^s (par l'antisymétrie de A), on dispose d'estimations *a priori* sur $\partial_t\widetilde{U}_\varepsilon$ et l'on en déduit que le champ $\widetilde{U}_\varepsilon$ converge fortement (dans un espace de type Sobolev) vers un champ limite U. Toute la question revient maintenant à déterminer l'équation vérifiée par ce champ limite ; nous allons montrer qu'aussi longtemps que U existe, il existe aussi une solution au système de départ (10) et que celle-ci converge (en un certain sens) vers U. Commençons par déterminer l'équation vérifiée par U, en passant à la limite (au sens des distributions) dans l'équation sur $\widetilde{U}_\varepsilon$. S'il est facile de passer à la limite au sens des distributions dans les termes linéaires, c'est *a priori* moins aisé dans les termes non linéaires de (11) ; en effet on ne dispose pas d'information de convergence forte de $\mathcal{A}(\frac{t}{\varepsilon})\widetilde{U}_\varepsilon$. Écrivons la matrice A en variables de Fourier ; son caractère antisymétrique permet d'introduire une base orthogonale de vecteurs propres $(e_j(n))_{1\leq j\leq d'}$ avec les valeurs propres associées $i\lambda_j(n)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, avec $\lambda_j(n) \in \mathbb{R}$. Notons ici que les variables de Fourier n sont discrètes puisque l'on est dans un cadre périodique. Ainsi l'on a pour tout champ de vecteurs a et en notant $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier et $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire dans $\mathbb{C}^{d'}$,

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathcal{F}\left(e^{-\frac{t}{\varepsilon}A}a\right)(n) = \sum_{j=1}^{d'} e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\lambda_j(n)}\left(\mathcal{F}a(n), e_j(n)\right)e_j(n).$$

La forme quadratique apparaissant dans l'équation satisfaite par $\widetilde{U}_\varepsilon$ s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}Q_\varepsilon(a,a)(n) &\stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}\left\{\mathcal{A}(-\frac{t}{\varepsilon})Q\left(\mathcal{A}(\frac{t}{\varepsilon})a, \mathcal{A}(\frac{t}{\varepsilon})a\right)\right\}(n) = \sum_{j=1}^{d'} q_{\varepsilon,j}(n)e_j(n), \text{ avec} \\ q_{\varepsilon,j}(n) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j',j''=1}^{d'}\sum_{k+m=n} e^{i\frac{t}{\varepsilon}\lambda^{k,m,n}_{j,j',j''}}F^{k,m,n}_{j,j',j''}(\widehat{a}_k;\widehat{a}_m) \end{aligned} \tag{12}$$

et où $\lambda^{k,m,n}_{j,j',j''} \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda_{j'}(k) + \lambda_{j''}(m) - \lambda_j(n)$. On a noté $\widehat{a}_k$ la transformée de Fourier de a au point k. La forme exacte du terme bilinéaire $F^{k,m,n}_{j,j',j''}(\widehat{a}_k;\widehat{a}_m)$ ne nous sera pas nécessaire ici, nous la présentons ci–dessous pour être complet : on a précisément

$$F^{k,m,n}_{j,j',j''}(\widehat{a}_k;\widehat{a}_m) \stackrel{\text{déf}}{=} (\widehat{a}(k), e_{j'}(k))(e_{j'}(k), m)(\widehat{a}(m), e_{j''}(m))(e_{j''}(m), e_j(n)).$$

Pour obtenir la limite au sens des distributions de cette quantité (12) il suffit d'appliquer un théorème de phase non stationnaire et l'on obtient immédiatement la forme quadratique limite : il s'agit de restreindre les fréquences (k, m, n), dans la sommation intervenant dans (12), à celles annulant la phase d'oscillation $\lambda^{k,m,n}_{j,j',j''}$. On obtient

$$\mathcal{F}\mathcal{Q}(a,a)(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{d'} q_j(n) e_j(n), \qquad \text{avec}$$

(13)
$$q_j(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j',j''=1}^{d'} \sum_{(k,m)\in R_{j,j',j''}(n)} F^{k,m,n}_{j,j',j''}\left(\widehat{a}_k;\widehat{a}_m\right).$$

On a noté $R_{j,j',j''}(n)$ l'ensemble des résonances

$$R_{j,j',j''}(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{(k,m)\in\mathbb{Z}^{2d}, \quad k+m=n \quad \text{et} \quad \lambda_{j'}(k)+\lambda_{j''}(m)-\lambda_j(n)=0\right\}.$$

Cet ensemble a une importance fondamentale dans la compréhension du système limite, nous y reviendrons plus bas. Énonçons pour l'instant le théorème de convergence de $\widetilde{U}_\varepsilon$ vers U, aussi longtemps qu'existe U. Ce résultat est dû à S. Schochet [56] (voir aussi [19], où en particulier le terme suivant de l'asymptotique est calculé).

THÉORÈME 3.3 ([56]). — *Soit $U_0\in H^s(\mathbb{T}^d)$, avec $s\ge s_0+2$, et soit $U\in C^0([0,T],H^s(\mathbb{T}^d))$ la solution du système*

(14)
$$\partial_t U + \mathcal{Q}(U,U) = 0,$$

où la forme quadratique $\mathcal{Q}$ a été définie en (13). Alors il existe ε_T tel que pour tout $\varepsilon\le\varepsilon_T$ la solution U_ε de (10) est un élément de l'espace $C^0([0,T],H^s(\mathbb{T}^d))$ et $U_\varepsilon-\mathcal{A}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)U$ tend vers zéro dans $C^0([0,T],H^{s-1}(\mathbb{T}^d))$.

La démonstration de ce théorème consiste à étudier $W_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{A}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)U_\varepsilon - U$, qui vérifie

(15)
$$\partial_t W_\varepsilon + \mathcal{Q}_\varepsilon(W_\varepsilon, W_\varepsilon+2U) = \left(\mathcal{Q}-\mathcal{Q}_\varepsilon\right)(U,U).$$

Il y a ici une réelle difficulté due au fait que $\left(\mathcal{Q}-\mathcal{Q}_\varepsilon\right)(U,U)$ ne converge vers zéro qu'au sens des distributions, par application du théorème de la phase non stationnaire. Ainsi l'on ne peut espérer conclure par une simple estimation d'énergie. L'idée de S. Schochet est de constater que $\left(\mathcal{Q}-\mathcal{Q}_\varepsilon\right)(U,U)$ est en fait fortement oscillante en temps et qu'ainsi n'est qu'une petite perturbation de l'équation $\partial_t W_\varepsilon + \mathcal{Q}_\varepsilon(W_\varepsilon,W_\varepsilon+2U)=0$. Précisons cette idée. On commence par se ramener au cas où les fréquences dans la sommation de (13) (et de même dans celle intervenant dans $\mathcal{Q}_\varepsilon$) sont uniformément bornées par un paramètre N. L'erreur commise en omettant les "hautes" fréquences en k, m ou n est arbitrairement petite pourvu que N soit assez grand, et ce uniformément en ε : on n'utilise pour cela que la régularité de U, qui ne dépend pas de ε. Une fois les fréquences k,m et n restreintes à la boule de $\mathbb{Z}^{3d}$ de rayon N, on peut introduire la fonction auxiliaire suivante

$$\widetilde{W}_{\varepsilon,N} \stackrel{\text{déf}}{=} W_\varepsilon + \varepsilon R_{\varepsilon,N}, \quad \text{avec}$$

$$\mathcal{F}R_{\varepsilon,N}(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{|k|,|m|,|n|\le N\\ k+m=n}} \sum_{(k,m)\notin R_{j,j',j''}(n)} \frac{i}{\lambda^{k,m,n}_{j,j',j''}} e^{i\frac{t}{\varepsilon}\lambda^{k,m,n}_{j,j',j''}} F^{k,m,n}_{j,j',j''}(\widehat{U}_k;\widehat{U}_m)e_j(n).$$

Cette fonction est aussi régulière qu'on peut le souhaiter (elle est à fréquences bornées), et sa vertu est d'éliminer le terme oscillant de l'équation (15) sur W_ε. On a en effet, en notant $(\mathcal{Q}-\mathcal{Q}_\varepsilon)^N(U,U)$ la partie "hautes fréquences" du membre de droite de (15) (qui comme noté ci–dessus est arbitrairement petite, uniformément en ε),

$$\partial_t \widetilde{W}_{\varepsilon,N} + \mathcal{Q}_\varepsilon(\widetilde{W}_{\varepsilon,N} - \varepsilon R_{\varepsilon,N}, \widetilde{W}_{\varepsilon,N} - \varepsilon R_{\varepsilon,N} + 2U) = (\mathcal{Q}-\mathcal{Q}_\varepsilon)^N(U,U) + \varepsilon R^t_{\varepsilon,N}(U,U),$$

où $R^t_{\varepsilon,N}$ provient de la dérivée en temps de $R_{\varepsilon,N}$: cette dérivée est égale d'une part à l'opposé du terme "basses fréquences" du membre de droite de (15) (ce qui permet de l'éliminer) et d'autre part à des termes résiduels dus aux dérivées temporelles de U. Mais comme ce terme $R^t_{\varepsilon,N}$ est aussi à fréquences bornées, il est régulier et $\varepsilon R^t_{\varepsilon,N}$ est donc arbitrairement petit pour tout N. Finalement $\widetilde{W}_{\varepsilon,N}$ vérifie une équation de type quasilinéaire à données petites (de l'ordre de ε), avec un terme source arbitrairement petit. Des arguments classiques permettent de montrer que le temps d'existence de cette équation n'est limité que par celui de U, et que $\widetilde{W}_{\varepsilon,N}$ tend vers zéro quand N tend vers l'infini et ε vers zéro. Cela clôt la démonstration du théorème 3.3 : rappelons en effet que $\varepsilon R_{\varepsilon,N}$ est arbitrairement régulier pour tout N fixé, et arbitrairement petit (pour ε assez petit), donc la limite de $\widetilde{W}_{\varepsilon,N}$ est celle de W_ε, aussi longtemps que U est définie. Nous renvoyons le lecteur à [56] pour des détails.

Nous pouvons à présent appliquer ce théorème aux équations des fluides compressibles (4), et obtenir ainsi le comportement asymptotique de ses solutions ; le problème revient à analyser le système limite (14) dans le cas de la limite incompressible, c'est–à–dire plus précisément comprendre l'ensemble des résonances $R_{j,j',j''}(n)$ dans le cas où l'opérateur A est la matrice de l'acoustique, introduite dans l'équation (8) au paragraphe 3.1.1. Nous avons dans ce cas $d' = d+1$ où d est la dimension d'espace, et les valeurs propres sont $\lambda_\pm(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \pm|n|$ et $\lambda_0 \stackrel{\text{déf}}{=} 0$. Le mode 0 correspond aux champs incompressibles, dans le noyau de l'opérateur acoustique. Décrivons plus précisément l'ensemble résonant : si nous posons $\varepsilon_j \in \{-1,0,1\}$ pour tout $j \in \{1,..,d'\}$, alors $R_{j.j',j''}$ est du type

$$R_{j.j',j''}(n) = \left\{(k,m) \in \mathbb{Z}^{2d}, \quad k+m=n, \quad \text{et} \quad \varepsilon_{j'}|k| + \varepsilon_{j''}|m| - \varepsilon_j|n| = 0\right\}.$$

On s'aperçoit ainsi que dans le cas particulier où $\varepsilon_j = \varepsilon_{j'} = \varepsilon_{j''} = 0$, qui correspond à l'interaction des modes incompressibles, le terme bilinéaire dans l'équation limite (14) est précisément le terme quadratique habituel des équations incompressibles $P(\overline{u}\cdot\nabla\overline{u})$, où P est le projecteur de Leray sur les champs de divergence nulle (c'est un fait général, les termes non oscillants n'interagissent pas entre eux autrement que de manière non oscillante). Plus intéressante est certainement l'étude des interactions compressible–compressible. On peut montrer que cette interaction prise sur le mode incompressible ($\varepsilon_j = 0$ et $\varepsilon_{j'}\varepsilon_{j''} \neq 0$) produit un terme gradient, et est donc responsable du terme $-\nabla p$ dans l'équation limite incompressible (voir par exemple [23],[47]). Ce qui importe donc est d'étudier l'interaction compressible–compressible sur un mode compressible, c'est–à–dire l'ensemble des résonances dans le cas où le produit $\varepsilon_j\varepsilon_{j'}\varepsilon_{j''}$ est non nul. Cette analyse a été menée précisément par N. Masmoudi dans [47]. Ainsi il a démontré que la condition de résonance

$$k + m = n \quad \text{et} \quad \pm |k| \pm |m| \pm |n| = 0$$

détermine un très faible nombre de triplets (k, m, n), si faible que finalement le terme bilinéaire de type compressible–compressible se comporte sur les modes compressibles comme si l'on était en dimension un d'espace. Plus précisément on peut se convaincre (voir [47], ainsi que [11] pour des calculs plus quantitatifs) que deux éléments k et m de l'ensemble de résonance sont nécessairement colinéaires. N. Masmoudi restreint alors son étude aux éléments de

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ p \in \mathbb{Z}^d, \quad p_1 \wedge .. \wedge p_d = 1 \quad \text{et} \quad p_1 > 0 \right\}.$$

En réécrivant la forme quadratique en décomposant les variables de Fourier sur $\mathcal{P}$, il est alors possible de se ramener à des calculs purement monodimensionnels. Cela induit naturellement des estimations bien meilleures que les estimations de produit habituelles (la régularité Sobolev du produit de deux fonctions se dégrade essentiellement d'un facteur $1/2$ avec chaque dimension d'espace supplémentaire) ; ainsi l'on peut démontrer assez aisément que le facteur limitant pour le temps d'existence des solutions du système limite (14) est le temps d'existence des équations d'Euler incompressibles. En particulier en dimension deux d'espace ce système limite est globalement bien posé.

On peut finalement démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.4 ([56],[47]). — *Soit $U_0 \in H^s(\mathbb{T}^d)$, avec $s \geq s_0 + 2$. Soit T^* le temps d'existence des solutions de l'équation des fluides incompressibles (2) dans $H^s(\mathbb{T}^d)$. Alors la solution U du système limite (14) associé à l'équation faiblement compressible (4) appartient à $C^0([0, T^*), H^s(\mathbb{T}^d))$ et pour tout tout temps $T < T^*$, il existe ε_T tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_T$ la solution U_ε de (14) est un élément de l'espace $C^0([0, T], H^s(\mathbb{T}^d))$ et $U_\varepsilon - \mathcal{A}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) U$ tend vers zéro dans $C^0([0, T], H^{s-1}(\mathbb{T}^d))$.*

Remarque 3.5. — Nous n'avons pas précisé ici la forme exacte du système limite des équations des fluides compressibles périodiques. Il s'agit du système suivant : la limite U s'écrit $U = \overline{U} + U_{osc} = (0, \overline{u}) + U_{osc}$ avec

$$\begin{gathered} \partial_t \overline{u} + \overline{u} \cdot \nabla \overline{u} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} \overline{u} = 0 \\ \partial_t U_{osc} + \mathcal{Q}_{osc}(U_{osc}, U_{osc} + 2\overline{U}) = 0, \end{gathered}$$

où $\mathcal{Q}_{osc}$ est définie comme dans (13), restreinte aux modes $\lambda_j \neq 0$ (le mode nul est représenté dans l'équation en $\overline{u}$). En particulier cette forme quadratique $\mathcal{Q}_{osc}$, agissant sur des modes compressibles (*i.e* associés à une valeur propre non nulle de A) vérifie des estimations de type monodimensionnelles.

3.2.2. *Un domaine à bord.* Pour clore cette présentation de la limite incompressible dans le cas isentropique, nous allons très brièvement considérer le cas où l'équation est posée dans un domaine de l'espace, avec condition $u \cdot n = 0$ au bord.

Dans le cas des équations non visqueuses il y a assez peu de travaux sur le sujet ; nous présentons ici les travaux de P. Secchi [57]-[58]. L'existence de solutions sur un temps uniforme est démontrée sans hypothèse de préparation de la donnée initiale, comme dans [36]. La méthode repose toujours sur des estimations d'énergie utilisant l'antisymétrie de l'operateur acoustique. Pour démontrer des résultats de convergence en revanche, P. Secchi démontre la convergence faible des solutions vers les solutions du système des fluides incompressibles, et la convergence forte n'est obtenue que dans le cas de données préparées au sens de la définition 1.5.

La situation est donc pour l'instant assez peu comprise dans le cas d'un domaine borné général. Notons au passage que pour les équations de Navier–Stokes compressibles avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes, la situation est plus favorable : dans [14], B. Desjardins, E. Grenier, P.-L. Lions et N. Masmoudi démontrent en effet que sous une hypothèse géométrique sur le domaine (toutes les solutions du problème surdéterminé $-\Delta\varphi = \lambda\varphi$ dans Ω avec φ constant sur le bord et $\partial_n \varphi = 0$ sur le bord, doivent être nulles) alors il y a convergence forte des solutions compressibles vers les solutions incompressibles. C'est un résultat surprenant au vu de ce que nous avons constaté dans le cas périodique (les ondes acoustiques dans le cas périodique ne disparaissent pas à la limite) ; cela est dû à l'absorption par le bord des ondes acoustiques, par un phénomène de couche limite propre au cas visqueux.

4. LES ÉQUATIONS NON ISENTROPIQUES

4.1. Présentation

Le dernier paragraphe de ce texte concerne une extension de l'étude de la limite incompressible au cas d'équations non isentropiques. Jusqu'ici en effet nous avons occulté le fait qu'un fluide compressible peut vérifier des équations plus générales que (1), dans lesquelles il faut prendre en compte le transport de l'entropie. Les équations sont ainsi les suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} u &= 0 \\ \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \nabla p &= 0 \\ \partial_t S + u \cdot \nabla S &= 0 \\ (\rho, u, S)_{|t=0} &= (\rho_0, u_0, S_0) \end{aligned} \tag{16}$$

où ρ est la densité, p est la pression, u est la vitesse et S l'entropie. Ces variables sont reliées par l'équation d'état $\rho = R(S,p)$, et la vitesse du son c est donnée par $\dfrac{1}{c^2} = \dfrac{\partial R}{\partial p} > 0$. Dans la suite nous définirons aussi $A \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial R}{\partial p}\cdot$

Nous renvoyons à l'exposé [50] pour une présentation de ces équations, ainsi que pour la symétrisation et le changement d'échelle dans (16) conduisant finalement au système suivant :

$$
\begin{aligned}
a_\varepsilon(\partial_t q_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla q_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div} v_\varepsilon &= 0\\
r_\varepsilon(\partial_t v_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\nabla q_\varepsilon &= 0\\
\partial_t S_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla S_\varepsilon &= 0\\
(q_\varepsilon, v_\varepsilon, S_\varepsilon)_{|t=0} &= (q_{\varepsilon,0}, v_{\varepsilon,0}, S_{\varepsilon,0})
\end{aligned}
\tag{17}
$$

où $a_\varepsilon \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{A}(S,\varepsilon q)$ et $r_\varepsilon \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{R}(S,\varepsilon q)$. Les fonctions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{R}$ correspondent aux fonctions A et R précédentes, écrites dans les nouvelles variables (S,q) plutôt que (S,p).

Comme dans le cas isentropique étudié ci–dessus, deux questions se posent : y a–t–il des solutions au système (17) bornées uniformément en ε, sur un intervalle de temps indépendant de ε ? Si oui, quel est leur comportement quand ε tend vers zéro ? Pour deviner le système limite, comme dans le cas isentropique on annule les termes non bornés dans l'équation (17) : on trouve $\operatorname{div} v_\varepsilon = 0$ et $\nabla q_\varepsilon = 0$, et ainsi on s'attend à obtenir à la limite le système incompressible suivant :

$$
\begin{aligned}
r_0(\partial_t v + v \cdot \nabla v) + \nabla P &= 0\\
\partial_t S + v \cdot \nabla S &= 0\\
\operatorname{div} v &= 0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

avec naturellement $r_0 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{R}(S,0)$.

4.2. **Le problème de Cauchy**

Contrairement au cas isentropique étudié dans les paragraphes précédents, la question de l'existence de solutions bornées en ε sur un temps indépendant de ε est loin d'être immédiate : à première vue on peut chercher à faire fonctionner l'argument habituel d'antisymétrie du terme de pénalisation, mais cette méthode tombe immédiatement en défaut à cause du couplage avec l'entropie. On se convainc aisément de ce fait en étudiant le système modèle linéarisé suivant (nous reprenons ici un exemple de [51]) :

$$
\begin{aligned}
a(S)\partial_t u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\partial_x u_\varepsilon &= 0\\
\partial_t S &= 0\\
(u_\varepsilon, S)_{|t=0} &= (u_0, S_0).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Si S est un état constant $S = \underline{S}$ alors

$$u_\varepsilon(t,x) = u_0\left(x - \frac{t}{\varepsilon a(\underline{S})}\right).$$

Ainsi une petite perturbation de l'état constant $\underline{S}$ induit une grande perturbation dans u_ε, et le système (19) est donc instable. Dans [51] G. Métivier et S. Schochet démontrent néanmoins le théorème suivant sur le système complet (17).

THÉORÈME 4.1 ([50]-[51]). — *Soit $s \geq s_0$, soit $M_0 > 0$ et soit $\Omega = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{T}^d$. Si les données initiales $(v_{\varepsilon,0}, q_{\varepsilon,0}, S_{\varepsilon,0})$ sont uniformément bornées dans $H^s(\Omega)$ par M_0, alors il existe une unique solution $(v_\varepsilon, q_\varepsilon, S_\varepsilon)$ à (17), uniformément bornée dans $C^0([0,T], H^s(\Omega))$ où T ne dépend que de M_0 ; en outre $\partial_t S_\varepsilon$ et $\partial_t \mathrm{rot}\,(r_\varepsilon v_\varepsilon)$ sont bornées respectivement dans $C^0([0,T], H^{s-1}(\Omega))$ et $C^0([0,T], H^{s-2}(\Omega))$.*

L'idée de la démonstration de ce théorème peut se lire sur le système modèle (19) : l'étude du système linéarisé ne donnant pas de résultat satisfaisant, il convient d'étudier directement le système non linéaire de départ. Afin de simplifier la présentation, nous allons plutôt expliquer la démarche de [51] sur le système modèle suivant :

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon \partial_t u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\partial_x u_\varepsilon &= 0 \\ \partial_t \sigma_\varepsilon + a(u_\varepsilon)\partial_x \sigma_\varepsilon &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Dans ce système u_ε joue le rôle des variables $(q_\varepsilon, \mathrm{div}\, v_\varepsilon)$ et σ_ε celui de $(S_\varepsilon, \mathrm{rot}\,(r_\varepsilon v_\varepsilon))$.

Pour éviter de se ramener par une estimation d'énergie à un cadre linéarisé (instable), on commute la première équation de (20) non pas avec ∂_x^k, méthode usuelle mais qui conduirait ici à une équation instable, mais plutôt avec $\left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\partial_x\right)^k$. Ainsi comme $\partial_t \sigma_\varepsilon$ et σ_ε sont estimées (dans H^{s-1} et H^s respectivement) par $\|u_\varepsilon\|_{H^s}$ d'après la seconde équation de (20), les commutateurs supplémentaires obtenus peuvent être absorbés par une inégalité de type Gronwall. Cette démarche peut être mise en oeuvre de manière analogue pour le système de départ (17) ce qui démontre le théorème 4.1.

Notons que dans [51] ce théorème d'existence est démontré pour une classe plus générale d'équations, faisant apparaître l'importance de la structure spéciale non linéaire. Nous ne donnerons pas plus de détails sur la preuve du théorème 4.1 et renvoyons à [51] pour toute la démonstration.

La question de l'existence de solutions uniformément bornées étant désormais résolue, nous allons à présent nous attacher à comprendre le comportement asymptotique de ces solutions quand ε tend vers zéro. Dans le cas isentropique nous avons constaté que l'étude est plus simple dans le cas de $\mathbb{R}^d$ que dans $\mathbb{T}^d$. C'est le cas aussi (et bien plus encore) dans le cas non isentropique ; nous allons donc commencer par nous pencher sur le cas d'équations posées dans l'espace entier dans la section 4.3, en présentant le résultat de convergence de [51]. Nous étudierons le cas périodique dans la dernière section 4.4, en nous appuyant sur le travail [52], ainsi que sur [50] ; il ne sera pas question de domaines à bords dans cette étude du cas non isentropique (pour une étude du cas de domaines à bords nous renvoyons à l'article de S. Schochet [55] pour des données bien préparées, ainsi qu'au travail récent de T. Alazard [1] dans le cas général). Notons pour terminer que des études formelles dans le cas visqueux (périodique) ont été menées dans [6] ; ici comme partout ailleurs dans ce texte l'on se restreint aux équations sans viscosité.

4.3. **Asymptotique dans $\mathbb{R}^d$**

Commençons par énoncer le théorème de convergence démontré dans [51].

THÉORÈME 4.2 ([50]-[51]). — *Soit $s \geq s_0$ et soit $\Omega = \mathbb{R}^d$. On suppose que les données initiales $(v_{\varepsilon,0}, q_{\varepsilon,0}, S_{\varepsilon,0})$ sont uniformément bornées dans $H^s(\Omega)$ et convergent vers (v_0, q_0, S_0) dans $H^s(\Omega)$ quand ε tend vers zéro, avec l'hypothèse de décroissance à l'infini suivante pour S_0 :*

$$(21) \qquad |S_0(x)| \leq \frac{C}{|x|^{1+\delta}} \quad et \quad |\nabla S_0(x)| \leq \frac{C}{|x|^{2+\delta}}, \quad \delta > 0.$$

Alors la famille de solutions $(v_\varepsilon, q_\varepsilon, S_\varepsilon)$ construite dans le théorème 4.1 converge dans l'espace $L^2([0,T], H^{s'}_{loc}(\Omega))$ pour tout $s' < s$, vers $(v, 0, S)$ où (v, S) est l'unique solution de (18) avec donnée (w_0, S_0) et w_0 est l'unique solution de

$$\operatorname{div} w_0 = 0, \quad \operatorname{rot}(\overline{r}_0 w_0) = \operatorname{rot}(\overline{r}_0 v_0), \quad où \quad \overline{r}_0 \stackrel{déf}{=} \mathcal{R}(S_0, 0).$$

Donnons une idée de la démonstration de ce résultat.

La première étape consiste à obtenir de la compacité en espace, en utilisant les estimations uniformes données par le théorème 4.1. Ainsi l'on peut montrer facilement que S_ε converge fortement (quitte à extraire une sous-suite, ce que nous omettrons de signaler dorénavant) vers une fonction S dans $C^0([0,T], H^{s'}_{loc}(\Omega))$ et que $(q_\varepsilon, v_\varepsilon)$ converge faiblement dans $L^\infty([0,T], H^s(\Omega))$ vers un certain (q, v). Enfin $\operatorname{rot}(r_\varepsilon v_\varepsilon)$ converge fortement dans $L^\infty([0,T], H^{s'-1}_{loc}(\Omega))$ vers $\operatorname{rot}(r_0 v)$, où rappelons que $r_0 = \mathcal{R}(S, 0)$. On se convainc aussi (il suffit de multiplier les équations par ε et de passer à la limite) que

$$q = 0, \quad \operatorname{div} v = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t S + v \cdot \nabla S = 0.$$

Reste à montrer le point le plus délicat du théorème, c'est–à–dire la convergence forte de q_ε vers zéro, et celle de v_ε vers v vérifiant le système limite (18).

Comme dans le cas isentropique, on commence par décomposer v_ε en une composante sur le noyau de l'opérateur de pénalisation (qui sera compacte en temps et en espace), et un reste : écrivons donc

$$v_\varepsilon = \overline{v}_\varepsilon + \widetilde{v}_\varepsilon, \quad \text{avec} \quad P v_\varepsilon = \overline{v}_\varepsilon,$$

où rappelons que P est le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs de divergence nulle. La suite $\overline{v}_\varepsilon$ est compacte en temps, elle converge donc fortement vers v et l'on va maintenant s'attacher à montrer que $\widetilde{V}_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} (q_\varepsilon, \widetilde{v}_\varepsilon)$ converge fortement vers zéro. Pour cela il faut contrôler les oscillations en temps de cette suite de fonctions, ce qui passe par l'étude du linéarisé

$$\partial_t(\mathcal{A}(S_\varepsilon,0)\partial_t W_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{div}\,\left(\frac{1}{\mathcal{R}(S_\varepsilon,0)}\nabla W_\varepsilon\right) = 0.$$

Ce système est proche de l'équation des ondes (8) au fait près qu'il est à coefficients variables. Ainsi le calcul direct en variables de Fourier que nous avons pratiqué en section 3.1.1 pour obtenir la dispersion des ondes acoustiques n'est plus opérant ici. Nous obtiendrons à la place un résultat de décroissance de l'énergie locale qui permettra de conclure. Un tel résultat est obtenu dans [51] par utilisation de la théorie des mesures de défaut. Nous renvoyons le lecteur à [21] et [60] pour l'introduction de cette théorie (ainsi qu'à [8] pour une présentation générale et des applications).

L'idée de la démonstration de [51] est assez simple à décrire, et nous allons en rester à cette description générale sans rentrer dans l'implémentation technique de la preuve (celle–ci requiert entre autres une écriture par paquets d'ondes (en temps) : un résumé de la méthode peut être trouvé dans [50]). Notons $\mathcal{K}$ (respectivement $\mathcal{L}$) l'espace des opérateurs compacts (respectivement à trace) sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Les mesures de défaut microlocales de $\widetilde{V}_\varepsilon$ se définissent de la manière suivante : quitte à extraire une sous-suite, il existe une mesure de Radon positive μ sur $\mathbb{R}^2$ et il existe M μ-intégrable à valeurs dans $\mathcal{L}$ telle que pour toute fonction a dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ à valeurs dans $\mathcal{K}$, l'opérateur pseudo-différentiel semi-classique associé $A \stackrel{\text{déf}}{=} a(t,\varepsilon D_t)$ vérifie

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(A\widetilde{V}_\varepsilon,\widetilde{V}_\varepsilon\right) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Tr}\,\left(M(t,\tau)a(t,\tau)\right)\mu(dt,d\tau).$$

Le point important est que les mesures de défaut microlocales sont supportées sur la variété caractéristique de l'équation, ce qui signifie ici que

$$\mathcal{A}(S(t,\cdot),0)\tau^2 M(t,\tau) + \mathrm{div}\,\left(\frac{1}{\mathcal{R}(S(t,\cdot),0)}\nabla\right)M(t,\tau) = 0, \quad \mu\text{ p.p.}$$

On utilise alors le fait que la condition (21) est propagée par l'équation de transport $\partial_t S + v\cdot\nabla S = 0$ ainsi que le résultat suivant (dont une démonstration peut se trouver dans [51], paragraphe 5) : le noyau de $a\tau^2 + \mathrm{div}\,(b\nabla)$ est réduit à zéro, pour tout $\tau\in\mathbb{R}$, s'il existe une constante $\overline{a}$ telle que

$$|a(x)-\overline{a}| \le \frac{C}{(1+|x|)^{1+\delta}}, \quad |\nabla a(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^{2+\delta}}$$

et de même pour b (avec une autre constante $\overline{b}\neq 0$). En combinant ces deux propriétés l'on obtient que $M=0$. En corollaire on peut en déduire que la mesure de défaut de $\widetilde{V}_\varepsilon$ est nulle, et les estimations à priori sur $\widetilde{v}_\varepsilon$ et q_ε permettent finalement de démontrer que $\widetilde{V}_\varepsilon$ converge fortement vers zéro dans $L^2([0,T],H^{s'}_{loc}(\mathbb{R}^d))$, pour tout $s'<s$.

On conclut enfin la démonstration en passant à la limite dans l'équation en v_ε : tous les termes de l'équation ont une limite forte, et l'équation (18) est obtenue sans difficulté.

L'implémentation de ces principes est techniquement délicate et nous renvoyons donc le lecteur à [51] pour la démonstration détaillée (un bref exposé peut être trouvé dans [50]).

4.4. **Asymptotique dans** $\mathbb{T}^d$

Dans cette section finale nous allons nous intéresser aux équations non isentropiques (17) dans le cas où le domaine d'espace est périodique.

Le résultat que nous allons présenter est celui de G. Métivier et S. Schochet [52] (nous nous inspirerons aussi de l'exposé [50]). Considérons une suite de solutions $(q_\varepsilon, v_\varepsilon, S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ donnée par le théorème 4.1, associée à une famille de données initiales $(q_{\varepsilon,0}, v_{\varepsilon,0}, S_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$. Cette suite de solutions vérifie les mêmes estimations *a priori* que dans le cas $\mathbb{R}^d$ (rappelons que le théorème 4.1 est valable aussi bien dans tout l'espace que dans le cas périodique). L'étape de compacité en espace se déroule donc aussi bien que dans la section 4.3 précédente. On a donc convergence forte de S_ε et $\operatorname{rot}(r_\varepsilon v_\varepsilon)$ dans $C^0([0,T], H^{s'}(\mathbb{T}^d))$ et $C^0([0,T], H^{s'-1}(\mathbb{T}^d))$ respectivement, et le couple $(q_\varepsilon, v_\varepsilon)$ converge faiblement dans l'espace $L^\infty([0,T], H^s(\mathbb{T}^d))$ vers (q, v), avec

$$\nabla q = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \partial_t S + v \cdot \nabla S = 0. \tag{22}$$

On peut aussi montrer (voir [52] Lemme 8.2) que q ne dépend pas non plus du temps, et est donc une constante en t et en x. Cherchons maintenant l'équation vérifiée par v. C'est ici que se fait la différence avec le cas $\mathbb{R}^d$: de la même façon que dans le cas isentropique on ne peut espérer *a priori* dans le cas périodique de convergence forte sur les composantes acoustiques, et l'on va introduire la décomposition suivante :

$$v_\varepsilon = \overline{v}_\varepsilon + \frac{1}{r_\varepsilon} \nabla h_\varepsilon \quad \text{où} \quad \operatorname{div} \overline{v}_\varepsilon = 0.$$

Comme précédemment $\overline{v}_\varepsilon$ converge fortement vers v dans $C^0([0,T], H^{s'}(\mathbb{T}^d))$, et l'on peut passer à la limite au sens des distributions dans tous les termes de l'équation vérifiée par v_ε, sauf dans les termes bilinéaires en h_ε (puisque h_ε ne converge que faiblement). En suivant les notations de [50], posons $\mathcal{B} \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \rho}$ et $b_0 \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{B}(S, 0)$. En écrivant

$$\mathcal{E} \overset{\text{déf}}{=} -\frac{b_0}{2r_0} \nabla \kappa^{(1)} + \frac{1}{2r_0} \nabla \kappa^{(2)}$$
$$\kappa^{(1)} \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} |\varepsilon \partial_t h_\varepsilon|^2 \quad \text{et} \quad \kappa^{(2)} \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} |\nabla h_\varepsilon|^2,$$

il vient à la limite (rappelons que $r_0 = \mathcal{R}(S, 0)$)

$$r_0(\partial_t v + v \cdot \nabla v) + \mathcal{E} + \nabla P = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \tag{23}$$

avec la même donnée initiale que dans le cas $\mathbb{R}^d$: $v_{|t=0} = w_0$ où w_0 est l'unique solution de $\operatorname{div} w_0 = 0$, $\operatorname{rot}\,(r_0 w_0) = \operatorname{rot}\,(r_0 v_0)$.

Le problème maintenant est de clore le système (22, 23) en déterminant $\mathcal{E}$; il n'y a pas de raison *a priori* pour que $\mathcal{E}$ soit un gradient.

Étudions un instant (comme dans [50] et [52]) le système modèle suivant :

$$\varepsilon \partial_t u_\varepsilon = A(S_\varepsilon(t)) u_\varepsilon,$$

où A est un opérateur antisymétrique. Dans le cas où $S_\varepsilon = S$ ne dépend pas du temps, la solution est donnée par $u_\varepsilon = e^{\frac{tA(S)}{\varepsilon}} u_0$. Dans le cas contraire on s'aperçoit immédiatement d'une difficulté considérable liée au croisement des valeurs propres de $A(S(t))$. En effet si le spectre de A est de multiplicité constante il est connu (voir [32]) que l'évolution de u_ε est asymptotiquement diagonalisée dans la résolution spectrale de $A(S(t))$. Mais lorsque deux valeurs propres se croisent en un temps t_0, la limite de $|u_\varepsilon|^2$ peut dépendre non seulement de S, mais aussi de la façon dont S_ε approche S, et même encore de la sous–suite en ε choisie... des exemples à ce sujet peuvent être trouvés dans [52] Section 7, s'inspirant de travaux de [18],[24],[31]. Dans notre cadre cela semble indiquer que si les valeurs propres de $A(S(t))$ ne sont pas de multiplicité constante, la fonction $\mathcal{E}$ ne sera pas uniquement déterminée par v et S.

L'on constate ainsi que le cas non isentropique périodique est redoutablement plus difficile que le cas non isentropique dans $\mathbb{R}^d$, mais aussi surtout que le cas isentropique périodique.

L'idée de G. Métivier et S. Schochet dans [52] est de tirer parti des estimations *a priori* disponibles sur les solutions, dues au théorème 4.1, pour commencer l'étude en se restreignant à un nombre fini de modes de Fourier. Cela signifie que l'on peut commencer par considérer des modèles en dimension finie. La première partie de [52] (et la section 5 de [50]) est ainsi dévolue à l'étude du système dynamique suivant, à deux échelles en temps :

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t u_\varepsilon &= A(S) u_\varepsilon + \varepsilon Q(S)(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \\ \partial_t S_\varepsilon &= F(S) u_\varepsilon \end{aligned} \tag{24}$$

sur le domaine $\mathbb{D} \stackrel{\text{déf}}{=} [0, L_1] \times \cdots \times [0, L_d]$ où les L_i sont des réels strictement positifs.

Des hypothèses de structure sur A et F sont dégagées, portant notamment sur les valeurs propres de A : l'ensemble des S tels que $A(S)$ a au moins une valeur propre non nulle multiple, est analytique et de codimension 2. Cette hypothèse est cruciale dans l'analyse car elle permet de montrer que génériquement les valeurs propres non nulles de $A(S(t))$ sont simples. Notons que dans [52], il est montré (Théorème 6.1) que sous certaines restrictions sur les tailles L_i (L_j^{-4} et $L_j^{-2} L_k^{-2}$ doivent être indépendantes dans $\mathbb{Q}$) ces hypothèses sont toujours satisfaites dans le cas où le système modèle est une troncature spectrale des équations d'Euler compressibles non isentropiques.

L'hypothèse importante de généricité est alors la suivante : en notant $(i\lambda_j(S(t)))_{j \neq 0}$ les valeurs propres non nulles de $A(S(t))$ (répétées suivant leur multiplicité) on définit

$$\Omega \stackrel{\text{déf}}{=} \{ S \mid \lambda_j(S(t)) \neq \lambda_k(S(t)),\ \forall j \neq k,\ jk \neq 0 \}.$$

DÉFINITION 4.3. — *La fonction S est générique si pour tout $t \in [0,T]$, $S(t) \in \Omega$ et*

$$\lambda_j(S) - \lambda_k(S) = \lambda_\ell(S) \;\Rightarrow\; \partial_t\left(\lambda_j(S) - \lambda_k(S) - \lambda_\ell(S)\right) \neq 0.$$

Sous cette hypothèse sur S on peut obtenir une équation sur la limite faible de u_ε, qui a une solution unique dont on montre que pour presque toutes données initiales elle est générique au sens de la définition 4.3 (ce qui justifie bien la terminologie employée dans cette définition). Ainsi l'on obtient un théorème de convergence des solutions $(u_\varepsilon, q_\varepsilon, S_\varepsilon)$ vers les solutions du système limite.

Nous n'allons pas détailler ce système limite dans le cadre abstrait, mais revenir plutôt aux équations d'Euler pour déduire de l'analyse abstraite des théorèmes de convergence des solutions des équations d'Euler non isentropiques (17). La matrice de pénalisation ici est la suivante

$$A(S) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{a_0}\mathrm{div} \\ \dfrac{1}{r_0}\nabla & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $a_0 = \mathcal{A}(S,0)$ et $r_0 = \mathcal{R}(S,0)$.

Le spectre de $A(S)$ s'obtient en analysant l'opérateur $W_S \stackrel{\text{déf}}{=} -\dfrac{1}{a_0}\mathrm{div}\left(\dfrac{1}{r_0}\nabla\right)$, autoadjoint positif dans $L^2(\mathbb{D}, a\,dx)$, et à résolvante compacte. On note $0 = \mu_{0,S} < \mu_{1,S} \leq \cdots$ ses valeurs propres, et $\lambda_{j,S} \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\mu_{j,S}}$. Les vecteurs propres (normalisés) associés sont notés $\Phi_{j,S}$, et le théorème de convergence va reposer sur l'hypothèse suivante, liée à la définition de généricité 4.3.

DÉFINITION 4.4. — *La fonction $S \in C^0([0,T], H^s(\mathbb{D}))$ vérifie la condition (G) si*

(i) *Pour tout $t \in [0,T]$, pour tout $j > 0$, $\mu_{j,S(t)}$ est simple.*

(ii) *Pour tout triplet (j,k,l) d'entiers non nuls, on a presque partout sur $[0,T]$,*

$$\lambda_{j,S(t)} - \lambda_{k,S(t)} \neq \lambda_{\ell,S(t)}.$$

Le théorème principal est le suivant.

THÉORÈME 4.5 ([50],[52]). — *Si S vérifie la condition (G) alors (v,S) vérifient les équations limites (22,23) avec*

$$\kappa^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \lambda_{j,S(t)} (\Phi_{j,S(t)}(x))^2, \quad \kappa^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{\lambda_{j,S(t)}} |\nabla\Phi_{j,S(t)}(x)|^2$$

où σ_j est calculé explicitement en fonction des données initiales et des Φ_{j,S_0}.

La démonstration de ce résultat sort du cadre de cet exposé. Indiquons simplement que la démonstration consiste comme prévu à se ramener à la dimension finie en faisant agir un projecteur spectral sur h_ε, en tirant parti des estimations a priori fournies par le théorème 4.1. On peut alors décomposer h_ε sur les J premiers vecteurs propres de $W_{S(t)}$ (pour $\varepsilon \leq \varepsilon_J$) — en utilisant la compacité de S_ε en temps on peut montrer que J peut être choisi indépendemment de $t \in [0,T]$. Les termes non linéaires dont on cherche la limite faible s'écrivent de la manière suivante :

$$\sum_{j \leq J} \beta^{\varepsilon}_{j,\ell} \exp\left(\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_0^t \lambda^{\varepsilon}_j(s)\, ds \pm \frac{i}{\varepsilon} \int_0^t \lambda^{\varepsilon}_\ell(s)\, ds \right).$$

Notons qu'il n'y a que des interactions bilinéaires dans la phase, parce que l'on cherche la projection de ces termes non linéaires sur le noyau de l'opérateur de pénalisation, c'est–à–dire sur le mode $\Phi_{0,S(t)}$ associé à la valeur propre 0. On peut montrer que les $\beta^{\varepsilon}_{j,\ell}$ ont une limite forte quand ε tend vers zéro. Par le théorème de la phase stationnaire, ne demeurent à la limite dans la somme que les indices j, ℓ tels que

$$\pm \int_0^t \lambda^{\varepsilon}_j(s)\, ds \pm \int_0^t \lambda^{\varepsilon}_\ell(s)\, ds = 0,$$

c'est–à–dire que $\ell = j$ et les signes sont opposés.

Il reste alors à vérifier que les séries obtenues sont convergentes dans $C^0([0,T], H^s(\mathbb{D}))$, ce qui conclut la première partie de l'analyse : le terme $\mathcal{E}$ est obtenu ainsi. Il reste maintenant à déterminer l'evolution temporelle des coefficients de cette série, afin d'obtenir l'expression des coefficients $\kappa^{(1)}$ et $\kappa^{(2)}$. Des hypothèses de non résonance interviennent ici, ainsi que des éléments de théorie spectrale. Nous ne rentrons pas dans les détails techniques mais renvoyons à [52] Section 9.

Nous commenterons ce résultat, en présentant les problèmes ouverts qui y sont rattachés, dans la section 4.5 suivante. Pour terminer cet exposé, plaçons-nous en dimension 1 d'espace : ce cas est bien plus favorable, d'abord parce que $W_{S(t)}$ y prend une forme plus simple (voir [52] Section 11), mais surtout parce que la contrainte incompressible sur la limite v se traduit en dimension 1 par $v(t,x) = \underline{v}(t)$, constant en x.

Le théorème dans ce cas est le suivant.

Théorème 4.6 ([50],[52]). — *Supposons que* $\mathcal{R}_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}(S,0)$ *et* $\mathcal{A}_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{A}(S,0)$ *vérifient*

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial S}(\sigma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_0(\sigma) - \frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial S}(\sigma) \neq 0.$$

Alors pour tout $s \geq 2$*, il existe un* G_δ*-dense* $\mathcal{G} \subset H^s(\mathbb{R}/_{L\mathbb{Z}})$ *tel que pour tout* S *dans* $\mathcal{G}$*, le spectre de* W_S *est simple et la condition de non résonance est vérifiée :* $\lambda_{j,S} \neq \lambda_{k,S} + \lambda_{\ell,S}$*.*

En particulier, $S(t)$ *vérifie alors la condition* (G) *et les conclusions du théorème 4.5 sont vraies.*

Remarque 4.7. — Notons comme dans [52] que dans le cas des équations compressiblees on a en fait $\mathcal{A}(S,p) = \dfrac{1}{\mathcal{R}} \dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial p}\cdot$ Il n'y a alors pas d'hypothèse de généricité à faire dans le théorème 4.6, et l'on trouve pour la limite faible de v_ε la solution de l'équation $\dfrac{d}{dt}\underline{v} = 0$, et l'équation de transport (22) sur S s'écrit avec v remplacé par $\underline{v}$. Les données initiales du système limite sont les moyennes spatiales des données initiales du système d'origine (voir le théorème 11.1 de [52]).

4.5. Conclusion et problèmes ouverts

Nous avons présenté dans ce paragraphe les résultats mathématiques les plus récents à ce jour concernant la limite incompressible non visqueuse. Le cas où les équations sont posées dans $\mathbb{R}^d$ est bien compris puisqu'on démontre ([51]) un résultat de convergence forte vers un système limite connu.

Dans le cas périodique en revanche, l'article [52] est un véritable travail de pionnier qui ouvre la voie sur beaucoup de recherches. Une question cruciale est de déterminer si la condition (G) de la définition 4.3 est ou non générique — pour l'instant seul le cas monodimensionnel est résolu, toujours dans [52]. Une autre question fondamentale est de comprendre le système limite obtenu dans le théorème 4.5 ; en particulier ce système est–il bien posé ? On ne connait pour l'instant que des estimations *a priori* H^s sur ce système (voir [52] Section 12). En outre la convergence vers ce système limite est faible, et en particulier on n'a pas de description assez précise des oscillations pour pouvoir en déduire un résultat du même type que dans le cas isentropique : dans ce cas après action du groupe d'oscillations on a pu montrer la convergence forte vers un système limite dont une partie est celui vérifié par la limite faible, mais qui contient aussi une équation couplée gardant trace des oscillations.

Toutes ces questions restent largement ouvertes pour les équations non isentropiques, sans parler du cas où les équations sont posées dans un domaine plus général que $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{T}^d$, qui semble pour l'instant hors d'atteinte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Alazard – Incompressible limit of the non-isentropic Euler equations with solid wall boundary conditions, *soumis.*

[2] V. Arnold – Sur la géométrie différentiable des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Annales de l'Institut Fourier*, **16** (1966), 319–361.

[3] H. Bahouri et J.-Y. Chemin – Équations d'ondes quasilinéaires et estimation de Strichartz, *American Journal of Mathematics*, **121** (1999), 1337–1377.

[4] H. Beirao da Veiga – On the sharp singular limit for slightly compressible fluids, *Math. Methods Appl. Sci.*, **18** (1995), no. 4, 295–306.

[5] H. Beirao da Veiga – Singular limits in compressible fluid dynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **128** (1994), no. 4, 313–327.

[6] D. Bresch, B. Desjardins, E. Grenier et C.K. Lin – Low Mach number limit of viscous polytropic flows: formal asymptotics in the periodic case, *Stud. Appl. Math.*, **109** (2002), no. 2, 125–149.

[7] G. Browning et H.-O. Kreiss – Problems with different time scales for nonlinear partial differential equations, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **42** (1982), 4, 704–718.

[8] N. Burq – Mesures semi-classiques et mesures de défaut, *Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97*, Astérisque **245** (1997), Exp. No. 826, 4, 167–195.

[9] J.-Y. Chemin – *Fluides parfaits incompressibles*, Astérisque **230**, 1995.

[10] R. Danchin – Fluides légèrement compressibles et limite incompressible, *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles de l'École polytechnique* 2000–2001, Exp. No. III, 19 pages, 2001.

[11] R. Danchin – Zero Mach number limit for compressible flows with periodic boundary conditions, *Amer. J. Math.* **124** (2002), no. 6, 1153–1219.

[12] R. Danchin – Zero Mach number limit in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (4) **35** (2002), no. 1, 27–75.

[13] B. Desjardins et E. Grenier – Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space, *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **455** (1999), no. 1986, 2271–2279.

[14] B. Desjardins, E. Grenier, P.-L. Lions et N. Masmoudi – Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions, *J. Math. Pures Appl.*, (9) **78** (1999), no. 5, 461–471.

[15] B. Desjardins et C.-K. Lin – A survey of the compressible Navier-Stokes equations, *Taiwanese J. Math.*, **3** (1999), no. 2, 123–137.

[16] A. Dutrifoy et T. H'midi – The incompressible limit of solutions of the two-dimensional compressible Euler system with degenerating initial data, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **336** (2003), no. 6, 471–474.

[17] W. E – Propagation of oscillations in the solutions of 1-D compressible fluid equations, *Comm. Partial Differential Equations*, **17** (1992), no. 3-4, 347–370.

[18] C. Fermanian et P. Gérard – Mesures semi-classiques et croisements de mode, *Bull. S.M.F*, **130** 1 (2002), 123–168.

[19] I. Gallagher – Asymptotics of the solutions of hyperbolic equations with a skew–symmetric perturbation, *Journal of Differential Equations* **150** (1998), 363–384, 1998.

[20] I. Gallagher – A remark on smooth solutions of the weakly compressible Navier–Stokes equations, *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **40** (2000), 3, 525–540.

[21] P. Gérard – Microlocal defect measures, *Communications in Partial Differential Equations*, **16** (1991), 1761–1794.

[22] J. Ginibre et G. Velo – Generalized Strichartz inequalities for the wave equation, *Journal of Functional Analysis*, **133** (1995), 50–68.

[23] E. Grenier– Oscillatory perturbations of the Navier–Stokes equations, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **76** (1997), 477-498.

[24] G. Hagedorn – Proof of the Landau-Zener formula in an adiabatic limit with small eigenvalue gap, *Comm. Math. Phys.*, **110** (1987), 519–524.

[25] T. Hagstrom et J. Lorenz – All–time existence of classical solutions for slightly compressible flows, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, **28** (1998), 3, 652-672.

[26] T. Hagstrom et J. Lorenz – On the stability of approximate solutions of hyperbolic-parabolic systems and the all-time existence of smooth, slightly compressible flows, *Indiana Univ. Math. J.*, **51** (2002), no. 6, 1339–1387.

[27] T. Iguchi – The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equation in $\mathbb{R}^n_+$, *Math. Methods Appl. Sci.*, **20** (1997), no. 11, 945–958.

[28] H. Isozaki – Wave operators and the incompressible limit of the compressible Euler equation, *Comm. Math. Phys.*, **110** (1987), no. 3, 519–524.

[29] H. Isozaki – Singular limits for the compressible Euler equation in an exterior domain. *J. Reine Angew. Math.*, **381** (1987), 1–36.

[30] H. Isozaki – Singular limits for the compressible Euler equation in an exterior domain. II. Bodies in a uniform flow, *Osaka J. Math.*, **26** (1989), no. 2, 399–410.

[31] A. Joye – Proof of the Landau-Zener formula, *Asymptotic Analysis*, **9** (1994), 209–258.

[32] T. Kato – *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag, Berlin, 1980.

[33] S. Klainerman – Global existence for nonlinear wave equations, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, **33**, (1980) 43–101.

[34] S. Klainerman et M. Machedon – Remark on Strichartz type inequalites (with an appendix of J. Bourgain and D. Tataru), *International Math. Research Notices*, **5** (1996), 201–220.

[35] S. Klainerman et A. Majda – Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters, and the incompressible limit of compressible fluids, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **34** (1981), 481–524.

[36] S. Klainerman et A. Majda – Compressible and incompressible fluids, , *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **35** (1982), 629–651.

[37] R. Klein – Semi-implicit extension of a Godunov-type scheme based on low Mach number asymptotics, I, One-dimensional flow, *J. Comput. Phys.*, **121** (1995), no. 2, 213–237.

[38] H.-O. Kreiss, J. Lorenz et M. J. Naughton – Convergence of the solutions of the compressible to the solutions of the incompressible Navier-Stokes equations, *Adv. in Appl. Math.*, **12** (1991), no. 2, 187–214.

[39] P. Lax – Hyperbolic systems of conservation laws II. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **10** (1957), 537–566.

[40] P.-L. Lions – *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Vol. I, Incompressible Models, Oxford Science Publications, 1997.

[41] P.-L. Lions – *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Vol. II, Compressible Models, Oxford Science Publications, 1997.

[42] P.-L Lions et N. Masmoudi – Une approche locale de la limite incompressible, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329** (1999), no. 5, 387–392.

[43] P.-L Lions et N. Masmoudi – Incompressible limit for a viscous compressible fluid, *J. Math. Pures Appl.* (9) **77** (1998), no. 6, 585–627.

[44] A. Majda – *Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables*, Applied Mathematical Sciences, **53**, *Springer Verlag*, New York, 1984.

[45] A. Majda et S. Osher – Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary, *Comm. Pure Appl. Math.*, **28** (1975), 607–675.

[46] C. Marchioro et M. Pulvirenti – *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Applied Mathematical Sciences, **96**, *Springer Verlag*, New York, 1994.

[47] N. Masmoudi – Incompressible, inviscid limit of the compressible Navier–Stokes system, *Annales de l'Institut H. Poincaré, Anal. non linéaire*, **18** (2001), 2, 199–224.

[48] N. Masmoudi – Asymptotic problems and compressible-incompressible limit, *Advances in mathematical fluid mechanics* (Paseky, 1999), 119–158, Springer, Berlin, 2000.

[49] A. Meister – Asymptotic single and multiple scale expansions in the low Mach number limit, *SIAM J. Appl. Math*, **60** (1999), no. 1, 256–271.

[50] G. Métivier et S. Schochet – Limite incompressible des équations d'Euler non isentropiques, *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles de l'École polytechnique* 2000–2001, Exp. No. X, 17 pages, 2001.

[51] G. Métivier et S. Schochet – The incompressible limit of the non-isentropic Euler equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **158** (2001), no. 1, 61–90.

[52] G. Métivier et S. Schochet – Averaging theorems for conservative systems and the weakly compressible Euler equations, *J. Differential Equations*, **187** (2003), no. 1, 106–183.

[53] C.D. Munz – Computational fluid dynamics and aeroacoustics for low Mach number flow, *Hyperbolic partial differential equations* (Hamburg, 2001), 269–320, Vieweg, Braunschweig, 2002.

[54] T. Schneider, N. Botta, K.J. Geratz et R. Klein – Extension of finite volume compressible flow solvers to multi-dimensional, variable density zero Mach number flows, *J. Comput. Phys.*, **155** (1999), no. 2, 248–286.

[55] S. Schochet – The compressible Euler equations in a bounded domain: existence of solutions and the incompressible limit, *Comm. Math. Phys.*, **104** (1986), 49–75.

[56] S. Schochet – Fast singular limits of hyperbolic PDEs, *Journal of Differential Equations*, **114** (1994), 476–512.

[57] P. Secchi – On the incompressible limit of inviscid compressible fluids, Navier-Stokes equations and related nonlinear problems (Ferrara, 1999), *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.)*, **46** (2000), 21–33.

[58] P. Secchi – On the singular incompressible limit of inviscid compressible fluids, *J. Math. Fluid Mech.*, **2** (2000), no. 2, 107–125.

[59] T. Sideris – Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids, *Comm. Math. Phys.*, **101** (1985), no. 4, 475–485.

[60] L. Tartar – H-measures, a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, **115** (1990), 193-230.

[61] S. Ukai – The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equation. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **26** (1986), no. 2, 323–331.

[62] V. Yudovitch – Non stationary flows of an ideal incompressible fluid, *Zhurnal Vych Matematika*, **3** (1963), 1032–1066.

[63] R. Zeytounian –*Theory and applications of nonviscous fluid flows*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[64] R. Zeytounian – *Asymptotic modelling of fluid flow phenomena*, Fluid Mechanics and its Applications, **64**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

Isabelle GALLAGHER

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Centre de Mathématiques
UMR 7640 du CNRS
F-91128 PALAISEAU Cédex
E-mail : `Isabelle.Gallagher@math.polytechnique.fr`