M1 Mathématiques
Université Paris Diderot
Analyse réelle.
Travaux Dirigés : feuille 3

5 novembre 2008

Exercice 1

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles. Soit p un réel supérieur ou égal à 1. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on note

$$\begin{cases} ||x||_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}}, \\ l^p = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ t. q. } ||x||_p < +\infty\}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} ||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \in \overline{\mathbb{R}}, \\ l^\infty = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ t. q. } ||x||_\infty < +\infty\}. \end{cases}$$

Pour tout réel $p > 1$, p' désignera dans la suite le réel $p/(p-1)$.

1) Soit $1 < p < +\infty$.

a) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, montrer que

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{p'}\beta^{p'}.$$

b) Montrer que si $x \in l^p$ et $y \in l^{p'}$ on a

$$xy \overset{\text{déf}}{=} (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$$

et

$$||xy||_1 \leq ||x||_p ||y||_{p'}$$

(inégalité de Hölder).

Indication : vérifier que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n y_n| \leq 1/p||x||_p^p + 1/p'||y||_{p'}^{p'} < +\infty$ et utiliser le fait que cette inégalité est vraie pour λx et y, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que si $x \in l^p$ et $y \in l^p$ on a

$$x + y \in l^p$$

et

$$||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

(inégalité de Minkowski).

2) Montrer que l^p $(p \geq 1)$ et l^∞ sont des espaces vectoriels normés.

3) Montrer que l^p $(p \geq 1)$ et l^∞ sont des espaces de Banach.

Exercice 2

Montrer que $(l^1)' = l^\infty$.
Montrer que $l^1 \subset (l^\infty)'$.

Exercice 3

Soit E un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de E d'intérieurs vides. Montrer qu'alors

$$\mathrm{int}(\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \emptyset.$$

Exercice 4

En utilisant au besoin le résultat de l'exercice 3, montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de famille génératrice dénombrable.

Exercice 5

Soit f une fonction réelle de variable réelle.
1) Montrer que l'ensemble des points où f est continue est une intersection dénombrable d'ouverts.
2) Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas une intersection dénombrable d'ouverts. En déduire qu'il n'existe pas de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3) Montrer qu'il existe des fonctions continues en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinues en tout point de $\mathbb{Q}$.

Exercice 6

Soit $G : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$G(x,y) = \begin{cases} x(1-y) \text{ si } x \leq y, \\ (1-x)y \text{ si } x > y. \end{cases}$$

On considère l'opérateur $T : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1])$ qui à toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1])$ associe la fonction Tf définie par

$$Tf(x) = \int_0^1 f(y)G(x,y)\,dy.$$

Montrer que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}([0,1]), \mathcal{C}([0,1]))$ et calculer sa norme.

Exercice 7

1) On note $I =]0,1[\subset \mathbb{R}$. Montrer que $1 \leq p < q \Longrightarrow L^q(I) \subset L^p(I)$ et que cette inclusion est stricte.
2) Montrer que $1 \leq p < q \Longrightarrow l^p \subset l^q$.
3) Construire un sous-espace fermé F^p de $L^p(\mathbb{R})$ isométrique à l^p. En déduire que $p < q \Longrightarrow F^p \subset F^q$.

Exercice 8 (opérateur de troncature)

Soit $f \in L^p(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in [1, +\infty[$.
1) Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$T_n(t) = \begin{cases} t \text{ si } |t| \leq n, \\ nt/|t| \text{ si } |t| > n. \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} T_n(f) = f$ dans $L^p(\Omega)$.
2) Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles mesurables tels que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. Soit χ_n la fonction caractéristique de Ω_n. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \chi_n.f = f$ dans $L^p(\Omega)$.
3) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \chi_n.T_n(f) = f$ dans $L^p(\Omega)$.

Exercice 9

Soient $p, q \in [1, +\infty[$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
1) Montrer que $L^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ est un sous-ensemble dense de $L^p(\Omega)$.
2) Montrer que $\{f \in L^p(\Omega) \bigcap L^q(\Omega) \text{ t. q. } ||f||_q \leq 1\}$ est fermé dans $L^p(\Omega)$.
3) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega) \bigcap L^q(\Omega)$ et soit $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ dans $L^p(\Omega)$ et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $||f_n||_q \leq C$. Montrer que $f \in L^r(\Omega)$ et que $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ dans $L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [p, q[$.
Indication : on pourra commencer par montrer que si $p, q \in [1, +\infty[$, $1/p + 1/q = 1/r$, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, on a $fg \in L^r(\Omega)$ et $||fg||_r \leq ||f||_p ||g||_q$.

Exercice 10

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour $a \in \mathbb{R}^d$, on note $\tau_a f(x) = f(x - a)$.
1) Montrer que si f admet un représentant uniformément continu, l'application $a \longmapsto \tau_a f$ est continue de $\mathbb{R}^d$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.
2) On va ici démontrer la réciproque. On suppose que l'application $a \longmapsto \tau_a f$ est continue de $\mathbb{R}^d$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.
a) Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $|f(x) - f(x - y)| \leq ||\tau_y f - f||_\infty \quad \forall y \in \mathbb{R}^d$.
b) Soit $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ∞-régularisante. Montrer que

$$||f - f * \Phi_n||_\infty \leq \int_{\mathbb{R}^d} ||\tau_y f - f||_\infty \Phi_n(y)\, dy.$$

c) En déduire que $\lim_{n\to\infty} ||f - f * \Phi_n||_\infty = 0$.
d) Démontrer que f admet un représentant uniformément continu.

Exercice 11

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. Soit $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite k-régularisante (avec $k \geq 0$). Montrer que sur tout compact de $\mathbb{R}^d$, $f * \Phi_n$ converge uniformément vers f.

Exercice 12

Soient p et q deux réels dans $[1, +\infty]$. Soit a une fonction mesurable de $\Omega \in \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $au \in L^q(\Omega)$ pour tout $u \in L^p(\Omega)$. Montrer que $a \in L^r(\Omega)$ avec $r = pq/(p - q)$ si $p < +\infty$, $r = q$ si $p = +\infty$.

Exercice 13

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue finie. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables telles que $f_n \longrightarrow f \quad p.p.$ avec f finie $p.p.$
1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose $S_n(\alpha) = \bigcup_{k\geq n}\{x \in \Omega \text{ t. q. } |f_k(x) - f(x)| > \alpha\}$. Montrer que la mesure de $S_n(\alpha)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
2) Montrer que pour tout $\delta > 0$ il existe $A \subset \Omega$ mesurable de mesure inférieure (strictement) à δ tel que

f_n converge uniformément vers f sur $\Omega \setminus A$.
3) On suppose ici que $f_n \in L^p(\Omega)$ où $p \in [1, +\infty[$ et que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t. q. } \int_A |f_n|^p \leq \varepsilon, \forall n, \forall A \text{ mesurable de mesure inférieure (strictement) à } \delta.$$

Montrer que $f \in L^p(\Omega)$ et que f_n converge vers f dans $L^p(\Omega)$.

Exercice 14

1) Quelle est l'adhérence de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$?
2) Montrer que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour la convergence faible $\star$, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ il existe une suite f_n de fonctions continues à support compact dans $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\forall \Phi \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} f_n \Phi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f \Phi.$$

3) Montrer que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour la convergence faible, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ vers lesquelles ne converge (faiblement) aucune suite de fonctions de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire, encore, qu'il existe $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle qu'il existe $\Psi \in (L^\infty(\mathbb{R}^d))'$ pour laquelle il n'existe pas de suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\Psi(g_n) \longrightarrow \Psi(f)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ (on pourra considérer par exemple la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^d$, ou plus généralement une fonction continue bornée qui ne tend pas vers 0 lorsque $||x||$ tend vers $+\infty$).
4) Étendre ces résultats au cas de fonctions définies sur un domaine borné de $\mathbb{R}^d$.