Université Paris Diderot
M1 Mathématiques
Analyse réelle
Année 09/10

Travaux Dirigés : feuille 1

Exercice 1

1. Montrer qu'un espace métrique (E, d) est complet si et seulement si, pour toute suite décroissante de fermés non vides $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que diam F_n tend vers 0, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.
2. Montrer que tout espace métrique dont toutes les boules fermées sont compactes est complet.

Exercice 2

Soit (E, d) un espace métrique précompact et A une partie de E. (A, d) est-il précompact ?

Exercice 3 : Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit (E, d) un espace métrique. On se propose de montrer que E est compact si et seulement si de tout recouvrement de E par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini de E.

1. Montrer que cette dernière propriété implique la compacité de E.
2. On suppose E compact. Montrer que si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts qui recouvrent E, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall x \in E,\ \exists i \in I\ /\ B(x, \varepsilon) \subset U_i.$$
3. Montrer la réciproque de 1) en utilisant 2) ainsi que la la précompacité de E.
4. Montrer que E est compact si et seulement si toute famille de fermés dont l'intersection est vide admet une sous famille finie dont l'intersection est vide.

Exercice 4

Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques.

1. Montrer que si $E = E_1 \times E_2$ et si d définie sur E par $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$, alors d est une métrique sur E.
2. Montrer que si (E_1, d_1) et (E_2, d_2) sont complets, alors (E, d) est complet.
3. Montrer que si (E_1, d_1) et (E_2, d_2) sont compacts, alors (E, d) est compact.
4. Soit (K, d) un espace métrique compact, F un espace métrique, et f une application de K dans F. Montrer que f est continue si et seulement si le graphe de f est compact.

Exercice 5

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Pour $A \subset E$ (A non vide) et $x \in E$, on note $d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y)$.

   Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue.
2. On définit pour $r > 0$: $V_r(A) = \{x \in E; d(x, A) < r\}$.

   (a) Montrer que $V_r(A)$ est un ouvert.
   (b) Si B est un compact non vide de E, montrer que l'ensemble $\{r > 0; B \subset V_r(A)\}$ est non vide.
3. Déduire de la question précédente que si A et B sont des parties compactes non vides de E, on peut définir le réel
$$D(A, B) = \inf\{r > 0; B \subset V_r(A) \text{ et } A \subset V_r(B)\}.$$
   Montrer que si A, B et C sont des parties compactes non vides de E
   (a) $D(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
   (b) $D(A, B) = D(B, A)$.
   (c) $D(A, B) \leq D(A, C) + D(C, B)$.
   En déduire que D est une distance sur l'ensemble $\mathcal{K}(E)$ des parties compactes non vides de E.
4. On prend $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$. On considère les parties de E :
$$A_{a,\ell} = \{u \in E; \|u\|_\infty \leq a, u \text{ lipchitzienne avec une constante } \leq \ell\},$$
   pour $a > 0$ et $\ell > 0$. Expliquer pourquoi $A_{a,\ell}$ est un compact non vide de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$
5. (a) Montrer que si $a < b$ et $k > \ell$, alors $\inf\{r; A_{b,\ell} \subset V_r(A_{a,k})\} = b - a$.
   (b) Montrer que si $a < b$ et $k > \ell$, alors pour tout $\epsilon > 0$, $A_{a,k} \subset V_{a(1-\frac{\ell}{k})+\epsilon}(A_{b,\ell})$.
   (c) Déduire que si $\frac{b}{a} > 2 - \frac{\ell}{k} > 1$, alors $D(A_{b,\ell}, A_{a,k}) = b - a$.

Exercice 6

Soit (K, d) un espace métrique compact, et $T : K \to K$ une application telle que $d(Tx, Ty) \geq d(x, y)$, pour tout $x, y \in K$.

1. Montrer que T est une isométrie. Pour cela, on pourra montrer que pour tout $x \in K$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(T^k x, x) \leq \varepsilon$.
2. Montrer que T est surjective. Indication : montrer que $T(K)$ est dense dans K.

Exercice 7

1. Soient E un e.v.n. et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boules ouvertes telles que : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; B_{n+1} \subset B_n$.
   Montrer que les centres des B_n forment une suite de Cauchy dans E.
2. Montrer que ce résultat n'est pas nécessairement vrai dans un espace métrique quelconque.

Exercice 8 : Théorème de Riesz

Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que la boule unité fermée $B_f(0, 1)$ est compacte.

1. Montrer l'existence d'une famille finie $x_1, \ldots, x_r$ d'éléments de $B_f(0, 1)$ tels que
$$B_f(0, 1) \subset \bigcup_{i=1}^{r} B_f(x_i, 1/2).$$
   Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $x_1, \ldots, x_r$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $B_f(0, 1) \subset F + B_f(0, 2^{-n})$.
   En déduire que F est dense dans E et conclure que E est de dimension finie.