# *Examen partiel*

*29 octobre 2007*

## Question de cours

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que toute fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable et positive est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées mesurables positives de $X$ dans $\mathbb{R}$.

## Exercice 1 : théorème d'Ascoli

Pour une fonction continue de $J := [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ on pose $\|g\| = \sup_{x\in J} |g(x)|$.
On désigne par $E_1$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $J$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme$\| \cdot \|_1$ définie par

$$\|f\|_1 = \|f\| + \|f'\|.$$

1. Montrer **rapidement** que cet espace est complet.
2. Dans ce qui suit $\alpha$ désigne une fonction à valeurs réelles continûment dérivable sur $J$ telle que

   $$0 \leq \alpha(x) \leq 1, \quad \forall x \in J.$$

   On définit

   $$a = \max_{x\in J} |\alpha'(x)|.$$

   Pour $f \in E_1$ on pose

   $$Tf(x) = \alpha(x)f(\frac{x}{2}) + (1 - \alpha(x))f(\frac{x+1}{2}).$$

   (a) Vérifier que pour $f \in E_1$, on a $Tf \in E_1$, et

   $$\|(Tf)'\| \leq 2a\|f\| + 1/2\|f'\|.$$

   (b) Montrer que $T$ est une application linéaire continue de $E_1$ dans $E_1$.
3. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E_1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_1 \leq 1$. Prouver qu'il existe une fonction continue $g$ de $J$ dans $\mathbb{R}$ et une sous-suite $(\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

   $$\lim_{n\to\infty} \|f_{\phi(n)} - g\| = 0.$$

4. On pose $L = \{f \ : \ f \in E_1,\ Tf = f\}$ et $B_L = \{f \ : \ f \in E_1,\ \|f\|_1 \leq 1\} \cap L$.

   (a) Montrer que $L \neq \{0\}$.

   (b) Montrer que si $f \in L$, on a

   $$\|f'\| \leq 4a\|f\|.$$

   (c) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de $B_L$. Établir qu'il existe une sous-suite $(\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\{f_{\phi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $E_1$.

   (d) Conclure que dim(L) $< \infty$.

# Exercice 2 : Intégration

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f$ une fonction mesurable positive sur $X$ telle que

$$0 \leq \int_X f d\mu = c < +\infty.$$

On s'intéresse pour un paramètre $\alpha > 0$ au comportement de la suite

$$\int_X n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) d\mu.$$

Pour $x \in X$ on notera

$$g_n(x) = n \log\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right).$$

1. Dans le cas où $\alpha = 1$, montrer que $g_n$ tend simplement vers $f$. À l'aide du théorème de convergence dominée (il faudra trouver une fonction qui domine $|g_n|$), calculer $\lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu$.
2. Si $0 < \alpha < 1$, calculer $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ pour chaque $x \in X$ . En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = +\infty,$$

   en précisant bien le théorème qui permet de conclure.
3. Si $\alpha > 1$,
   (a) montrer l'inégalité $1 + u^\alpha \leq (1 + u)^\alpha$, pour $u \geq 0$,
   (b) en déduire que $g_n$ est dominée par une fonction intégrable.
   (c) calculer $\lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu$.

# Exercice 3

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, avec une mesure positive $\mu$ telle que $\mu(X) = 1$.

1. Soient $f$ et $g$ deux fonctions mesurables positives sur $X$ telles que $fg \geq 1$. Montrer que

$$\int_X f d\mu \int_X g d\mu \geq 1.$$

   On pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $f^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}$.
2. Soient deux réels $\alpha > 0$ et $p > 1$ et $f$ et $g$ deux fonctions mesurables positives sur $X$ telles que $fg^{p-1} \geq 1$. Montrer que

$$\left(\int_X f d\mu\right) \left(\int_X g d\mu\right)^{p-1} \geq 1.$$

   On pourra utiliser une inégalité de Hölder avec les exposants $p$ et $p'$ à des fonctions bien choisies, $p'$ étant l'exposant dual de $p$, $1/p + 1/p' = 1$.