M1 Mathématiques
Université Paris Diderot
Analyse réelle.
Travaux Dirigés : feuille 2

5 novembre 2008

Exercice 1

Le théorème d'Ascoli reste-t-il vrai si on ne suppose pas que l'ensemble sur lequel les fonctions sont définies est compact ? Justifier. On pourra penser à la notion de « bosse glissante ».

Exercice 2

Soit $I = [0,1]$ et E_0 le $\mathbb{R}$-ev des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On munit E_0 de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$, si $f \in E_0$. On sait que $(E_0, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

On considère E_1 le sous-espace de E_0 constitué des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$.

1) L'espace E_1 est-il fermé dans $(E_0, \|.\|_\infty)$? Est-il une partie précompacte de $(E_0, \|.\|_\infty)$?

2) Pour $f \in E_1$, on introduit

$$\|f\|_{E_1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. L'espace E_1 avec la norme $\|.\|_\infty$ est-il un espace de Banach ?
2. Montrer que $\|\cdot\|_{E_1}$ est une norme sur E_1.
3. Montrer que $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ est un espace de Banach.
4. Montrer que l'ensemble
$$K = \{f \in E_1, \|f\|_{E_1} \leq M\}$$
est une partie précompacte de $(E_0, \|\cdot\|_\infty)$.

3) Pour α vérifiant $0 < \alpha < 1$, on note $E_{0,\alpha}$ l'ensemble

$$E_{0,\alpha} = \left\{ f \in E_0, \sup_{x,y\in I, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty \right\}$$

On dit que $E_{0,\alpha}$ est l'espace des fonctions hölderiennes sur I d'exposant α.
Pour $f \in E_{0,\alpha}$, on introduit la quantité :

$$\|f\|_{E_{0,\alpha}} = \|f\|_\infty + \sup_{x,y\in I, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

1. L'espace $(E_{0,\alpha}, \|.\|_\infty)$ est-il un espace de Banach ?
2. Montrer que $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(I,\mathbb{R})}$ est une norme sur $\mathcal{C}^{0,\alpha}(I,\mathbb{R})$.
3. Montrer que $(E_{0,\alpha}, \|\cdot\|_{E_{0,\alpha}})$ est un espace de Banach.
4. Montrer que l'ensemble
$$K = \{f \in E_{0,\alpha}, \|f\|_{E_{0,\alpha}} \leq M\}$$
est une partie précompacte de $(E_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 3

On utilise les notations de l'exercice 2.
On considère l'ensemble de fonctions

$$F = \left\{ \begin{array}{l} u \in E_0 ; \|u\|_\infty \leq 1, \\ \qquad\qquad \text{et } u(x) = \displaystyle\int_0^x v(t)dt, \quad v \text{ intégrable et } v = \pm 1 \text{ presque partout} \end{array} \right\}.$$

1. L'ensemble F est-il précompact dans E_0 ?
2. L'ensemble F est-il compact dans E_0 ?
   Les 2 questions suivantes sont assez difficiles
3. Montrer que $\bar{F}$ contient

$$G_1 = \left\{ \begin{array}{r} u \text{ affine par morceaux}, \|u\|_\infty \leq 1, u(0) = 0, \\ |u'| \leq 1 \text{ presque partout} \end{array} \right\}.$$

4. Montrer que $\bar{F}$ contient

$$G = \left\{ u \text{ de classe } \mathcal{C}^1 ; \|u\|_\infty \leq 1, u(0) = 0, \|u'\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Exercice 4 : caractérisation des parties précompactes de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$

Soient I l'intervalle compact $[0, 1]$ et $E_0 = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de I dans $\mathbb{C}$ muni de la norme :

(1) $$\|u\|_{E_0} = \sup_{x \in I} |u(x)|.$$

On note $\mathcal{P}$ le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de E_0 formé des fonctions polynomiales à coefficients complexes et, pour tout $A > 0$, L_A la partie de $\mathcal{P}$ définie par :

(2) $$L_A = \{p \in \mathcal{P} \mid |p(0)| + \|p'\|_{E_0} \leq A\}.$$

1) Montrer que, pour tout $A > 0$, L_A est précompact dans E_0.

2) Soit H une partie précompacte de E_0.

2.a) Justifier que, pour tout $f \in E_0$ et tout $\eta > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $\|f - p\|_{E_0} \leq \eta$.

2.b) Prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des éléments $p_1, ..., p_r \in \mathcal{P}$ tels que $H \subset \bigcup_{\ell=1}^r B(p_\ell, \varepsilon)$ où $B(p_\ell, \varepsilon) = \{f \in E_0 \mid \|f - p_\ell\|_{E_0} < \varepsilon\}$ est la boule ouverte de centre p_ℓ et de rayon ε.

2.c) En conclure que H possède la propriété suivante :

(3) $$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \quad \text{il existe } A > 0 \text{ tel que, pour tout } f \in H, \quad d(f, L_A) < \varepsilon,$$

où $d(f, L_A) = \inf_{g \in L_A} \|f - g\|_{E_0}$.

3) Montrer que toute partie H de E_0 possédant la propriété (3) ci-dessus est précompacte dans E_0.

4) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie H de E_0 soit précompacte.

Exercice 5 : Extraction diagonale

Montrer que l'ensemble des suites à valeurs dans $[0, 1]$, muni de la distance associée à la norme $\|x - y\| = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} |x_n - y_n|$ est compact.

Exercice 6

Soit f une fonction continue et bijective d'un compact X dans un espace métrique F. Montrer que f est un homéomorphisme.
Indication : on pourra montrer que l'image de tout fermé est fermée puis que l'image de tout ouvert est ouverte.