Université Paris Diderot
M1 Mathématiques
Analyse réelle
Année 09/10

Travaux Dirigés : feuille 5

Dans les exercices qui suivent, m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

1) Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^n$ de mesure de Lebesgue finie.
Montrer que, pour $1 \leq p < q \leq +\infty$, $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.
Indication : On pourra établir l'inégalité suivante pour f mesurable positive :

$$\int f^p dm \leq m(\Omega)^{1-p/q} \left(\int f^q dm \right)^{p/q}.$$

2) On suppose ici que $\Omega =]0,1[\subset \mathbb{R}$. Montrer que l'inclusion précédente est stricte.

3) Montrer que $L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $p \geq 1$.

Exercice 2

Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^n$ et p un réel tel que $1 \leq p < +\infty$.
1) Pour f et g éléments de $L^p(\Omega)$, montrer l'inégalité

$$\| |f|^p - |g|^p \|_1 \leq p \left(\|f\|_p^{p-1} + \|g\|_p^{p-1} \right) \|f - g\|_p.$$

2) En déduire que l'application de $L^p(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$: $f \mapsto |f|^p$ est continue.

Exercice 3 (opérateur de troncature)

Soient Ω un borélien de $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\Omega)$ à valeurs *réelles*.
1) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit $T_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$T_N(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad |t| \leq N, \\ Nt/|t| & \text{si} \quad |t| > N. \end{cases}$$

Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} T_N(f) = f$ dans $L^p(\Omega)$.

2) Soit $(\Omega_N)_{N \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles mesurables tels que $\Omega = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \Omega_N$.
Soit χ_N la fonction caractéristique de Ω_N. Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} \chi_N . f = f$ dans $L^p(\Omega)$.

3) Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} \chi_N . T_N(f) = f$ dans $L^p(\Omega)$.

4) Mêmes questions avec $f \in L^p(\Omega)$ à valeurs *complexes* et $T_N : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, définie comme précédemment ici pour $t \in \mathbb{C}$.

Exercice 4

Soient Ω un borélien de $\mathbb{R}^n$ et p, q et r trois réels dans $[1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1/r$.
Montrer que pour tout couple de fonctions $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, on a

$$fg \in L^r(\Omega) \quad \text{et} \quad ||fg||_r \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Exercice 5

Soient $p, q \in [1, +\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que $L^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ est un sous-ensemble dense de $L^p(\Omega)$.

2) Montrer que $\{f \in L^p(\Omega) \bigcap L^q(\Omega) \text{ t. q. } ||f||_q \le 1\}$ est fermé dans $L^p(\Omega)$.

3) On suppose ici que $1 \le p < q < +\infty$.

Soient $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\Omega) \bigcap L^q(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ satisfaisant les deux conditions :

(i) $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k = f$ dans $L^p(\Omega)$,

(ii) $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $||f_k||_q \le C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Montrer que $f \in L^r(\Omega)$ et que $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k = f$ dans $L^r(\Omega)$ pour tout $r \in]p, q[$.

Indication : utiliser l'exercice précédent.

Exercice 6

Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^n$ et $1 \le p \le +\infty$. On suppose que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est borélienne et vérifie

$$\forall g \in L^p(\Omega) \quad fg \in L^1(\Omega).$$

Le but de l'exercice est de montrer que $f \in L^{p'}(\Omega)$ où p' est l'exposant conjugué de p.

On notera u une fonction de module 1 telle que $f = u\,|f|$.

1) Montrer le résultat dans le cas $p = +\infty$

On rappelle que, pour toute suite (g_k) convergeant dans $L^p(\Omega)$, il existe une sous-suite $(g_{\varphi(k)})$ et une fonction $h \in L^p(\Omega)$ telles que

$$(g_{\varphi(k)}) \text{ converge p.p.} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ |g_{\varphi(k)}| \le h.$$

2) Montrer que $\Phi : L^p(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par $\Phi(g) = \int fg\,dm$ est une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$.

(*Rappel :* une forme linéaire sur un e.v.n. est continue si et seulement si son noyau est fermé.)

3) On suppose $1 < p < +\infty$. Montrer que $f \in L^{p'}(\Omega)$ en utilisant les fonctions

$$\overline{u}\ |f|^{p-1}\,\mathbb{1}_{\{x\in\Omega\cap[-N,+N]^n, |f(x)|\le M\}}.$$

4) Montrer le résultat quand $p = 1$ en utilisant des fonctions de la forme $\overline{u}\,\mathbb{1}_{\Omega\cap A}$ avec A borélien de $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction mesurable à valeurs complexes sur Ω, non Lebesgue-presque partout nulle. Pour $p \in]0, +\infty[$ on note

$$\varphi(p) = \int_\Omega |f|^p\,dm = \|f\|_p^p.$$

On pose $E_f = \{p \in]0, +\infty[\ /\ \varphi(p) < +\infty\}$.

1) Montrer que E_f est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que $\log\varphi$ est une fonction convexe sur E_f, continue sur E_f. Que peut-on en déduire pour la fonction : $p \in E_f \mapsto \|f\|_p$?

2) On suppose ici que Ω est de mesure 1. Que peut-on dire de E_f ?
Montrer que la fonction $p \mapsto \|f\|_p$ est croissante sur E_f.

3) Donner un exemple où E_f est ouvert (resp. fermé) dans $]0, +\infty[$. Peut-il être réduit à un point ?

4) On suppose que E_f contient un intervalle de la forme $[r, +\infty[$.
Montrer que $\|f\|_p$ tend vers $\|f\|_\infty$ quand p tend vers $+\infty$.