Partiel du 28 octobre 2006
Durée : trois heures

Les documents personnels, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le barême est donné à titre indicatif ; les exercices sont indépendants.

Exercice 1. (1 point) Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}$$

Exercice 2. (3 points) Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$?

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (3 points) Chercher les valeurs propres réelles et les dimensions des sous-espaces propres associés des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R}, \quad C = \begin{pmatrix} -8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lesquelles de ces matrices sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4. (3 points) Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a\sqrt{2} & 3 \\ -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & a\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5. (5 points) 1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice P inversible et une matrice diagonale D telle que

$$D = P^{-1}AP,$$

et calculer A^n.

2. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En considérant le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et en utilisant la question précédente, calculer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0. Les suites sont-elles convergentes ?

Exercice 6. (4 points) 1. Soient A et B deux matrices carrées à coefficients complexes telles que

$$A = I + \alpha B, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

où I désigne la matrice identité. Montrer que tout vecteur propre de B est un vecteur propre de A, et en déduire que si B est diagonalisable, alors A aussi.

2. Soit la matrice

$$A(m) = \begin{pmatrix} 2-m & 1-m & m-1 \\ m-1 & m & 1-m \\ 1-m & 1-m & m \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

À l'aide de la question précédente, déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de $A(m)$. La matrice $A(m)$ est–elle diagonalisable ?

Exercice 7. (2 points) Soit n un entier supérieur ou égal à deux. Pour tous les entiers i et j de $\{1, \ldots, n\}$ notons E_{ij} la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est égal à un, et tous les autres sont nuls.

1. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que la matrice E_{ii} est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2. Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$. Calculer le polynôme caractéristique de E_{ij} et montrer que la matrice E_{ij} n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. (Cet exercice est facultatif) Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = PTP^{-1}$.

2. En déduire la solution $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + y + z \\ y' & = & 2y + 2z \\ z' & = & x - y + 3z \end{array} \right.$$

telle que $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.