Université Paris Diderot
M1 Mathématiques
Analyse réelle
Année 09/10

Travaux Dirigés : feuille 2

Exercice 1

Soit f une fonction continue et bijective d'un compact X dans un espace métrique F. Montrer que f est un homéomorphisme.
Indication : on pourra montrer que l'image de tout fermé est fermée.

Exercice 2

Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Montrer que $\overline{A}$ est compact si et seulement si toute suite *dans* A admet une sous-suite qui converge dans E.

Exercice 3 : Extraction diagonale

Montrer que l'ensemble des suites à valeurs dans $[0, 1]$, muni de la distance associée à la norme $\|x - y\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|x_n - y_n|$ est compact.

Exercice 4

Soit $I = [0, 1]$. Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne si

$$\ell(f) = \sup_{x\neq y\in I} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < +\infty.$$

On note $\mathcal{L}(I)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de I dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{L}(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\|\cdot\|$ définie par
$$\|f\| = \|f\|_\infty + \ell(f)$$
est une norme sur $\mathcal{L}(I)$.
3. Montrer que $\mathcal{L}(I)$ muni de cette norme est un espace de Banach.
4. $\mathcal{L}(I)$ est-il fermé dans $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$?

Exercice 5

L'espace $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes est muni de la norme : $\|P\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ pour $P = \sum_n a_n X^n$. Montrer que l'opérateur de dérivation : $P \mapsto P'$ est non continu bien que de noyau fermé.

Exercice 6

Sur l'espace vectoriel c_0 des suites de nombres complexes qui tendent vers 0, on définit la forme linéaire

$$l(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{2^n} \quad (x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0).$$

On munit c_0 de la norme $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Déterminer $\|l\|$.
Montrer qu'il n'existe aucun $x \in c_0$ tel que $x \neq 0$ et $|l(x)| = \|l\|.\|x\|$.

Exercice 7

Sur un e.v.n. E on considère une forme linéaire continue non nulle l, de noyau H.
Montrer que pour tout $x \in E$: $d(x, H) = \dfrac{|l(x)|}{\|l\|}$.

Exercice 8

Soit E un espace de Banach et soit f une application de E dans E, continue en 0. On suppose qu'il existe une constante positive M telle que

$$\forall x, y \in E \quad \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq M.$$

Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue T de E dans E telle que

$$(1) \qquad \exists M' > 0 \ / \ \forall x \in E \quad \|f(x) - T(x)\| \leq M'.$$

Pour cela, on pourra

1. Montrer que pour tout entier $p \geq 2$ et pour tout $x \in E$, la suite $(\frac{1}{p^n} f(p^n x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et que sa limite notée $T(x)$ ne dépend pas de p.
2. Montrer que $T(0) = 0$ et que
$$(2) \qquad \forall x, y \in E \quad T(x+y) = T(x) + T(y).$$
3. Montrer que pour tout entier p, $T(px) = pT(x), \quad \forall x \in E$.
4. En déduire que pour tout rationnel p/q, $q \neq 0$,
$$(3) \qquad T(\frac{p}{q} x) = \frac{p}{q} T(x), \quad \forall x \in E.$$
5. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|f(x) - T(x)\| \leq M$.
6. Déduire du point précédent que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$(4) \qquad \|T(x)\| \leq 2M + \epsilon, \quad \forall x \in B(0, \delta).$$
7. Déduire de (2), (3) et (4) que T est continue.
8. Déduire de la question précédente et de (2) et (3) que T est linéaire.
9. Montrer que T est l'unique application linéaire continue de E dans lui-même satisfaisant (1).

Exercice 9

1. Montrer que toute application continue d'un espace métrique compact (K, d) dans un espace métrique (F, D) est *uniformément continue*, c'est-à-dire vérifie :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall x, y \in K \quad d(x,y) < \alpha(\varepsilon) \Rightarrow D(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$
2. Montrer la réciproque du théorème d'Ascoli :
Soit (K, d) un espace métrique compact et $(F, |\,.\,|_F)$ un espace de Banach. Soit A une partie de $C(K, F)$ telle que $\overline{A}$ est compact dans $C(K, F)$ muni de la norme uniforme. Alors
(i) pour tout $x \in K$, $\overline{A(x)}$ est compact dans F,
(ii) A est équicontinue.

Exercice 10

Le théorème d'Ascoli reste-t-il vrai si on ne suppose pas que l'ensemble sur lequel les fonctions sont définies est compact ? Justifier. On pourra penser à la notion de « bosse glissante ».

Exercice 11

Soit $I = [0, 1]$. On note ici E_0 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On munit E_0 de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$ pour $f \in E_0$. On sait que $(E_0, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

On considère E_1 le sous-espace de E_0 constitué des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$.

1. L'espace E_1 est-il fermé dans $(E_0, \|.\|_\infty)$? Est-il une partie précompacte de $(E_0, \|.\|_\infty)$?
2. Pour $f \in E_1$, on introduit
$$\|f\|_{E_1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$
   (a) L'espace E_1 avec la norme $\|.\|_\infty$ est-il un espace de Banach ?
   (b) Montrer que $\|\cdot\|_{E_1}$ est une norme sur E_1.
   (c) Montrer que $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ est un espace de Banach.
   (d) E_1 est-il fermé dans l'espace $\mathcal{L}(I)$ de l'exercice 4 ?
   (e) Montrer que l'ensemble
$$K = \{f \in E_1, \|f\|_{E_1} \leq M\}$$
   est une partie précompacte de $(E_0, \|\cdot\|_\infty)$.