Université Paris Diderot
M1 Mathématiques
Analyse réelle
Année 09/10

Travaux Dirigés : feuille 3

Exercice 1

Soit $I=[0,1]$. Soit $\alpha\in]0,1[$. Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est hölderienne d'exposant α si

$$h_\alpha(f)=\sup_{x\neq y\in I}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<+\infty.$$

On note $\mathcal{H}_\alpha(I)$ l'ensemble des fonctions hölderiennes d'exposant α de I dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}_\alpha(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.
2. L'espace $(\mathcal{H}_\alpha(I),\|.\|_\infty)$ est-il un espace de Banach ?
3. Montrer que $\|\cdot\|_\alpha$ définie par
$$\|f\|_\alpha=|f(0)|+h_\alpha(f)$$
est une norme sur $\mathcal{H}_\alpha(I)$ et que $\|f\|_\infty\leq\|f\|_\alpha$.
4. Proposer une norme équivalente à la précédente.
5. Montrer que $\mathcal{H}_\alpha(I)$ est un espace de Banach avec la norme $\|\ \|_\alpha$.
6. Montrer que l'ensemble
$$F_\alpha=\left\{f\in\mathcal{H}_\alpha(I),\ \lim_{t\to0}\sup_{x\neq y\in I,|x-y|<t}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}=0\right\}$$
est un fermé non vide de $\mathcal{H}_\alpha(I)$.
7. Montrer que l'ensemble $K=\{f\in\mathcal{H}_\alpha(I),\|f\|_\alpha\leq M\}$ est précompact dans $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}),\|\ \|_\infty)$.

Exercice 2

On considère l'ensemble de fonctions

$$F=\left\{u:[0,1]\to\mathbb{R},\quad u(x)=\int_0^x v(t)\ dt\quad\text{où } v \text{ mesurable et } v=\pm1 \text{ presque partout}\right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-ensemble de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2. L'ensemble F est-il précompact dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|\ \|_\infty)$?
3. Est-il compact dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|\ \|_\infty)$?
4. Montrer que $\overline{F}$ contient $G_1=\{u \text{ affine par morceaux}, u(0)=0, |u'|\leq1 \text{ presque partout}\}$.
5. Montrer que $\overline{F}$ contient $G=\left\{u \text{ de classe } \mathcal{C}^1, u(0)=0, \|u'\|_\infty\leq1\right\}$.

Exercice 3

On rappelle le théorème de prolongement suivant :

Si (E,d) est un espace métrique, F une partie de E et (G,d') un espace métrique complet, toute application de F dans G *uniformément continue* sur F se prolonge de manière unique en une application continue de $\overline{F}$ dans G.

Soient (E,d) un espace métrique, F une partie de E d'*adhérence compacte* et $(G,\|\ \|)$ un espace de Banach. On considère une partie A de $\mathcal{C}(F,G)$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

– pour tout $x\in F$, $\overline{A(x)}$ est compact dans G,
– $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha(\varepsilon)>0$ tel que $\forall f\in A,\ \forall x,y\in F,\ d(x,y)<\alpha(\varepsilon)\Rightarrow\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$.

1. Montrer que tout élément f de A se prolonge en un élément f^* de $\mathcal{C}(\overline{F},G)$.
2. Montrer que l'ensemble $\{f^*, f\in A\}$ est une partie de $\mathcal{C}(\overline{F},G)$ d'adhérence compacte.
3. Montrer que $\overline{A}$ est compact dans l'espace $\mathcal{C}_b(F,G)$ des applications continues et bornées de F dans G, muni de la norme du sup.

Exercice 4 : métrique de la convergence en mesure.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions boréliennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et E l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{E}$ pour l'égalité presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, notée m).

Pour $f, g \in E$ on définit

$$d(f,g) = \int_0^1 \min\Big(|f-g|, 1\Big)\, dm.$$

(où, dans le membre de droite, f et g désignent abusivement deux représentants des classes f et g : on justifiera que l'intégrale existe et ne dépend pas du choix de ces représentants).

1. Montrer que d est une distance sur E.
2. Montrer que (E,d) est complet. Pour cela, (f_n) étant une suite de Cauchy dans (E,d) :
   (a) Montrer l'existence d'une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ telle que

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(f_{\varphi(n)}, f_{\varphi(n+1)}) \leq 2^{-n}.$$

   (b) Montrer que $\sum |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}| < +\infty$ m-presque partout. En déduire que $(f_{\varphi(n)})$ converge m-presque partout..
   (c) Montrer la convergence dans (E,d) de $(f_{\varphi(n)})$, puis celle de (f_n).
3. Montrer l'encadrement suivant : $\forall f, g \in E$ et $\forall \delta > 0$,

   $$\min(\delta,1)\,.\,m\Big(\{x : |f(x)-g(x)| \geq \delta\}\Big) \leq d(f,g) \leq \delta + m\Big(\{x : |f(x)-g(x)| \geq \delta\}\Big).$$

   En déduire que, dans (E,d), une suite (f_n) converge vers $f \in E$ si et seulement si :

   $$\forall \delta > 0, \quad \lim m\Big(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}\Big) = 0.$$

4. Montrer que, pour $M > 0$, l'ensemble $F_M = \{f \in L^\infty([0,1]) : \|f\|_\infty \leq M\}$ est fermé dans (E,d).
5. Montrer que F_M n'est pas compact dans (E,d).

Exercice 5 : Théorème de Baire.

1. Soit (E,d) un espace métrique.
   Montrer que toute intersection d'une famille *finie* d'ouverts denses est dense.
   En déduire que toute réunion d'une famille finie de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.
2. Soit (E,d) un espace métrique *complet*.
   Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ est dense.
   En déduire que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés de E d'intérieurs vides, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

Exercice 6

1. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ne peut pas admettre de famille génératrice dénombrable.
2. Peut-on munir l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ d'une norme qui en fasse un espace de Banach ?
3. On munit $\mathbb{C}[X]$ de la norme $\| \sum_n a_n X^n \| = \sup_n |a_n|$. Trouver une suite de Cauchy non convergente.

Exercice 7

1. Soit f une fonction réelle de variable réelle.
   Montrer que l'ensemble des points où f est continue est une intersection dénombrable d'ouverts.
2. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas une intersection dénombrable d'ouverts. (On pourra considérer $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.)
   En déduire qu'il n'existe pas de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3. Construire une fonction continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$.