Décomposition en profils des solutions de l'équation des ondes semi linéaire critique à l'extérieur d'un obstacle strictement convexe

Isabelle Gallagher et Patrick Gérard

Département de Mathématiques, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France

Résumé

On s'intéresse à l'équation d'ondes non linéaire critique

$$(1) \qquad \Box u_n + |u_n|^4 u_n = 0 \quad \textit{dans} \quad \mathbf{R}_t \times \Omega,$$

avec conditions aux limites de Dirichlet, où Ω est l'extérieur d'un domaine strictement convexe de $\mathbf{R}^3$. En suivant la méthode introduite par H. Bahouri et P. Gérard dans [1] dans le cas où $\Omega = \mathbf{R}^3$, on démontre tout d'abord un théorème de structure pour des suites de solutions d'énergie bornée de l'équation des ondes linéaire dans Ω. La démonstration fait appel à un résultat de non concentration pour de telles suites, qui s'obtient en utilisant des mesures semi–classiques. Les estimations de Strichartz démontrées par H. Smith et C. Sogge dans [16] permettent d'en déduire une description des suites de solutions d'énergie bornée de (1), à des termes de reste près, petits en énergie et en normes de Strichartz.

Abstract.

We are interested in the critical nonlinear wave equation

$$(1) \qquad \Box u_n + |u_n|^4 u_n = 0 \quad \textit{in} \quad \mathbf{R}_t \times \Omega,$$

with Dirichlet boundary conditions, where Ω is the outside of a strictly convex domain of $\mathbf{R}^3$. Following the method introduced by H. Bahouri and P. Gérard in [1] in the case where $\Omega = \mathbf{R}^3$, we first prove a structure theorem for sequences of solutions to the linear wave equation in Ω. The proof requires a non–concentration result for such sequences, the proof of which involves semi–classical measures. The Strichartz estimates proved by H. Smith and C. Sogge in [16] enable us to infer a description of sequences of bounded energy solutions to (1), up to small remainder terms, both in energy and in Strichartz norms.

1 Introduction

Dans [1], H. Bahouri et P. Gérard ont obtenu un développement en profils des solutions de l'équation d'ondes non linéaire critique suivante:

$$\Box u_n + |u_n|^4 u_n = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3, \quad (u_n, \partial_t u_n)_{|t=0} = (\varphi_n, \psi_n), \tag{1}$$

où $(\varphi_n, \psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $\dot{H}^1 \times L^2(\mathbf{R}^3)$. Ce développement s'obtient à partir d'une étude sur l'équation libre

$$\Box v_n = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3, \quad (v_n, \partial_t v_n)_{|t=0} = (\varphi_n, \psi_n),$$

en utilisant de manière cruciale des estimations de type Strichartz (voir [10] par exemple, ou l'estimation (2) ci–dessous). Notre objectif ici est de reprendre cette étude dans le cas où le système (1) est posé dans un domaine de l'espace. Le seul cas connu pour lequel on dispose d'estimations de Strichartz est celui de l'extérieur d'un obstacle strictement convexe. Ainsi dans [16], H. Smith et C. Sogge ont montré que pour tout temps $T > 0$, et pour tout couple (q, r), vérifiant $1/q + 3/r = 1/2$ et $q > 2$, il existe une constante $C_{T,r}$ telle que pour toute fonction f telle que $(f, \partial_t f) \in \mathcal{C}^0([0,T], \dot{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$, on a

$$\|f\|_{L^q([0,T],L^r(\Omega))} \leq C_{T,r} \left(\|\nabla f_{|t=0}\|_{L^2(\Omega)} + \|\Box f\|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))} \right). \tag{2}$$

On a noté $\dot{H}_0^1(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}$ dans $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3)$. Dans le cas où $\Omega = \mathbf{R}^3$, un simple argument d'échelle permet de montrer que $C_{T,r}$ ne dépend pas de T. Dans notre cadre d'étude, où Ω est l'extérieur d'un obstacle strictement convexe, un article récent de H. Smith et C. Sogge (voir [17]) montre que $C_{T,r}$ ne dépend pas non plus de T.

Nous allons donc dans cette étude considérer un domaine Ω de $\mathbf{R^3}$, régulier, extérieur d'un obstacle strictement convexe, et étudier le problème suivant:

$$\begin{cases} \Box u_n + |u_n|^4 u_n = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_t \times \Omega, \quad u_{n|\mathbf{R}_t \times \partial\Omega} = 0 \\ \qquad\qquad (u_n, \partial_t u_n)_{|t=0} = (\varphi_n, \psi_n), \end{cases} \tag{3}$$

où $(\varphi_n, \psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $E(\Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \dot{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Il est démontré dans [16] l'existence et l'unicité de solutions régulières, globales en temps, à (3) pour $(\varphi_n, \psi_n) \in C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$. Dans le cas où $(\varphi_n, \psi_n) \in E(\Omega)$, on peut montrer, en utilisant les techniques de J. Shatah et M. Struwe (voir [15]) et des estimations de [16], l'existence et l'unicité d'une solution u_n à (3), et

$$u_n \in C^0(\mathbf{R}, \dot{H}_0^1(\Omega)) \cap \dot{C}^1(\mathbf{R}, L^2(\Omega)) \cap L^5_{loc}(\mathbf{R}, L^{10}(\Omega)). \tag{4}$$

La suite (u_n) est de plus bornée dans l'espace d'énergie. L'un des résultats de cette étude est de montrer qu'elle est également bornée dans $L^5_{loc}(\mathbf{R}, L^{10}(\Omega))$. Cela permet en corollaire d'obtenir une estimation Lipschitz sur le groupe d'évolution non linéaire associant une donnée initiale (φ_n, ψ_n) dans un borné de l'espace d'énergie, à la solution u_n de (3). Nous renvoyons à [4] pour un énoncé précis.

Nous ne nous attarderons pas ici sur ce problème de résolution de (3) dans l'espace d'énergie.

Remarquons que la norme $L^5_{loc}(\mathbf{R}, L^{10}(\Omega))$ apparaissant dans (4) est naturellement associée au système non linéaire critique (3): c'est la norme de Strichartz qui permet de considérer le terme non linéaire $|u_n|^4 u_n$ comme un terme de force dans $L^1_{loc}(\mathbf{R}, L^2(\Omega))$.

Avant d'énoncer les résultats que nous allons présenter ici, donnons quelques notations: nous appellerons v_n la solution du problème linéaire associé à (3):

$$\begin{cases} \Box v_n = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_t \times \Omega, \quad v_{n|\mathbf{R}_t \times \partial\Omega} = 0 \\ (v_n, \partial_t v_n)_{|t=0} = (\varphi_n, \psi_n). \end{cases} \tag{5}$$

Rappelons que l'énergie d'une fonction f est donnée par

$$E_0(f,t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\partial_t f(t,x)|^2 + |\nabla f(t,x)|^2 \right) \, dx,$$

et ne dépend pas de t si f vérifie (5). De même, pour une solution de (3) vérifiant (4), la quantité

$$E(f,t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\partial_t f(t,x)|^2 + |\nabla f(t,x)|^2 \right) \, dx + \frac{1}{6} \int_\Omega |f(t,x)|^6 \, dx$$

est une constante.

Le premier résultat de ce travail concerne les suites de solutions de (5). Commençons par donner une définition.

Définition 1.1 *Soit* $(\varphi, \psi) \in \dot{H}^1 \times L^2(\mathbf{R}^3)$, *et soit* $(h_n, x_n, t_n) \in (\mathbf{R}^+)^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{3\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, *tels qu'il existe* $(x_\infty, t_\infty) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$, *avec*

$$\lim_{n \to \infty} (h_n, x_n, t_n) = (0, x_\infty, t_\infty).$$

On appelle onde de concentration linéaire associée à $(\varphi, \psi, h_n, x_n, t_n)$ *la solution du problème suivant:*

$$\begin{cases} \Box p_n = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_t \times \Omega, \quad p_{n|\mathbf{R}_t \times \partial\Omega} = 0 \\ (p_n, \partial_t p_n)_{|t=t_n} = \left(\dfrac{1}{h_n^{1/2}} \mathcal{P}_\Omega \left(\varphi(\dfrac{\cdot - x_n}{h_n}) \right), \dfrac{1}{h_n^{3/2}} \mathbf{1}_\Omega(\cdot) \psi(\dfrac{\cdot - x_n}{h_n}) \right), \end{cases} \tag{6}$$

où $\mathcal{P}_\Omega$ *est le projecteur orthogonal de* $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3)$ *sur* $\dot{H}^1_0(\Omega)$.

Remarques. On omet de spécifier, dans la définition d'une onde de concentration linéaire, le domaine dans lequel on résout l'équation d'onde linéaire (6); on supposera toujours que ce domaine est Ω. D'autre part, quitte à extraire une sous–suite et à faire une translation en temps, on peut toujours supposer que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{t_n}{h_n} = +\infty, \quad -\infty \quad \text{ou} \quad 0.$$

Dans la suite, nous appellerons donnée concentrante toute quantité de type $(\varphi, \psi, h_n, x_n, t_n)$ de la définition 1.1. Nous dirons que (h_n, x_n, t_n) et $(\widetilde{h}_n, \widetilde{x}_n, \widetilde{t}_n)$ sont orthogonales, comme dans [1], si

$$\text{soit} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \log \left(\frac{\widetilde{h}_n}{h_n} \right) \right| = +\infty, \qquad \text{soit} \quad h_n = \widetilde{h}_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|(x_n, t_n) - (\widetilde{x}_n, \widetilde{t}_n)|}{h_n} = +\infty.$$

D'autre part, nous dirons que deux données concentrantes sont équivalentes si la différence des ondes de concentration linéaires associées tend vers zéro en énergie, quand n tend vers l'infini.

Nous ferons dans tout ce travail l'hypothèse de compacité à l'infini suivante:

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} \left(|\nabla \varphi_n(x)|^2 + |\psi_n(x)|^2 \right) \, dx = 0. \tag{7}$$

Enfin nous supposerons pour simplifier que φ_n et ψ_n tendent faiblement vers zéro quand n tend vers l'infini.

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le premier résultat de cette étude.

Théorème 1 *Soit v_n la solution de (5), où (φ_n, ψ_n) est bornée dans $E(\Omega)$ et vérifie (7). Alors il existe des données concentrantes $(\varphi^{(j)}, \psi^{(j)}, h_n^{(j)}, x_n^{(j)}, t_n^{(j)})$, pour $j \in \mathbf{N}^*$, orthogonales deux–à–deux, telles que quitte à extraire une sous–suite, la solution v_n se décompose de la manière suivante, pour tout $\ell \in \mathbf{N}^*$:*

$$v_n(t,x) = \sum_{j=1}^{\ell} p_n^{(j)}(t,x) + w_n^{(\ell)}(t,x),$$

où $p_n^{(j)}$ est l'onde de concentration linéaire associée à $(\varphi^{(j)}, \psi^{(j)}, h_n^{(j)}, x_n^{(j)}, t_n^{(j)})$, où le reste vérifie

$$\forall T > 0, \quad \lim_{\ell\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|w_n^{(\ell)}\|_{L^\infty([-T,T];L^6(\Omega))} = 0,$$

et où les énergies sont orthogonales, au sens où

$$E_0(v_n) = \sum_{j=1}^{\ell} E_0(p_n^{(j)}) + E_0(w_n^{(\ell)}) + o(1), \quad n \to \infty.$$

Considérons à présent l'équation non linéaire (3). Nous allons commencer par énoncer un théorème comparant une onde de concentration linéaire à la solution de (3) avec même donnée de Cauchy. Dans ce but, donnons quelques définitions nécessaires à l'énoncé du théorème.

Définition 1.2 *Soit $(\varphi, \psi, h_n, x_n, t_n)$ une donnée concentrante, et p_n l'onde de concentration linéaire associée, au sens de la définition 1.1. Alors l'onde de concentration non linéaire associée à p_n est la solution de l'équation suivante:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \Box q_n + |q_n|^4 q_n = 0 \quad \textit{dans} \quad \mathbf{R}_t \times \Omega, \quad q_{n|\mathbf{R}_t\times\partial\Omega} = 0 \\ (q_n, \partial_t q_n)_{|t=0} = (p_n, \partial_t p_n)_{|t=0} \, . \end{array} \right. \tag{8}$$

Pour toute suite (h_n, x_n) convergeant vers $(0, x_\infty)$, on définit le domaine remis à l'échelle

$$\Omega_n \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\Omega - x_n}{h_n} \,. \tag{9}$$

On verra dans la section suivante que Ω_n admet un "domaine limite", quand h_n tend vers zéro, que nous noterons Ω_∞.

Définition 1.3 *Soient M_n et M deux ouverts de $\mathbf{R}^3$. On dit que M_n converge vers M quand n tend vers l'infini si les deux propriétés suivantes sont vérifiées:*

(i) pour tout compact K de M, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N, K$ est inclus dans M_n;

(ii) pour tout compact K' de ${}^c\overline{M}$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N, K'$ est inclus dans ${}^c\overline{M}_n$.

On montrera dans la section 2.1 le résultat suivant:

Proposition 1.4 *Soit le domaine Ω_n défini en (9). Alors quand n tend vers l'infini, Ω_n prend l'une des limites suivantes, quitte à extraire une sous–suite: $\emptyset$, $\mathbf{R}^3$ ou un demi–espace H, suivant la position de x_n par rapport à $\partial\Omega$.*

Enfin rappelons que dans [1]-[2], un opérateur de scattering S ainsi que des opérateurs d'onde $W^\pm$ sont étudiés. Dans notre travail, nous aurons besoin d'associer à une onde de concentration linéaire p_n deux ondes $p_n^\pm$, de la manière suivante.

Définition 1.5 *Soit p_n une onde de concentration linéaire, associée à des données concentrantes $(\varphi, \psi, h_n, x_n, t_n)$. Soit Ω_∞ la limite du domaine Ω_n défini en (9), au sens de la définition 1.3. Si Ω_∞ est un demi–espace, on note R_{Ω_∞} la réflexion par antisymétrie par rapport à $\partial\Omega_\infty$, et P_{Ω_∞} l'opérateur $P_{\Omega_\infty}(f,g) \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathcal{P}_{\Omega_\infty} f, \mathbf{1}_{\Omega_\infty} g)$, pour tout $(f,g) \in \dot{H}^1(\mathbf{R}^3) \times L^2(\mathbf{R}^3)$.*

Alors on associe à p_n deux ondes de concentration linéaires $p_n^\pm$, associées aux données concentrantes $(\varphi^\pm, \psi^\pm, h_n, x_n, t_n)$, avec

$$(\varphi^-, \psi^-) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} (\varphi, \psi) & si \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_n}{h_n} = +\infty \\ P_{\Omega_\infty} W^- R_{\Omega_\infty}(\varphi, \psi) & si \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_n}{h_n} = 0 \\ P_{\Omega_\infty} S^{-1} R_{\Omega_\infty}(\varphi, \psi) & si \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_n}{h_n} = -\infty \,, \end{cases}$$

$$(\varphi^+, \psi^+) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} P_{\Omega_\infty} S R_{\Omega_\infty}(\varphi, \psi) & si \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_n}{h_n} = +\infty \\ P_{\Omega_\infty} W^+ R_{\Omega_\infty}(\varphi, \psi) & si \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_n}{h_n} = 0 \\ (\varphi, \psi) & si \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_n}{h_n} = -\infty \,. \end{cases}$$

Théorème 2 *Soit p_n une onde de concentration linéaire, associée à des données concentrantes $(\varphi, \psi, h_n, x_n, t_n)$, et soit q_n l'onde de concentration non linéaire associée à p_n. Alors q_n est bornée dans $L^5_{loc}(\mathbf{R}, L^{10}(\mathbf{R}^3))$, et vérifie les propriétés suivantes, avec les notations de la définition 1.5: pour tout temps $T > 0$, on a*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{-T\leq t\leq t_n-\lambda h_n} E_0(p_n^- - q_n, t) + \|p_n^- - q_n\|_{L^5([-T,t_n-\lambda h_n],L^{10}(\Omega))} \right) = 0.$$

et

$$\lim_{\lambda\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{t_n+\lambda h_n\leq t\leq T} E_0(p_n^+ - q_n, t) + \|p_n^+ - q_n\|_{L^5([t_n+\lambda h_n,T],L^{10}(\Omega))} \right) = 0.$$

Remarques. Le résultat que nous démontrerons sera en fait une version plus précise du théorème 2, car nous obtiendrons aussi une description de l'onde de concentration non linéaire q_n autour du temps de concentration t_n, c'est–à–dire pour $t \in [t_n - \lambda h_n, t_n + \lambda h_n]$ avec les notations du théorème 2. Ce résultat, associé au théorème 1, permet d'obtenir une décomposition en profils pour la solution u_n du problème de départ (3) (voir [4]): on utilise pour cela l'orthogonalité des $p_n^{(j)}$ ainsi que des données concentrantes. La décomposition s'obtient facilement pour des normes de Strichartz petites, puis le théorème 2 permet, par un argument de déformation en temps semblable au cas traité dans [1], de déduire la décomposition

$$\forall \ell \in \mathbf{N}^*, \quad u_n(t,x) = \sum_{j=1}^{\ell} q_n^{(j)}(t,x) + w_n^{(\ell)}(t,x) + r_n^{(\ell)}(t,x),$$

où $r_n^{(\ell)}$ tend vers zéro en norme énergie et en normes de Strichartz. Les $q_n^{(j)}$ sont des ondes de concentration non linéaires, uniformément bornées en énergie et dans $L^5_{loc}(\mathbf{R}; L^{10}(\Omega))$. Nous n'entrerons pas dans les détails ici, mais nous concentrerons sur la démonstration des théorèmes 1 et 2. Nous renvoyons à [4] pour plus de précisions.

D'autre part, comme nous l'avons remarqué plus haut, on s'est restreint au cas de l'extérieur d'un domaine strictement convexe car c'est le seul cas connu pour lequel on dispose d'une estimation de type Strichartz pour les solutions de l'équation des ondes, cruciale dans notre démarche. Néanmoins, à supposer qu'une telle estimation soit vraie dans d'autres cadres, d'autres problèmes apparaissent: notamment l'orthogonalité en temps des ondes de concentration linéaires repose sur un résultat de non–concentration de la norme L^6 de la solution de l'équation linéaire (voir la section 2.3 ci–dessous), pour lequel la forme de Ω choisie ici joue un rôle important.

Le plan de l'étude est le suivant. Dans la section 2 ci–dessous, nous étudions tout d'abord le domaine remis à l'échelle Ω_n défini en (9), puis nous énonçons un résultat de propagation de la (h_n)–oscillation stricte, et enfin nous donnons un résultat fondamental de non concentration de la norme $L^6(\Omega)$ pour des ondes de concentration linéaires. Quelques éléments de démonstrations sont présentés. Dans la section 3, on démontre le théorème 1, tandis que le théorème 2 est démontré en section 4.

Nous noterons toutes les constantes universelles par la même lettre C. D'autre part, sauf mention du contraire, toutes les fonctions définies sur un domaine de $\mathbf{R}^3$ seront prolongées par zéro en des fonctions définies dans l'espace $\mathbf{R}^3$ entier.

2 Étude préliminaire

L'objet de cette section est d'énoncer quelques résultats préliminaires auxquels nous ferons appel par la suite. Nous en donnons les idées de démonstration, et renvoyons à [4] pour les détails.

2.1 Passage à la limite dans des domaines remis à l'échelle

Nous avons défini en (9) le domaine remis à l'échelle Ω_n. Nous allons étudier ici l'évolution de ce domaine quand n tend vers l'infini, et notamment démontrer la proposition 1.4; rappelons que la notion de convergence du domaine Ω_n a été donnée en définition 1.3.

La proposition suivante décrit les différentes configurations possibles pour Ω_∞, la limite de Ω_n, et précise la proposition 1.4. Avant d'énoncer le résultat, donnons quelques notations. Rappelons que l'on a noté $x_\infty \in \mathbf{R}^3$ la limite de la suite (x_n). On choisit une fonction Φ telle que $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^3 \,|\, \Phi(x) > 0\}$. Si $x_\infty \in \partial\Omega$, on note alors $\omega \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla\Phi(x_\infty)$ et $\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Phi(x_n)}{h_n}$, limite qui existe dans $\overline{\mathbf{R}}$ quitte à extraire une sous–suite. Enfin on définit les ensembles

$$H^{\alpha,\omega} \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \in \mathbf{R}^3 \,|\, y\cdot\omega > -\alpha\} \text{ si } \alpha \in \mathbf{R}, \quad H^{+\infty,\omega} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{R}^3, \quad \text{et} \quad H^{-\infty,\omega} \stackrel{\text{déf}}{=} \emptyset. \tag{10}$$

Proposition 2.1 *Le domaine Ω_n défini en (9) admet l'une des limites suivantes quand n tend vers l'infini:*

(i) si $x_\infty \in \Omega$, alors $\Omega_\infty = \mathbf{R}^3$ et pour tous $(\varphi,\psi) \in \dot{H}^1 \times L^2(\mathbf{R}^3)$, pour toute suite $(t_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, l'onde de concentration linéaire p_n associée à $(\varphi,\psi,h_n,x_n,t_n)$ vérifie

$$\lim_{n\to\infty} E_0(p_n) = \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} + \|\psi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} \,.$$

(ii) si $x_\infty \in {}^c\overline{\Omega}$, alors $\Omega_\infty = \emptyset$ et toutes les données concentrantes sont équivalentes à zéro.

(iii) si $x_\infty \in \partial\Omega$, alors $\Omega_\infty = H^{\alpha,\omega}$ et toute donnée concentrante $(\varphi,\psi,h_n,x_n,t_n)$ est équivalente à $(\mathcal{P}_{H^{\alpha,\omega}}\varphi, \mathbf{1}_{H^{\alpha,\omega}}\psi, h_n, x_n, t_n)$.

Démonstration. Nous n'allons pas écrire tous les calculs ici: les deux premiers cas se démontrent de façon très simple, nous allons donc seulement donner les arguments permettant d'obtenir le cas (iii).

Par définition, $y \in \mathbf{R}^3$ est un élément de Ω_n si et seulement si $\Phi(x_n + h_n y) > 0$. Commençons par supposer que $\alpha = +\infty$, et soit K un compact de $\mathbf{R}^3$. Alors la formule de Taylor nous permet d'écrire, uniformément en y,

$$\forall y \in K, \quad \frac{\Phi(x_n + h_n y)}{h_n} = \frac{\Phi(x_n)}{h_n} + \nabla\Phi(x_\infty) \cdot y + o(1), \quad n \to \infty.$$

Pour n assez grand, on a donc $\Phi(x_n + h_n y) > 0$, donc $y \in \Omega_n$, et donc $\Omega_\infty = \mathbf{R}^3$. Le même type de raisonnement permet de montrer que si $\alpha = -\infty$, alors $\Omega_\infty = \emptyset$.

Reste donc à étudier le cas où $\alpha \in \mathbf{R}$. Si K est un compact de $H^{\alpha,\omega}$, alors par définition de $H^{\alpha,\omega}$ en (10), on a

$$\forall y \in K, \quad \nabla\Phi(x_\infty) \cdot y = -\alpha + m(y), \quad \text{avec} \quad m(y) > 0,$$

donc pour n assez grand, uniformément en $y \in K$, on a $\Phi(x_n + h_n y) > 0$. Inversement, si K est un compact de ${}^c\overline{H}^{\alpha,\omega}$, alors pour tout $y \in K$, pour n assez grand uniformément en y, on a $\Phi(x_n + h_n y) < 0$, et le résultat s'en déduit immédiatement: $\Omega_\infty = H^{\alpha,\omega}$.

Pour conclure la démonstration de la proposition, considérons $(\varphi, \psi, h_n, x_n, t_n)$ une donnée concentrante, d'onde de concentration linéaire associée p_n, et soit $p_n^{\alpha,\omega}$ l'onde de concentration linéaire associée à $(\varphi^{\alpha,\omega}, \psi^{\alpha,\omega}, h_n, x_n, t_n)$, avec $(\varphi^{\alpha,\omega}, \psi^{\alpha,\omega}) \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathcal{P}_{H^{\alpha,\omega}}\varphi, \mathbf{1}_{H^{\alpha,\omega}}\psi)$. Par conservation de l'énergie, on peut écrire

$$\begin{aligned} E_0(p_n - p_n^{\alpha,\omega}) &= h_n^{-3} \int_{\mathbf{R}^3} \left| \nabla \left(\mathcal{P}_\Omega(\varphi^{\alpha,\omega}(\frac{x - x_n}{h_n})) - \mathcal{P}_\Omega(\varphi(\frac{x - x_n}{h_n})) \right) \right|^2 dx \\ &+ h_n^{-3} \int_{\mathbf{R}^3} \left| \nabla \left(\mathbf{1}_\Omega(x)\psi^{\alpha,\omega}(\frac{x - x_n}{h_n}) - \mathbf{1}_\Omega(x)\psi(\frac{x - x_n}{h_n}) \right) \right|^2 dx \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbf{R}^3} \left| \nabla(\mathcal{P}_{\Omega_n}(\varphi^{\alpha,\omega}(y)) - \mathcal{P}_{\Omega_n}(\varphi(y))) \right|^2 dy + \int_{\mathbf{R}^3} \left| \nabla(\mathbf{1}_{\Omega_n}(\psi^{\alpha,\omega}(y)) - \mathbf{1}_{\Omega_n}(\psi(y))) \right|^2 dy.$$

Il suffit donc à présent de démontrer la convergence de $\mathcal{P}_{\Omega_n} f$ vers $\mathcal{P}_{\Omega_\infty} f$ dans $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3)$, ainsi que celle de $\mathbf{1}_{\Omega_n} g$ vers $\mathbf{1}_{\Omega_\infty} g$ dans $L^2(\mathbf{R}^3)$, pour tout $(f, g) \in \dot{H}^1 \times L^2(\mathbf{R}^3)$.

Lemme 2.2 *Soit Ω_n un domaine convergeant vers Ω_∞, dans le sens de la définition 1.3, où Ω_∞ est un demi–espace, $\emptyset$ ou $\mathbf{R}^3$. Alors on a les propriétés suivantes:*

(i) $\dot{H}_0^1(\Omega_\infty) = \left\{ u \in \dot{H}^1(\mathbf{R}^3) \mid \mathrm{supp}\, u \subset \overline{\Omega}_\infty \right\}$;

(ii) $\forall f \in \dot{H}^1(\mathbf{R}^3), \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{\Omega_n} f = \mathcal{P}_{\Omega_\infty} f$ *dans* $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3)$;

(iii) $\forall g \in L^2(\mathbf{R}^3), \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\Omega_n} g = \mathbf{1}_{\Omega_\infty} g$ *dans* $L^2(\mathbf{R}^3)$.

Démonstration du lemme. Les cas où $\Omega_\infty = \mathbf{R}^3$ ou $\emptyset$ sont évidents. Dans le cas où Ω_∞ est un demi–espace, il est facile de démontrer le point (i): on suppose par exemple que Ω_∞ est défini par $\Omega_\infty = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 > 0 \right\}$, et l'on considère une fonction $\rho \in C_0^\infty(\Omega_\infty)$. Alors pour toute fonction $u \in \dot{H}^1(\mathbf{R}^3)$ supportée dans $\overline{\Omega}_\infty$, la fonction $u^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} u * \rho^\varepsilon$, où $\rho^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} 1/\varepsilon^3 \rho(\cdot/\varepsilon)$, tend vers u dans $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3)$, et est supportée dans Ω_∞, donc (i) est démontré.

Le point (ii) se démontre de la manière suivante: on constate facilement que pour tout domaine M, et pour toute fonction f, la fonction $v \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{P}_M f$ est définie comme la solution de

$$\left\{ \begin{array}{r} \Delta v = \Delta f \quad \text{dans} \quad M \\ v_{|\partial M} = 0. \end{array} \right.$$

Alors il suffit de définir $v_n \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{P}_{\Omega_n} f$, et soit v une de ses limites au sens des distributions; on a pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\Omega_\infty)$

$$\int_{\mathbf{R}^3} \Delta v_n \overline{\phi} \, dx = \int_{\mathbf{R}^3} \Delta f \overline{\phi} \, dx,$$

puisque pour n assez grand, on a $\phi \in C_0^\infty(\Omega_n)$. Par passage à la limite faible dans la condition aux limites de Dirichlet, on en déduit que $v = \mathcal{P}_{\Omega_\infty} f$. Finalement la convergence forte est due au fait que

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla v_n|^2 \, dx &= \int_{\mathbf{R}^3} v_n \Delta \overline{v}_n \, dx \\ &= -\int_{\mathbf{R}^3} \nabla v_n \cdot \nabla \overline{f} \, dx, \end{aligned}$$

et donc comme $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^3} \nabla v \cdot \nabla \overline{f} \, dx = -\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla v|^2 \, dx$, le résultat suit.

Le point (iii) s'obtient de manière similaire, nous laissons les détails au lecteur. $\square$

Ce lemme termine la démonstration de la proposition 2.1. $\square$

Le résultat suivant sera utilisé fréquemment dans la suite; sa démonstration est du même type que les calculs ci–dessus conduisant au point (ii) du lemme, nous ne le démontrerons donc pas ici.

Proposition 2.3 *Soit M_n un ouvert de $\mathbf{R}^3$, de limite M. Soit (f_n^0, f_n^1) une suite bornée de $E(M_n)$, convergeant faiblement (resp. fortement) vers (f^0, f^1) dans $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3) \times L^2(\mathbf{R}^3)$, avec $(f^0, f^1) \in E(M)$. Alors la solution de*

$$\left\{ \begin{array}{l} \square f_n = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_t \times M_n, \quad f_{n|\mathbf{R}_t \times \partial M_n} = 0 \\ \qquad\qquad (f_n, \partial_t f_n)_{|t=0} = (f_n^0, f_n^1) \end{array} \right.$$

converge faiblement (resp. fortement) vers f dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; \dot{H}^1(\mathbf{R}^3))$, et $\partial_t f_n$ converge faiblement (resp. fortement) vers $\partial_t f$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^3))$, où

$$\left\{ \begin{array}{l} \square f = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_t \times M, \quad f_{|\mathbf{R}_t \times \partial M} = 0 \\ \qquad\qquad (f, \partial_t f)_{|t=0} = (f^0, f^1). \end{array} \right.$$

D'autre part, si M_n est l'extérieur d'un domaine strictement convexe, alors la convergence a lieu aussi dans $L^5_{loc}(\mathbf{R}; L^{10}(\mathbf{R}^3))$.

2.2 Propagation de la (h_n)–oscillation

Commençons par rappeler la définition d'une fonction strictement (h_n)–oscillante. Dans la suite nous noterons A l'opérateur auto–adjoint non borné suivant:

$$\mathcal{D}(A) = \left\{(u, \dot{u}) \in \dot{H}_0^1 \times L^2(\Omega) \mid \dot{u} \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\right\}, \quad A \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 2.4 *Soit (h_n) une suite de réels strictement positifs, tendant vers 0, et soit (f_n, g_n) une suite bornée dans $\dot{H}^1 \times L^2(\mathbf{R}^3)$. La suite (f_n, g_n)est dite (h_n)–oscillante si*

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{h\to 0} \left\| \mathbf{1}_{|A| \geq \frac{R}{h_n}} (f_n, g_n) \right\|_{\dot{H}^1 \times L^2(\mathbf{R}^3)} = 0.$$

La suite (f_n, g_n) est dite strictement (h_n)–oscillante si elle vérifie d'autre part

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{h\to 0} \left\| \mathbf{1}_{|A| \leq \frac{\varepsilon}{h_n}} (f_n, g_n) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} = 0.$$

Remarque. Par abus, nous dirons qu'une suite (v_n) bornée dans $C^0([0, T], \dot{H}_0^1(\Omega))$ telle que $\partial_t v_n$ est bornée dans $C^0([0, T], L^2(\Omega))$ est (strictement) (h_n)–oscillante si $(\nabla v_n, \partial_t v_n)$ l'est au sens de la définition 2.4.

Nous ne rappellerons pas ici la notion de composante strictement (h_n)–oscillante d'une suite borneée de $L^2(\mathbf{R}^3)$, et renvoyons à [1], Lemme 3.2 (*iii*), pour une définition. Énonçons maintenant le résultat suivant, de propagation de la (h_n)–oscillation stricte. Nous laissons sa démonstration au lecteur (voir [4]).

Proposition 2.5 *Soit (φ_n, ψ_n) une suite bornée de $E(\Omega)$, telle que $(\nabla\varphi_n, \psi_n)$ est (strictement) (h_n)–oscillante. Soit v_n la solution de (5) associée; alors $(\nabla v_n, \partial_t v_n)(t)$ est (strictement) (h_n)–oscillante, pour tout $t \in \mathbf{R}$, uniformément en t.*

D'autre part, soient v_n et $\widetilde{v}_n$ les solutions de l'équation des ondes linéaire, associées à des données (v_n^0, v_n^1) et $(\widetilde{v}_n^0, \widetilde{v}_n^1)$ respectivement, où $(\widetilde{v}_n^0, \widetilde{v}_n^1)$ est la composante strictement (h_n)–oscillante de (v_n^0, v_n^1). Alors pour toute suite (t_n), $(\nabla\widetilde{v}_n(t_n), \partial_t\widetilde{v}_n(t_n))$ est la composante strictement (h_n)–oscillante de $(\nabla v_n(t_n), \partial_t v_n(t_n))$.

2.3 Un résultat de non concentration

Nous allons dans cette section donner quelques idées de la démonstration du résultat suivant.

Proposition 2.6 *Soit p_n une onde de concentration linéaire associée à une donnée concentrante $(\varphi, \psi, h_n, x_n, 0)$. Alors pour tout intervalle de temps $I \subset \mathbf{R}$ borné, pour toute suite (ε_n) telle que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n/h_n = +\infty$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n\|_{L^\infty(I \setminus [-\varepsilon_n, \varepsilon_n]), L^6(\Omega)} = 0.$$

Démonstration. Nous allons en donner le principe général, mais n'entrerons pas dans les détails des calculs (on renvoie à [4] pour les arguments précis).

Commençons par remarquer que la proposition 2.6 est démontrée si l'on montre que

(i) pour tout temps $T \neq 0$, et pour toute suite $T_n \to T$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n(T_n)\|_{L^6(\Omega)} = 0\,;$$

(ii) pour toute suite $\varepsilon_n \to 0$, avec $\varepsilon_n/h_n \to +\infty$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n(\varepsilon_n)\|_{L^6(\Omega)} = 0\,.$$

Le cas (ii) peut être considéré comme une version dégénérée du cas (i), et se démontre de façon analogue, mais plus simple (par changement d'échelle); nous n'y reviendrons donc pas.

La méthode de démonstration de (i) s'appuie sur le principe de concentration–compacité de P.-L. Lions (voir [11]-[12]): introduisons la densité d'énergie

$$e_n(t,x) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(|\partial_t p_n(t,x)|^2 + |\nabla_x p_n(t,x)|^2\Big)\, dx,$$

qui vérifie

$$\partial_t e_n = \mathrm{div}_x(\partial_t p_n \nabla_x p_n).$$

Alors si e_∞ est un point d'adhérence de e_n, alors e_∞ est continue en temps, à valeurs mesure, et par le principe de concentration–compacité, il suffit de démontrer que

$$e_\infty(t)(\{x_0\}) = 0, \quad \forall x_0 \in \overline{\Omega}, \quad \forall t \neq 0. \tag{11}$$

Le calcul de e_∞ se fait par utilisation des mesures semi–classiques de Wigner (voir [7], [8], [13]): soit μ la mesure semi–classique associée à $(\nabla_{t,x} p_n)$. Il est bien connu que

$$\int_{\mathbf{R}_\tau \times \mathbf{R}^3_\xi} \mu(t,x,d\tau,d\xi) \leq e_\infty(t)dt,$$

que le support de μ est tel que $(\tau^2 - |\xi|^2)\mu = 0$, et que μ vérifie l'équation de transport

$$(\tau\partial_t - \xi\cdot\nabla_x)\mu = 0.$$

Notre démarche va être d'exhiber une mesure μ_* telle que

$$\mu_* \leq \mu, \tag{12}$$

$$\text{et} \quad \int_{\mathbf{R}_\tau \times \mathbf{R}^3_\xi} \mu_*(t,x,d\tau,d\xi) = e_*(t)dt,$$

où e_* est continue en temps, pour $t \neq 0$, et vérifie

$$e_*(t)(\Omega) = \|\nabla \mathcal{P}_{\Omega_\infty}\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} + \|\mathbf{1}_{\Omega_\infty}\psi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)}.$$

Par application de la conservation de l'énergie et de la vitesse finie de propagation, on peut montrer que

$$\forall t \neq 0, \quad e_*(t) = e_\infty(t),$$

et si l'on connaît μ_* explicitement, on peut en déduire (11).

Le calcul de μ_* se fait de manière différente suivant la position de x_∞ par rapport au bord $\partial\Omega$. Rappelons que d'après la proposition 2.1, on peut supposer que $x_\infty \in \overline{\Omega}$. Nous allons expliquer brièvement la méthode d'obtention de μ_*, suivant que $x_\infty \in \Omega$ ou $x_\infty \in \partial\Omega$.

Dans le cas où $x_\infty \in \Omega$, on prolonge p_n par zéro en dehors de Ω, en une suite notée u_n. La mesure μ_* évoquée ci–dessus est la mesure semi–classique associée à $\nabla_{t,x} u_n$, dont on calcule l'expression en utilisant le flot du billard G_t au–dessus de Ω: on peut montrer que

$$\int f\left(G_{-t}(x,\tau,\xi)\right) \mu_*(t,dx,d\tau,d\xi) = \int f(x,\tau,\xi) d\mu_0(x,\tau,\xi)$$

avec

$$d\mu_0(x,\tau,\xi) = \frac{1}{2}\delta(x - x_\infty) \sum_{\pm} \delta(\tau \mp |\xi|) \left|\widehat{\psi}(\xi) \pm i|\xi|\widehat{\varphi}(\xi)\right|^2 \frac{d\xi}{(2\pi)^3} \cdot \tag{13}$$

On montre que

$$e_\infty(t)(\{x_0\}) = \mu_0\left(\{(x,\tau,\xi) \in \Omega \times \mathbf{R} \setminus \{0\} \times \mathbf{R}^3\},\ p_x G_t(x,\tau,\xi) = x_0\right),$$

où p_x est la projection sur x. Alors par (13), on en déduit que

$$e_\infty(t)(\{x_0\}) = \sum_{\pm} \int_{E_\pm(t)} f_\pm(\xi) d\xi,$$

où $f_\pm \in L^1(\mathbf{R}^3)$, et où $E_\pm(t) \overset{\text{déf}}{=} \left\{\xi \in \mathbf{R}^3 \mid p_x G_t(x_\infty, \pm|\xi|, \xi) = x_0\right\}$. Il est alors facile de constater, par des arguments géométriques sur Ω, que $E_\pm(t)$ est soit vide, soit une demi–droite, ce qui implique (11).

Dans le cas où $x_\infty \in \partial\Omega$, on montre que

$$\mu_* = \delta\left(x - x_\infty - t\frac{\xi}{\tau}\right) \lambda_0(\tau,\xi), \tag{14}$$

où λ_0 est une mesure, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur le cône $\left\{\tau^2 = |\xi|^2,\ \frac{\xi}{\tau} \cdot N(x_\infty) < 0\right\}$, où $N(x)$ désigne la normale unitaire sortante en $x \in \partial\Omega$. En outre, la mesure λ_0 a pour masse totale

$$TM(\lambda_0) = \|\nabla \mathcal{P}_{\Omega_\infty} \varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} + \|\mathbf{1}_{\Omega_\infty} \psi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} \cdot \tag{15}$$

Montrons comment on exhibe cette mesure λ_0: on prolonge p_n par réflexion, dans un voisinage de $x_\infty \in \partial\Omega$. La suite v_n ainsi obtenue vérifie une équation du type

$$\rho \partial_t^2 v_n - \operatorname{div}(A \cdot \nabla v_n) = 0,$$

où ρ et A sont continues, régulières par morceaux, avec $\partial\Omega$ pour interface. En outre, on a $\rho(x) = 1$ et $A(x) = \mathrm{Id}$ dans Ω. On considère alors la mesure semi–classique ν associée à $(\sqrt{\rho}\partial_t v_n, \sqrt{A}\nabla_x v_n)$, dont on montre qu'elle est continue en temps, et vérifie

$$\nu\left(\{x \in \partial\Omega,\ \xi \cdot N(x) \neq 0,\ \tau \neq 0\}\right) = 0.$$

D'autre part, cette mesure vérifie une équation de transport le long du champ Hamiltonien associé au symbole $\frac{1}{2}(\tau^2 - \frac{1}{\rho}A\xi \cdot \xi)$. La difficulté est due au fait que les coefficients de cette équation de transport sont discontinus ($\nabla\rho$ et ∇A). Néanmoins, leur composante normale est continue, ce qui suffit pour définir localement un flot G_t pour cette équation, tel que si $\nu_{|t=0} \geq \nu_*$, alors $\nu(t) \geq G_t(\nu_*)$. On montre alors que $\nu_{|t=0}$ s'écrit $\delta(x - x_\infty)\lambda(\tau, \xi)$, où λ est tel que $\lambda_0(\tau, \xi) \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{1}_{\frac{\xi}{\tau}\cdot N<0}\lambda(\tau, \xi)$ vérifie (15). Enfin on remarque que si $\frac{\xi}{\tau} \cdot N < 0$, alors $G_t(x_\infty, \tau, \xi) = (x_\infty + t\frac{\xi}{\tau}, \tau, \xi)$ reste au–dessus de Ω, ce qui permet d'en déduire (12), et donc le résultat cherché, avec μ_* définie en (14). Nous renvoyons à [4] pour des détails. $\square$

3 Le problème linéaire: démonstration du théorème 1

Cette section est dévolue à la démonstration du théorème 1 énoncé en introduction. La démarche, inspirée de [1], est la suivante: dans une première partie, nous extrayons les échelles $h_n^{(j)}$ de concentration; dans la seconde partie, nous décomposons une fonction strictement (h_n)–oscillante, au sens de la définition 2.4, en une somme d'ondes de concentration linéaires orthogonales, avec donnée en un temps $t_n^{(k)}$ concentrée en un point $x_n^{(k)}$. Avec les résultats de la section 2, la méthode est alors très semblable au cas de tout l'espace traité dans [1]; nous n'entrerons pas dans les détails ici, et renvoyons à [4] pour les arguments précis.

3.1 Extraction des échelles

D'après le théorème de structure démontré par P. Gérard dans [6], on peut décomposer les données initiales de la manière suivante:

$$\forall \ell \in \mathbf{N}^*, \quad \nabla\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \nabla\widetilde{\varphi}_n^{(j)}(x) + \nabla\Phi_n^{(\ell)}(x), \qquad \psi_n(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \widetilde{\psi}_n^{(j)}(x) + \Psi_n^{(\ell)}(x),$$

où les $\widetilde{\varphi}_n^{(j)}$ et les $\widetilde{\psi}_n^{(j)}$ sont strictement $(h_n^{(j)})$–oscillants, les $h_n^{(j)}$ sont orthogonaux deux–à–deux, où

$$\|\nabla\varphi_n\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} = \sum_{j=1}^{\ell} \|\nabla\widetilde{\varphi}_n^{(j)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} + \|\nabla\Phi_n^{(\ell)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} + o(1), \quad n \to \infty,$$

$$\|\psi_n\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} = \sum_{j=1}^{\ell} \|\widetilde{\psi}_n^{(j)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} + \|\Psi_n^{(\ell)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} + o(1), \quad n \to \infty,$$

et où
$$\lim_{\ell\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|\nabla\Phi_n^{(\ell)}\|_{\dot B^0_{2,\infty}}=\lim_{\ell\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|\Psi_n^{(\ell)}\|_{\dot B^0_{2,\infty}}=0.$$
Rappelons que pour toute fonction f, on définit
$$\|f\|_{\dot B^0_{2,\infty}}\stackrel{\text{déf}}{=}\sup_{k\in\mathbf{Z}}\left(\int_{2^k\leq|\xi|\leq 2^{k+1}}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2},$$
où $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier de f. Mais dans [9], P. Gérard, Y. Meyer et F. Oru ont démontré que pour toute fonction f, on a
$$\|f\|_{L^6(\mathbf{R}^3)}\leq C\|\nabla f\|^{1/3}_{L^2(\mathbf{R}^3)}\|\nabla f\|^{2/3}_{\dot B^0_{2,\infty}}.$$
Alors par le résultat de propagation démontré en section 2.2, et par conservation de l'énergie, on peut finalement montrer la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Sous les hypothèses du théorème 1, la fonction v_n peut, quitte à extraire une sous–suite, se décomposer de la manière suivante:*
$$\forall\ell\in\mathbf{N}^*,\quad v_n(t,x)=\sum_{j=1}^{\ell}v_n^{(j)}(t,x)+\widetilde{w}_n^{(\ell)}(t,x),$$
où $v_n^{(j)}$ est une solution de l'équation des ondes linéaire dans Ω, strictement $(h_n^{(j)})$–oscillante, et où les $h_n^{(j)}$ sont orthogonaux deux–à–deux. On a en outre
$$\forall T>0,\quad\lim_{\ell\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|\widetilde{w}_n^{(\ell)}\|_{L^\infty([-T,T],L^6(\Omega))}=0,$$
et
$$E_0(v_n)=\sum_{j=1}^{\ell}E_0(v_n^{(j)})+E_0(\widetilde{w}_n^{(\ell)})+o(1),\quad n\to\infty.$$
Enfin l'on a
$$\forall T>0,\quad\forall j\neq k,\quad\lim_{n\to\infty}\|v_n^{(j)}v_n^{(k)}\|_{L^\infty([-T,T],L^3(\Omega))}=0.$$

Démonstration. Seul le dernier résultat de cette proposition reste à être démontré. Il repose sur le lemme suivant.

Lemme 3.2 *Soient $h_n^{(j)}$ et $h_n^{(k)}$ deux échelles orthogonales, et soient $(f_n^{(j)})$ et $(f_n^{(k)})$ deux suites de fonctions bornées dans $\dot H^1(\mathbf{R}^3)$, respectivement strictement $(h_n^{(j)})$– et $(h_n^{(k)})$–oscillantes au sens où*
$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|\mathbf{1}_{|\xi|\geq R/h_n^{(j)}}\widehat{f}_n^{(j)}\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}=0,\quad\text{et}\quad\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\|\mathbf{1}_{|\xi|\leq\varepsilon/h_n^{(j)}}\widehat{f}_n^{(j)}\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}=0,$$
et de même en remplaçant j par k. Alors
$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^{(j)}f_n^{(k)}\|_{L^3(\Omega)}=0.$$

Ce lemme conduit évidemment directement à la proposition 3.1: les suites $\nabla v_n^{(j)}(t_n^{(j)},\cdot)$ et $\nabla v_n^{(k)}(t_n^{(k)},\cdot)$, pour des suites quelconques $(t_n^{(j)})$ et $(t_n^{(k)})$ de réels, vérifient les hypothèses du lemme 3.2. D'où le résultat. □

Démonstration du lemme 3.2. Supposons par exemple que $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^{(k)}/h_n^{(j)} = 0$. Commençons par supposer que les fonctions $f_n^{(j)}$ et $f_n^{(k)}$ ont un spectre tel que respectivement $h_n^{(j)}|\xi| \in \mathcal{C}_0^{(j)}$ et $h_n^{(k)}|\xi| \in \mathcal{C}_0^{(k)}$, où $\mathcal{C}_0^{(j)}$ et $\mathcal{C}_0^{(k)}$ sont des couronnes fixes de $\mathbf{R}$. On a alors

$$\|f_n^{(j)}\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \leq C h_n^{(j)} \|\nabla f_n^{(j)}\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \quad \text{et} \quad \|f_n^{(k)}\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \leq C h_n^{(k)} \|\nabla f_n^{(k)}\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}$$

et donc

$$\|f_n^{(j)}\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \leq C h_n^{(j)} \quad \text{et} \quad \|f_n^{(k)}\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \leq C h_n^{(k)}.$$

Alors par l'inégalité de Hausdorff–Young, on a

$$\begin{aligned} \|f_n^{(j)} f_n^{(k)}\|_{L^3(\mathbf{R}^3)} &\leq C \|\widehat{f}_n^{(j)} * \widehat{f}_n^{(k)}\|_{L^{3/2}(\mathbf{R}^3)} \\ &\leq C \|\widehat{f}_n^{(j)}\|_{L^1(\mathbf{R}^3)} \|f_n^{(k)}\|_{L^{3/2}(\mathbf{R}^3)}. \end{aligned}$$

Donc finalement

$$\begin{aligned} \|f_n^{(j)} f_n^{(k)}\|_{L^3(\mathbf{R}^3)} &\leq C \left(\frac{1}{h_n^{(j)}}\right)^{3/2} h_n^{(j)} \left(\frac{1}{h_n^{(k)}}\right)^{1/2} h_n^{(k)} \\ &\leq C \left(\frac{h_n^{(k)}}{h_n^{(j)}}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Le lemme est démontré dans le cas d'un spectre localisé. Sinon, les hypothèses de stricte oscillation faites sur $f_n^{(j)}$ et $f_n^{(k)}$ permettent d'approximer ces fonctions dans $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3)$ par de telles fonctions localisées, et d'obtenir le résultat. □

3.2 Extraction des temps et des coeurs de concentration

Chacune des fonctions $v_n^{(j)}$ obtenue dans la proposition 3.1 ci–dessus va être décomposée en une somme d'ondes de concentration linéaires orthogonales. Pour simplifier les notations, nous allons fixer une échelle de concentration h, et considérer une famille de fonctions (v_h), strictement (h)–oscillante.

Proposition 3.3 *Soit (v_h) une famille de fonctions strictement (h)–oscillante. Alors quitte à extraire une sous–suite, il existe des ondes de concentration linéaires $p_h^{(k)}$, associées à des données concentrantes $(\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}, h, x_h^{(k)}, t_h^{(k)})$, orthogonales deux–à–deux, telles que*

$$\forall \ell \in \mathbf{N}^*, \quad v_h(t,x) = \sum_{k=1}^{\ell} p_h^{(k)}(t,x) + \overline{w}_h^{(\ell)}(t,x),$$

avec orthogonalité des énergies:

$$E_0(v_h) = \sum_{k=1}^{\ell} E_0(p_h^{(k)}) + E_0(\overline{w}_h^{(\ell)}) + o(1), \quad h \to 0,$$

et avec

$$\forall T > 0, \quad \lim_{\ell\to\infty} \lim_{h\to 0} \|\overline{w}_h^{(\ell)}\|_{L^\infty([-T,T];L^6(\Omega))} = 0.$$

Démonstration. La méthode de démonstration suit les calculs de [1], en s'inspirant de la démarche de [14]. On commence par définir, pour tout couple $(x_h^{(j)}, t_h^{(j)})$, l'opérateur $D_h^{(j)}$ suivant:

$$D_h^{(j)} f(y) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(h^{1/2} f(t_h^{(j)}, x_h^{(j)} + hy), h^{3/2}\partial_t f(t_h^{(j)}, x_h^{(j)} + hy)\Big).$$

On définit alors une fonction dite d'exhaustion δ, pour toute famille de fonctions (f_h), de la manière suivante:

$$\delta(f_h) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{(x_h),(t_h)} \Big\{\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} + \|\psi\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)},\ D_h f_h \rightharpoonup (\varphi,\psi),\ \text{quitte à extraire une sous–suite}\Big\}.$$

Lemme 3.4 *Pour toute famille de fonctions (f_h) bornée en énergie, on a*

$$\forall T > 0, \quad \lim_{h\to 0} \|f_h\|_{L^\infty([-T,T];L^6(\Omega))} \leq C\delta(f_h)^{1/2} E_0(f_h)^{1/6}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la décomposition de [6] pour la suite $f_h(t_h,\cdot)$, bornée dans $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3)$, ainsi que l'injection de $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3)$ dans $L^6(\mathbf{R}^3)$. Nous laissons les détails au lecteur. □

La construction des fonctions $p_h^{(k)}$ se fait par récurrence: d'après le lemme 3.4, on peut supposer que $\delta(v_h) > 0$. On choisit alors $(\varphi^{(1)}, \psi^{(1)}, x_h^{(1)}, t_h^{(1)})$ tel que

$$\|\nabla\varphi^{(1)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} + \|\psi^{(1)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} \geq \frac{1}{2}\delta(v_h)$$

et, quitte à extraire une sous–suite,

$$D_h^{(1)} v_h \rightharpoonup (\varphi^{(1)}, \psi^{(1)}).$$

Alors $p_h^{(1)}$ est l'onde de concentration linéaire associée à $(\varphi^{(1)}, \psi^{(1)}, h, x_h^{(1)}, t_h^{(1)})$. Le lemme suivant se démontre par un simple calcul, utilisant la proposition 2.1 et le lemme 2.2.

Lemme 3.5 *Soit $w_h^{(1)} \stackrel{\text{déf}}{=} v_h - v_h^{(1)}$. Alors*

$$E_0(v_h) = E_0(v_h^{(1)}) + E_0(w_h^{(1)}) + o(1), \quad h \to 0.$$

On poursuit alors le développement par récurrence: on suppose que

$$v_h(t,x) = \sum_{k=1}^{K-1} p_h^{(k)}(t,x) + w_h^{(K-1)}(t,x),$$

avec orthogonalité en énergie, où chacun des $p_h^{(k)}$ est une onde de concentration linéaire avec orthogonalité des temps $t_h^{(k)}$ et des coeurs $x_h^{(k)}$ de concentration. Alors on exhibe par la même technique que ci–dessus une nouvelle onde de concentration linéaire $p_h^{(K)}$, de la manière suivante: on peut, d'après le lemme 3.4, supposer que $\delta(w_h^{(K-1)}) > 0$, et l'on définit $(\varphi^{(K)}, \psi^{(K)}, x_h^{(K)}, t_h^{(K)})$ de telle sorte que

$$\|\nabla\varphi^{(K)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} + \|\psi^{(K)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} \geq \frac{1}{2}\delta(w_h^{(K-1)}) \tag{16}$$

et, quitte à extraire une sous–suite,

$$D_h^{(K)} w_h^{(K-1)} \rightharpoonup (\varphi^{(K)}, \psi^{(K)}).$$

Alors $p_h^{(K)}$ est l'onde de concentration linéaire associée à $(\varphi^{(K)}, \psi^{(K)}, h, x_h^{(K)}, t_h^{(K)})$, et l'on a, comme dans le lemme 3.5 ci–dessus,

$$E_0(v_h) = \sum_{k=1}^{K} E_0(p_h^{(k)}) + E_0(w_h^{(K)}) + o(1), \quad h \to 0,$$

avec $w_h^{(K)} \overset{\text{déf}}{=} v_h - \sum_{k=1}^{K} p_h^{(k)}$.

L'orthogonalité des temps $t_h^{(k)}$ de concentration est due à la proposition 2.6. Celle des coeurs est laissée au lecteur: elle se montre par un argument classique de changement d'échelle en espace, en utilisant la proposition 2.3.

Reste alors à démontrer que

$$\forall T > 0, \quad \lim_{K\to\infty} \lim_{h\to 0} \|w_h^{(K)}\|_{L^\infty([-T,T],L^6(\Omega))} = 0.$$

Ce résultat resulte du fait que la série de terme général $\|\nabla\varphi^{(k)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} + \|\psi^{(k)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)}$ est convergente, et donc $\|\nabla\varphi^{(k)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} + \|\psi^{(k)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)}$ tend vers zéro quand k tend vers l'infini. Mais par définition de $(\varphi^{(K)}, \psi^{(K)})$ en (16), on a

$$\delta(w_h^{(K-1)}) \leq 2\left(\|\nabla\varphi^{(K)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} + \|\psi^{(K)}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)}\right),$$

donc $\lim_{h\to 0} \delta(w_h^{(K-1)})$ tend vers zéro quand K tend vers l'infini. Le lemme 3.4 donne alors le résultat.

La proposition 3.3 est démontrée. □

4 Le problème non linéaire: démonstration du théorème 2

Nous allons procéder en plusieurs étapes, qui nous permettront d'obtenir un résultat plus précis que celui énoncé dans le théorème, avec notamment une étude autour du temps de concentration t_n; comme dans la section précédente, nous allons pour simplifier les notations considérer une famille (p_h) d'ondes de concentration linéaires. D'autre part, nous ne nous intéresserons qu'au seul cas où

$$\lim_{h\to 0} \frac{t_h}{h} = +\infty,$$

et laissons les deux autres cas ($-\infty$ ou 0) au lecteur.

Les lemmes 4.1, 4.2 et 4.3 suivants conduisent directement au théorème.

4.1 Avant le temps de concentration

Lemme 4.1 *Sous les hypothèses du théorème 2, on a*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{h\to 0}\left(\sup_{-T\le t\le t_h-\lambda h} E_0(p_h-q_h,t)+\|p_h-q_h\|_{L^5([-T,t_h-\lambda h],L^{10}(\Omega))}\right)=0.$$

Démonstration. Le résultat est simplement dû à la proposition 2.6, suivie du théorème de linéarisation de [5]. □

4.2 Autour du temps de concentration

Avant d'énoncer le résultat que nous nous proposons de démontrer, nous avons besoin d'introduire une onde non linéaire, notée $\bar{q}_h^\lambda$. Tout d'abord, définissons l'onde remise à l'échelle suivante:

$$P_h(s,y) \stackrel{\text{déf}}{=} h^{1/2} p_h(t_h+hs, x_h+hy).$$

La fonction P_h vérifie une équation d'ondes linéaire dans le domaine $\Omega_h \stackrel{\text{déf}}{=} \dfrac{\Omega - x_h}{h}\cdot$ On lui associe la solution de l'équation linéaire dans le domaine limite Ω_∞:

$$\begin{cases} \square P = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_s\times\Omega_\infty, \quad P_{|\mathbf{R}_s\times\partial\Omega_\infty}=0 \\ (P,\partial_s P)_{|s=0} = (\mathcal{P}_{\Omega_\infty}\varphi, \mathbf{1}_{\Omega_\infty}\psi)\,. \end{cases}$$

On définit alors Q^λ, la solution de l'équation non linéaire suivante:

$$\begin{cases} \square Q^\lambda + |Q^\lambda|^4 Q^\lambda = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_s\times\Omega_\infty, \quad Q^\lambda_{|\mathbf{R}_s\times\partial\Omega_\infty}=0 \\ (Q^\lambda,\partial_s Q^\lambda)_{|s=-\lambda} = (P,\partial_s P)_{|s=-\lambda}\,. \end{cases}$$

Enfin $\bar{q}_h^\lambda$ est définie par

$$\bar{q}_h^\lambda(t,x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{h^{1/2}} Q^\lambda\left(\frac{x-x_h}{h}, \frac{t-t_h}{h}\right).$$

Nous allons montrer le résultat suivant.

Lemme 4.2 *Sous les hypothèses du théorème 2, on a*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{h\to 0} \widetilde{\|} q_h - \bar q_h^\lambda \|_{h,\lambda} = 0,$$

où l'on a noté $\widetilde{\|} f\|_{h,\lambda} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t\in[t_h-\lambda h, t_h+\lambda h]} E_0(f,t) + \|f\|_{L^5([t_h-\lambda h, t_h+\lambda h], L^{10}(\mathbf{R}^3))}$.

Démonstration. Elle va se faire en deux étapes. Commençons par définir la solution du système suivant:

$$\begin{cases} \Box Q_h^\lambda + |Q_h^\lambda|^4 Q_h^\lambda = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_s\times\Omega_h, \quad Q^\lambda_{h|\mathbf{R}_s\times\partial\Omega_h} = 0 \\ (Q_h^\lambda, \partial_s Q_h^\lambda)_{|s=-\lambda} = (P_h, \partial_s P_h)_{|s=-\lambda}\,. \end{cases}$$

Nous allons commencer par démontrer que

$$\lim_{h\to 0} \widetilde{\|} Q_h^\lambda - Q^\lambda\|_\lambda = 0, \quad \forall \lambda > 0, \tag{17}$$

avec $\widetilde{\|} f\|_\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{s\in[-\lambda,\lambda]} E_0(f,s) + \|f\|_{L^5([-\lambda,\lambda],L^{10}(\mathbf{R}^3))}$. La convergence forte en norme énergie s'obtient par un argument identique à celui permettant de démontrer la proposition 2.3 ci–dessus (voir [4]). Pour ce qui est de la norme Strichartz, le résultat s'obtient par les calculs suivants: l'inégalité de Hölder fournit

$$\|Q_h^\lambda - Q^\lambda\|^5_{L^5([-\lambda,\lambda],L^{10}(\mathbf{R}^3))} \leq \|Q_h^\lambda - Q^\lambda\|_{L^\infty([-\lambda,\lambda],L^6(\mathbf{R}^3))} \|Q_h^\lambda - Q^\lambda\|^4_{L^4([-\lambda,\lambda],L^{12}(\mathbf{R}^3))}.$$

Mais Q_h^λ et Q^λ vérifient l'estimation de Strichartz, et comme l'énergie de $Q_h^\lambda - Q^\lambda$ tend vers zéro quand h tend vers zéro, pour tout $\lambda > 0$, on peut écrire

$$\|Q_h^\lambda - Q^\lambda\|^5_{L^5([-\lambda,\lambda],L^{10}(\mathbf{R}^3))} \leq C\varepsilon_\lambda(h)\left(\|Q^\lambda\|^{20}_{L^5([-\lambda,\lambda],L^{10}(\mathbf{R}^3))} + \|Q_h^\lambda\|^{20}_{L^5([-\lambda,\lambda],L^{10}(\mathbf{R}^3))}\right),$$

avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon_\lambda(h) = 0$ pour tout $\lambda > 0$. On conclut alors par bootstrap superlinéaire (voir par exemple [1], lemme 2.2) à partir de l'estimation

$$\|Q_h^\lambda - Q^\lambda\|^5_{L^5([-\lambda,\lambda],L^{10}(\mathbf{R}^3))} \leq C\varepsilon_\lambda(h)\left(\|Q^\lambda\|^{20}_{L^5([-\lambda,\lambda],L^{10}(\mathbf{R}^3))} + \|Q_h^\lambda - Q^\lambda\|^{20}_{L^5([-\lambda,\lambda],L^{10}(\mathbf{R}^3))}\right).$$

Pour terminer la démonstration du lemme, on introduit la fonction $R_h^\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} Q_h - Q_h^\lambda$, avec

$$Q_h(s,y) \stackrel{\text{déf}}{=} h^{1/2} q_h(t_h + hs, x_h + hy).$$

Alors R_h^λ vérifie l'équation suivante:

$$\begin{cases} \Box R_h^\lambda + |R_h^\lambda + Q_h^\lambda|^4 (R_h^\lambda + Q_h^\lambda) - |Q_h^\lambda|^4 Q_h^\lambda = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_s\times\Omega_h, \quad R^\lambda_{h|\mathbf{R}_s\times\partial\Omega_h} = 0 \\ (R_h^\lambda, \partial_s R_h^\lambda)_{|s=-\lambda} = (Q_h, \partial_s Q_h)_{|s=-\lambda} - (P_h, \partial_s P_h)_{|s=-\lambda}\,. \end{cases}$$

D'après le lemme 4.1, on a

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{h\to 0} E_0(R_h^\lambda, -\lambda) = 0,$$

donc en notant de manière générique $\varepsilon(\lambda, h)$ une fonction vérifiant

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{h\to 0}\ \varepsilon(\lambda,h)=0,$$

l'estimation de Strichartz (2) fournit, pour tout $T_0 > -\lambda$,

$$\|R_h^\lambda\|_{L^5([-\lambda,T_0],L^{10}(\mathbf{R}^3))} \leq C\left(\varepsilon(\lambda,h)+\sum_{j=1}^{5}\|(R_h^\lambda)^j(Q_h^\lambda)^{5-j}\|_{L^1([-\lambda,T_0],L^2(\mathbf{R}^3))}\right)$$

$$\leq C\left(\varepsilon(\lambda,h)+\sum_{j=1}^{5}\|R_h^\lambda\|^j_{L^5([-\lambda,T_0],L^{10}(\mathbf{R}^3))}\|Q_h^\lambda\|^{5-j}_{L^5([-\lambda,T_0],L^{10}(\mathbf{R}^3))}\right). \qquad (18)$$

Il est facile de voir, par un changement d'échelle, que la constante C ne dépend ni de h, ni de λ. Mais d'après (17), on peut remplacer dans (18) la fonction Q_h^λ par Q^λ. En outre, la fonction Q^λ converge, quand λ tend vers l'infini, vers Q^- dans $L^5(\mathbf{R}, L^{10}(\mathbf{R}^3))$, avec

$$\begin{cases} \Box Q^- + |Q^-|^4Q^- = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_s\times\Omega_\infty, \quad Q^-_{|\mathbf{R}_s\times\partial\Omega_\infty}=0\\ \displaystyle\lim_{s\to-\infty} E_0(Q^- - P, s) = 0. \end{cases}$$

Cette convergence a lieu pour tout temps, car le domaine limite Ω_∞ est soit l'espace $\mathbf{R}^3$ entier, soit un demi–espace, pour lesquels on sait que les solutions de l'équation des ondes non linéaire critique sont dans $L^5(\mathbf{R}, L^{10}(\Omega_\infty))$ (voir [3], le cas du demi–espace découlant du cas $\mathbf{R}^3$ par réflexion antisymétrique).

On a donc en fait

$$\|R_h^\lambda\|_{L^5([-\lambda,T_0],L^{10}(\mathbf{R}^3))} \leq C\left(\varepsilon(\lambda,h)+\sum_{j=1}^{5}\|R_h^\lambda\|^j_{L^5([-\lambda,T_0],L^{10}(\mathbf{R}^3))}\|Q^-\|^{5-j}_{L^5([-\lambda,T_0],L^{10}(\mathbf{R}^3))}\right),$$

et l'on va conclure par déformation en temps (voir aussi [2]): si le temps T_0 est assez petit, uniformément en h et en λ, alors l'estimation ci–dessus implique directement, par bootstrap superlinéaire, que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{h\to 0}\|R_h^\lambda\|_{L^5([-\lambda,T_0],L^{10}(\mathbf{R}^3))}=0.$$

Définissons à présent

$$T_{\max} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup\left\{T\in\mathbf{R} \mid \lim_{\lambda\to\infty}\lim_{h\to 0}\|R_h^\lambda\|_{L^5([-\lambda,T],L^{10}(\mathbf{R}^3))}=0\right\}.$$

On a $T_{\max} \geq T_0$; soit $T_1 < T_{\max}$, alors on peut écrire

$$\|R_h^\lambda\|_{L^5([-\lambda,T_{\max}],L^{10}(\mathbf{R}^3))} \leq C\left(\varepsilon(\lambda,h)+\|R_h^\lambda\|_{L^5([T_1,T_{\max}],L^{10}(\mathbf{R}^3))}\|Q^-\|^4_{L^5([T_1,T_{\max}],L^{10}(\mathbf{R}^3))}\right).$$

Il suffit alors de choisir T_1 assez proche de $T_{\max}$, uniformément en h et en λ, pour conclure que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{h\to 0}\|R_h^\lambda\|_{L^5([-\lambda,T_{\max}],L^{10}(\mathbf{R}^3))}=0,$$

et par l'inégalité d'énergie,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{h\to 0}\sup_{-\lambda\le s\le T_{\max}} E_0(R_h^\lambda, s) = 0.$$

Le même type de calcul permet de montrer que si $\eta > 0$ est assez petit, alors

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{h\to 0}\|R_h^\lambda\|_{L^5([T_{\max},T_{\max}+\eta],L^{10}(\mathbf{R}^3))} = 0,$$

ce qui contredit la maximalité de $T_{\max}$; enfin on montre de la même manière que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{h\to 0}\|R_h^\lambda\|_{L^5([-\lambda,+\infty[,L^{10}(\mathbf{R}^3))} = 0,$$

et avec l'inégalité d'énergie, le lemme est démontré. □

4.3 Après le temps de concentration

Lemme 4.3 *Sous les hypothèses du théorème 2, on a*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{h\to 0}\left(\sup_{t_h+\lambda h\le t\le T} E_0(p_h^+ - q_h, t) + \|p_h^+ - q_h\|_{L^5([t_h+\lambda h,T],L^{10}(\Omega))}\right) = 0.$$

Démonstration. Elle est très simple, au vu des deux lemmes précédents: il suffit d'appliquer les résultats de scattering obtenus dans [1]-[2], qui s'étendent à notre cadre par réflexion antisymétrique si Ω_∞ est un demi–espace. □

References

[1] H. Bahouri et P. Gérard: High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, *American Journal of Mathematics*, **121**, pages 131–175, 1999.

[2] H. Bahouri et P. Gérard: Concentration effects in critical nonlinear wave equations, *Geometrical Optics and Related Topics* (F. Colombini and N. Lerner eds.), *Progress in Nonlinear Differential Equations and Applications*, **32**, Birkhäuser, Boston, pages 17–30, 1997.

[3] H. Bahouri et J. Shatah: Global estimate for the critical semilinear wave equation, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, **15**, 6, pages 783–789, 1998.

[4] I. Gallagher et P. Gérard: Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle, *manuscrit*.

[5] P. Gérard: Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations, *Journal of Functional Analysis*, **141**, pages 60–98, 1996.

[6] P. Gérard: Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev, *ESAIM Contrôle Optimal et Calcul des Variations*, **3**, pages 213–233, 1998 (version électronique: http://www.emath.fr/cocv/).

[7] P. Gérard et E. Leichtnam: Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem, *Duke Mathematical Journal*, **71**, pages 559–607, 1993.

[8] P. Gérard, P. Markowitch, N. Mauser et F. Poupaud: Homogenization limits and Wigner transforms, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **50**, pages 323–379, 1997.

[9] P. Gérard, Y. Meyer et F. Oru: Inégalités de Sobolev précisées, *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles, École Polytechnique*, décembre 1996.

[10] J. Ginibre et G. Velo: Generalized Strichartz inequalities for the wave equation, *Journal of Functional Analysis*, **133**, 1, pages 50-68, 1995.

[11] P.-L. Lions: The concentration–compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, I, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **1**, pages 109–145, 1984.

[12] P.-L. Lions: The concentration–compactness principle in the calculus of variations. The limit case, II, *Revista Matematica Iberoamericana*, **1**, pages 145–201, 1985.

[13] P.-L. Lions et T. Paul: Sur les mesures de Wigner, *Revista Matematica Iberoamericana*, **9**, pages 553–618, 1993.

[14] G. Métivier et S. Schochet: Trilinear resonant interactions of semilinear hyperbolic waves, *Duke Mathematical Journal*, **95**, 2, pages 241–304, 1998.

[15] J. Shatah et M. Struwe: Well–posedness in the energy space for semilinear wave equations with critical growth, *International Mathematics Research Notices*, **7**, pages 303–309, 1994.

[16] H. Smith et C. Sogge: On the critical semilinear wave equation outside convex obstacles, *Journal of the American Mathematical Society*, **8**, 4, pages 879–916, 1995.

[17] H. Smith et C. Sogge: Global Strichartz estimates for nontrapping perturbations of the Laplacian, *preprint.*