M1 Mathématiques
Université Paris Diderot
Analyse réelle.
Travaux Dirigés : feuille 1

26 septembre 2008

Exercice 1 : Théorème de Heine-Borel

Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que E est compact si et seulement si de tout recouvrement de E par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini de E.

Exercice 2

Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que E est compact si et seulement si toute famille de fermés dont l'intersection est vide admet une sous famille finie dont l'intersection est vide.

Exercice 3

Soit E un espace métrique avec une distance d.

1) Pour $A \subset E$ et $x \in E$, on note

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue.

2) On définit pour $r > 0$ le voisinage de A

$$V_r(A) = \{x \in E; d(x, A) < r\}.$$

1. Montrer que $V_r(A)$ est un ouvert.
2. Si B est un compact non vide de E, montrer que l'ensemble

$$\{r > 0; B \subset V_r(A)\}$$

est non vide.

3) Déduire de la question précédente que si A et B sont des parties compactes non vides de E, on peut définir le réel

$$D(A, B) = \inf\{r > 0; B \subset V_r(A) \text{ et } A \subset V_r(B)\}. \tag{1}$$

Montrer que si A, B et C sont des parties compactes non vides de E

1. $D(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
2. $D(A,B) = D(B,A)$.
3. $D(A,B) \leq D(A,C) + D(C,B)$.

En déduire que D est une distance sur l'ensemble $\mathcal{K}(E)$ des parties compactes non vides de E.

4) On prend $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$. On considère les parties de E :

$$A_{a,\ell} = \{u \in E; \|u\|_\infty \leq a, u \text{ lipchitzienne avec une constante} \leq \ell\},$$

pour $a > 0$ et $\ell > 0$. Expliquer pourquoi $A_{a,\ell}$ est un compact non vide de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

5)

1. Montrer que si $a < b$ et $k > \ell$, alors
$$\inf\{r; A_{b,\ell} \subset V_r(A_{a,k})\} = b - a.$$
2. Montrer que si $a < b$ et $k > \ell$, alors pour tout $\epsilon > 0$,
$$A_{a,k} \subset V_{a(1-\frac{\ell}{k})+\epsilon}(A_{b,\ell}).$$
3. Déduire que si $\frac{b}{a} > 2 - \frac{\ell}{k} > 1$, alors
$$D(A_{b,\ell}, A_{a,k}) = b - a.$$

Exercice 4

1. Montrer que (E,d) est complet si et seulement si pour toute suite décroissante de fermés non vides $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que diam F_n tend vers 0 alors l'intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.
2. Montrer que tout espace métrique dont toutes les boules fermées sont compactes est complet.

Exercice 5

Soient (E_1,d_1) et (E_2,d_2) deux espaces métriques.

1. Montrer que si $E = E_1 \times E_2$ et si d définie sur E par $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$, alors d est une métrique sur E.
2. Montrer que si (E_1,d_1) et (E_2,d_2) sont complets, alors (E,d) est complet.
3. Montrer que si (E_1,d_1) et (E_2,d_2) sont compacts, alors (E,d) est compact.
4. Soit (K,d) un espace métrique compact, F un espace métrique, et f une application de K dans F. Montrer que f est continue si et seulement si le graphe de f est compact.

Exercice 6

Soit (K,d) un espace métrique compact, et $T : K \to K$ une application telle que $d(Tx,Ty) \geq d(x,y)$, pour tout $x, y \in K$.

1. Montrer que T est une isométrie. Pour cela, on utilisera la propriété que pour tout $\delta > 0$, il existe un recouvrement fini de K par des boules de rayons δ, et pour deux éléments x, y de K, on considérera la suite $T^n x$ et $T^m y$ pour montrer que
$$d(x,y) \leq d(Tx,Ty) + 2\delta.$$

2. Montrer que T est surjective. On utilisera le fait que $(T^n(K))_n$ forment une suite emboitée de compacts non vides et on notera X_∞ son intersection. On montrera que X_∞ est un compact non vide et que $TX_\infty \subset X^\infty$.
En supposant que $X_\infty \neq K$, on voit alors qu'il existe $\delta > 0$, tel que l'ensemble Y des éléments de K dont la distance à X^∞ est $\geq \delta$ est non vide. On montrera que Y est un compact et que $TY \subset Y$. On peut alors construire la suite d'ensembles compacts non vides emboîtés $(T^n(Y))_n$ et son intersection $Y_\infty = \cap_n T^n(Y)$. Montrer alors que $Y_\infty \subset X_\infty$ et en déduire une contradiction.

Exercice 7

Soit F un espace de Banach avec la norme $|.|_F$.

1. Soit A un ensemble. On note $\mathcal{B}(A,F)$ l'ensemble des applications bornées de A à valeurs dans F. On munit $\mathcal{B}(A,F)$ de la norme $\|.\|$, où
$$\|f\| = \sup_{x\in A} |f(x)|_F.$$
Montrer qu'avec cette norme, $\mathcal{B}(A,F)$ est un espace de Banach.
2. Soit X un espace métrique. On note $\mathcal{C}_b(X,F)$ l'espace des applications continues et bornées de X dans F. Montrer que $\mathcal{C}_b(X,F)$ est un espace de Banach.
3. Soit E un espace vectoriel de dimension fini. On note $\mathcal{C}_0(E,F)$ l'espace des applications continues f de E dans F telles que
$$\lim_{|x|_E\to\infty} |f(x)|_F = 0.$$
Montrer que $\mathcal{C}_0(E,F)$ est un espace de Banach.
4. Soit K un espace métrique compact. Montrer que $\mathcal{C}(K,F)$ est un espace de Banach.

Exercice 8

Soit $I = [0,1]$. Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est Lipschitzienne si
$$\ell(f) = \sup_{x\neq y\in I} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} < +\infty.$$
On note $\mathcal{L}(I)$ l'ensemble des fonctions Lipschitziennes de I dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{L}(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$.
2. Montrer que $\|\cdot\|$ définie par
$$\|f\| = \|f\|_\infty + \ell(f)$$
est une norme sur $\mathcal{L}(I)$.
3. Montrer que $\mathcal{L}(I)$ est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$.
4. $\mathcal{L}(I)$ est-il un fermé de $\mathcal{C}(I)$?

Exercice 9

Soit $I = [0,1]$. Soit $\alpha \in]0,1[$. Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est Hölderienne d'exposant α si
$$h_\alpha(f) = \sup_{x\neq y\in I} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty.$$
On note $\mathcal{H}_\alpha(I)$ l'ensemble des fonctions Hölderiennes d'exposant α de I dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}_\alpha(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$.

2. Montrer que $\|\cdot\|_\alpha$ définie par
$$\|f\|_\alpha = |f(0)| + h_\alpha(f)$$
est une norme sur $\mathcal{H}_\alpha(I)$ et que $\|f\|_\infty \leq \|f\|_\alpha$.
3. Porposer une norme équivalente à la précédente.
4. Montrer que $\mathcal{H}_\alpha(I)$ est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|_\alpha$.
5. Montrer que l'ensemble
$$F_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{H}_\alpha(I),\ \lim_{t\to 0} \sup_{x\neq y \in I, |x-y|<t} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0 \right\}$$
est un fermé non vide de $\mathcal{H}_\alpha(I)$.

Exercice 10

Soit E un espace de Banach et soit f une application de E dans E, continue en 0. On suppose qu'il existe une constante positive M telle que
$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq M, \quad \forall x, y \in E.$$
Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue T de E dans E telle que
$$\|f(x) - Tx\| \leq M',$$
où M' est une constante positive.
Pour cela, on pourra montrer que

1. Pour tout entier positif p et pour tout $x \in E$, la suite $(\frac{1}{p^n} f(p^n x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et que sa limite notée Tx ne dépend pas de p.
2. Montrer que
$$T(x+y) = Tx + Ty, \quad \forall x, y \in E, \tag{2}$$
et que
$$T0 = 0.$$
3. Montrer que pour tout entier p,
$$T(px) = pTx, \quad \forall x \in E.$$
4. En déduire que pour tout rationnel p/q, $q \neq 0$,
$$T(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}Tx, \quad \forall x \in E. \tag{3}$$
5. Montrer que pour tout $x \in E$,
$$\|f(x) - Tx\| \leq M.$$
6. Déduire du point précédent que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\|Tx\| \leq 2M + \epsilon, \quad \forall x \in B(0,\delta). \tag{4}$$
7. Déduire de (2), (3) et (4) que T est continue.
8. Déduire de la question précédente et de (2) et (3) que T est linéaire.
9. Montrer que T est unique.